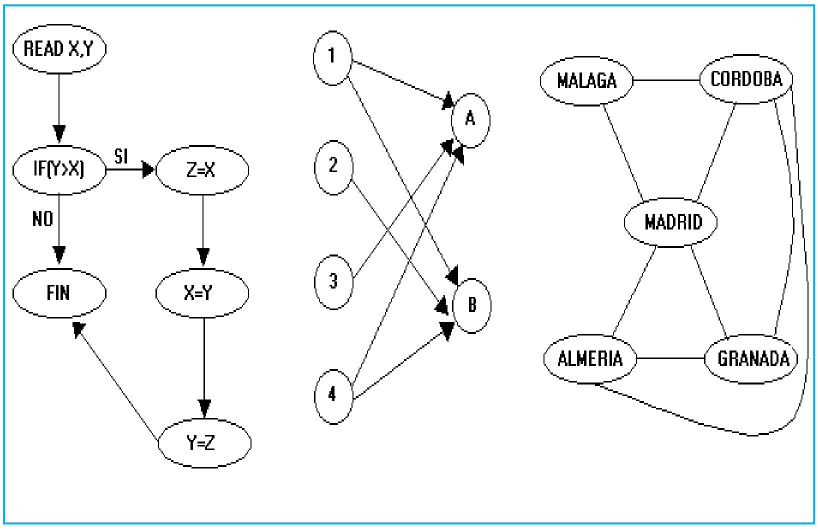
GRAFOS.

Los grafos o graficas son artefactos matemáticos que permiten expresar de una forma visualmente muy sencilla y efectiva las relaciones que se dan entre elementos de muy diversa índole. Un grafo simple está formado por dos conjuntos:

- ✓ Un conjunto V de puntos llamados vértices o nodos.
- ✓ Un conjunto de pares de vértices que se llaman aristas o arcos y que indican qué nodos están relacionados.

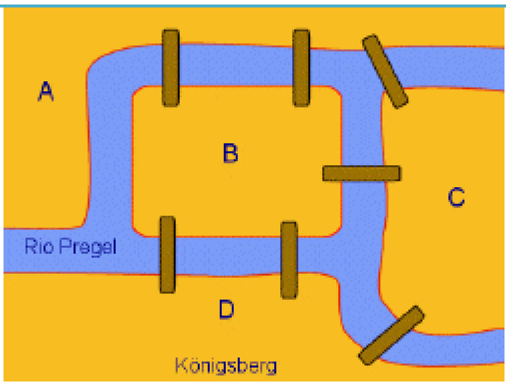


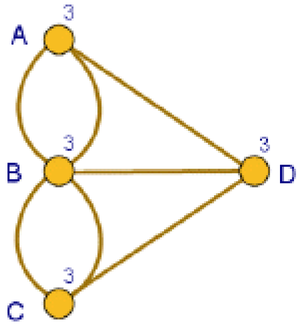
Grafos Simples.

De una manera más informal podemos decir que un grafo es un ***conjunto de nodos con enlaces entre ellos,*** denominados aristas o arcos.

En un grafo simple entre dos nodos sólo hay un arco. Si hay más de un arco hablamos de un **multigrafo**. Si los arcos se pueden recorrer en una en una dirección concreta pero no en la contraria lo llamamos grafo dirigido o dígrafo y los arcos son entonces aristas, si los arcos salen y llegan al mismo punto formando un bucle el grafo resultante se llama **pseudografo**. A pesar de que un grafo parece una estructura muy elemental, hay muchísimas propiedades de los grafos cuyo estudio ha dado lugar a una completa teoría matemática.

Fue **Leonhard Euler** quien ideó los grafos como una manera muy potente y elegante de resolver el problema de los puentes de Königsberg. Königsberg (hoy Kaliningrado en Rusia) era en tiempos de Euler (siglo XVIII) una ciudad prusiana cruzada por siete puentes. Durante la época se suscitó la cuestión no resuelta de si era posible recorrer toda la ciudad cruzando cada uno de los puentes una y sólo una vez. Si hacemos una representación esquemática de la ciudad vemos que los puentes unen cuatro porciones de tierra. La búsqueda por prueba y error no conduce a ningún resultado.





