Einleitung in die Theorien der Analytischen Functionen.

Vorlesungen des Prof. Weierstrass im Sommer-Semester 1874.

Bearbeitet von Szymański.

Einleitung. Die analytischen Functionen bilden im Grunde die ganze höhere Mathematik aus, und die Untersuchung derselben ist die Aufgabe der mathematischen Analysis. Man definirt eine analytische Function auf verschiedenste Arten. So definirt z. B. Leibnitz, Lagrange, Bernoulli die Function, als einen Rechnungsausdruck, in dem mehrere unbestimmte Grössen vorkommen. Seit Fourier, Cauchy, Dirichlet ist es Sitte geworden zu sagen: wenn mit einer sich stetig verändernden Grösse x eine zweite y im Zusammenhange steht, so dass sie sich gleichzeitig mit x stetig ändert, so ist dann y eine Function von x. Man definirt auch eine analyt. Function zweier Variablen x y so, dass man sagt: Wenn zwischen x u. y ein Zusammenhang stattfindet, so dass zu jedem x zwischen bestimmten Grenzen, sich ein bestimmtes y ergiebt, so ist y eine Function von x. Alle diese Definitionen sind aber nicht streng und man kann aus ihnen nicht alle Eigenschaften der Functionen herleiten. Ja sogar kann man in manchen Fällen nicht entscheiden, ob diese Functionen den Regeln des Differentiirens und Integrirens unterworfen sind. Diese Definitionen sind von der Art, wie die ei=

ner Curve als einer Linie von der kein auch noch so kleines Stück gerade ist. Diese Definition der Curve ist zwar richtig, man kann aus derselben gar nicht die Eigenschaften der Curven herleiten. Im Anfange hat man den analytischen Functionen alle Eigenschaften beigelegt, die man für die algebraischen Functionen fand; dies ist aber zu viel.

Wir wollen hier den Begriff einer analytischen Function allmählich entwickeln und hierbei ist es am naturgemässesten auf die Grundbegriffe der Arithmetik zurückzugehen, aus denen sich der Begriff der analytischen Function gebildet hat. Wir gehen also von den Fundamentalsätzen der Arithmetik aus, wobei wir die Grundoperationen so erklären, dass hierin gleichzeitig für alle in der Mathematik vorkommenden Grössen Regeln der Operationen sich ergeben.

I. Entwickelung der Fundamentalsätze der Arithmetik.

In der Erfahrung bietet sich uns zunächst die Zusammensetzung von Dingen, welche wir Elemente nennen wollen. Abstrahiren wir von der Qualität der Elemente, sondern betrachten wir jedes Element für sich selbst, so kommen wir zu dem Begriffe einer Grösse. Diese Grössen können gleich- oder ungleichartig sein. Sind die zu vereinigenden Grössen gleichartig so kommen wir auf den Begriff der Zahl, als einer Vielheit gleichartiger Dinge. Denn wir zählen indem wir eine der Grössen als Einheit nehmen, von dieser ausgehen und zu der Eins wiederum Eins hinzufügen u. s. f. Mit dem Begriffe der Zahl ist sofort die erste Grundoperation gegeben, nämlich das Addiren. Haben wir 2 Zahlengrössen a u. b, so heisst diese Zahlen a, u. b zu einander zu addiren oder die Summe a+b zu bilden, nichts weiter als das Aneinanderfügen der Einheiten von b zu denen von a. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass $a+b=b+a$. Denn es ist gleichgültig ob wir an die Einheiten von a die von b, oder umgekehrt hinzufügen; die Anzahl der Einheiten ist in beiden Fällen dieselbe. Hieraus folgt also dass die Reihenfolge der Summanden im Resultate gleichgültig ist. Auch ist in der Formel $a+b=b+a$ die Gleichheit realisirt. Dies kann man ohne weiteres ausdehnen auf mehrere Grössen $a, b, c \ldots$ deren