El problema de los puentes de Königsberg. Esta ciudad esta recorrida por el río Pregel que crea dos islas. ¿Se puede recorrer toda la ciudad pasando una sola vez por todos y cada uno de los 7 puentes que unen la parte insular de la ciudad con el resto?	**La solución de Euler. El famoso matemático abstrajo los detalles de la forma de la ciudad y sus puentes para quedarse con la conectividad, dando lugar a una de los primeros grafos. El orden de todos los vértices es impar, lo que implica que es imposible recorrerlos pasando una sola vez por cada uno.**

Euler realizó una abstracción del problema representando mediante puntos las cuatro porciones de terreno y dibujando un arco entre cada dos puntos por cada puente. Llamó orden de cada vértice al número de arcos que se reunían en el y se percató que el orden de cada vértice visitado en un recorrido sin saltos ha de ser par (sale un enlace y entra otro) excepto para dos puntos del grafo: aquellos donde se inicia y donde se acaba el recorrido, que han de tener orden impar. Si el vértice donde se inicia y se acaba son el mismo entonces todos los vértices han de ser de orden par.

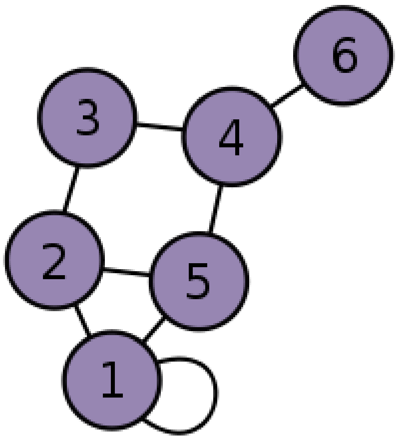
En el problema de Königsberg el orden de todos los nodos es 3, esto es impar, por lo que quedó claro que no existía solución para el problema. No había un camino que recorriese todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos.

El interés de este ejemplo es que además de dar lugar a una teoría matemática muy potente los grafos se dibujan y resultan muy intuitivos, especialmente cuando los vértices son pocos. Ejemplos de grafos que todos conocemos son los organigramas que explicitan la estructura formal de la empresa, los árboles genealógicos o la circuitería de los chips electrónicos. Se usan regularmente para resolver problemas en la eficiencia del transporte, en sociología, electrónica y electricidad, detección de fraude y en general en aquellos campos en los que la conectividad es importante.

BUCLES

Un bucle o lazo (loop en inglés) en un grafo o digrafo es una arista que conecta un vértice consigo mismo. Un grafo simple no posee bucles.

Dependiendo del contexto, un grafo o multigrafo puede estar definido o no para permitir en él la presencia de bucles



Un grafo con un bucle en el vértice 1.

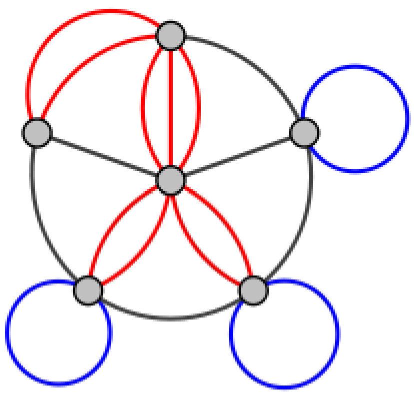
Para un grafo no dirigido, el grado de un vértice es igual al número de vértices adyacentes. Sin embargo, si un vértice posee un bucle, debemos añadir dos a su grado. Esto es porque cada conexión de la arista del bucle cuenta como su propio vértice adyacente; o en otras palabras, un vértice con un bucle se ve a sí mismo como un nodo adyacente a ambos vértices finales de la arista.

Para un grafo dirigido, un bucle añade uno al grado de entrada y uno al grado de salida.

MULTIGRAFO.

Un multigrafo o **pseudografo** es un grafo que está facultado para tener aristas múltiples; es decir, aristas que relacionan los mismos nodos. De esta forma, dos nodos pueden estar conectados por más de una arista. Formalmente, un multigrafo G es un par ordenado G:=(V, E) donde:

- V es un conjunto de vértices o nodos
- E es un multiconjunto de pares no ordenados de nodos, llamados aristas o líneas.



Un multigrafo con múltiples aristas (en rojo) y tres bucles (en azul). No todos los autores permiten multigrafos con bucles.

Ejemplo. Los multigrafos podrían usarse, por ejemplo, para modelar las posibles conexiones de vuelo ofrecidas por una aerolínea. Para este caso tendríamos un grafo dirigido, donde cada nodo es una localidad y donde pares de aristas paralelas conectan estas localidades, según un vuelo es *hacia* o *desde* una localidad a la otra.

Algunos autores permiten que los multigrafos tengan bucles, es decir, que una arista conecte a un nodo consigo mismo.

Un **multidigrafo** es un grafo dirigido que está facultado para tener *aristas múltiples*, es decir, aristas con los mismos nodos iniciales y finales. Formalmente, un multidigrafo G es un par ordenado $G:=(V,A)$ donde:

- V es un conjunto de *vértices* o *nodos*
- A es un multiconjunto de pares ordenados de nodos, llamados *aristas dirigidas*, *arcos* o *flechas*.

Un **multidigrafo mixto** $G:=(V, E, A)$ puede definirse de la misma manera que un grafo mixto, es decir, con la capacidad de poseer al mismo tiempo aristas dirigidas (A) y no dirigidas (E).

CAMINOS.

Un ***camino*** es una sucesión de vértices tal que de cada uno de sus vértices existe una arista al vértice sucesor. La longitud del camino es el número de aristas que usa dicho camino contando aristas recorridas varias veces, el mismo número de veces que las recorramos.

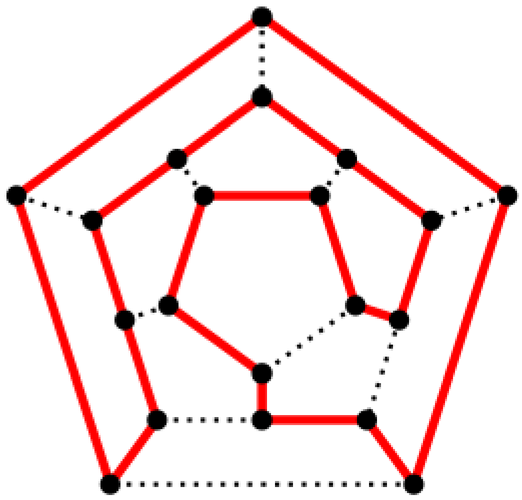
Un **camino** se dice **simple** cuando todos sus arcos son distintos y se dice **elemental** cuando no utiliza un mismo vértice dos veces. Por tanto todo camino elemental es simple y el recíproco no es cierto.

Un **camino cerrado,** es una sucesión de vértices tal que el primer vértice es también el último.

CICLOS.

Un ***ciclo*** es una sucesión de aristas adyacentes, donde no se recorre dos veces la misma arista, y donde se regresa al punto inicial. Un ***ciclo hamiltoniano*** tiene además que recorrer todos los vértices exactamente una vez (excepto el vértice del que parte y al cual llega).

Por ejemplo, en un museo grande (al estilo del Louvre), lo idóneo sería recorrer todas las salas una sola vez, esto es buscar un ciclo hamiltoniano en el grafo que representa el museo (los vértices son las salas, y las aristas los corredores o puertas entre ellas).



Ejemplo de un ciclo hamiltoniano.

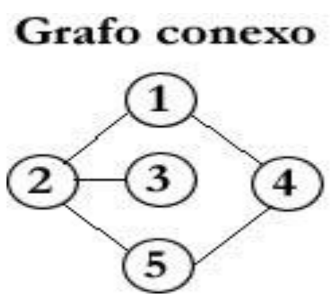
GRAFO CONEXO.

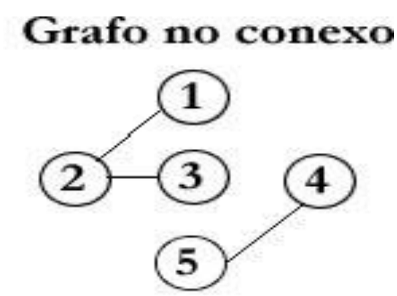
Un **grafo** es **conexo** si cada par de vértices está conectado por un camino; es decir, si para cualquier par de vértices (a, b), existe al menos un camino posible desde a hacia b.

Un **grafo** es **doblemente conexo** si cada par de vértices está conectado por al menos dos caminos disjuntos; es decir, es conexo y no existe un vértice tal que al sacarlo el grafo resultante sea disconexo.

Es posible determinar si un grafo es conexo usando un algoritmo Búsqueda en anchura (BFS) o Búsqueda en profundidad (DFS).

En términos matemáticos la propiedad de un grafo de ser (fuertemente) conexo permite establecer con base en él una relación de equivalencia para sus vértices, la cual lleva a una partición de éstos en "componentes (fuertemente) conexas", es decir, porciones del grafo, que son (fuertemente) conexas cuando se consideran como grafos aislados. Esta propiedad es importante para muchas demostraciones en teoría de grafos.





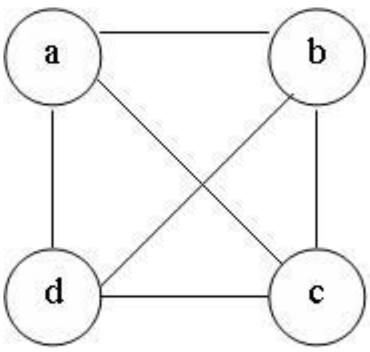
GRAFOS COMPLETOS Y GRAFOS ETIQUETADOS.

Un **grafo** es **completo** si existen aristas uniendo *todos* los pares posibles de vértices. Es decir, todo par de vértices (a, b) debe tener una arista *e* que los une.

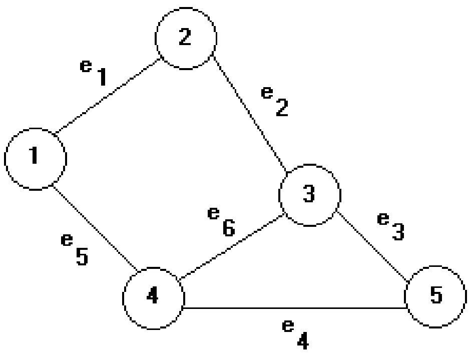
El conjunto de los grafos completos es denominado usualmente $\mathbb{K}$, siendo $\mathbb{K}_n$ el grafo completo de *n* vértices. Un $\mathbb{K}_n$, es decir, grafo completo de *n* vértices tiene exactamente $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.

La representación gráfica de los $\mathbb{K}_n$ como los vértices de un polígono regular da cuenta de su peculiar estructura.

Un **grafo** es **etiquetado** si sus aristas y/o vértices tienen asignado alguna identificación.



Grafo completo.



Grafo etiquetado.

MATRIZ DE ADYACENCIA.

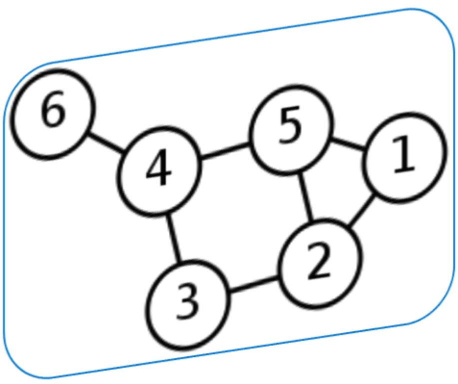
La ***matriz de adyacencia*** es una matriz cuadrada que se utiliza como una forma de representar las relaciones que existen ente los nodos de un grafo. Los pasos para la construcción de la matriz de adyacencia a partir de un grafo son:

- Se crea una matriz cero, cuyas columnas y filas representan los nodos del grafo.
- Por cada arista que une a dos nodos, se suma 1 al valor que hay actualmente en la ubicación correspondiente de la matriz.

Si tal arista es un bucle y el grafo es no dirigido, entonces se suma 2 en vez de 1.

Finalmente, se obtiene una matriz que representa el número de aristas (relaciones) entre cada par de nodos (elementos).

Existe una matriz de adyacencia única para cada grafo (sin considerar las permutaciones de filas o columnas), y viceversa.



Matriz de Adyacencia.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$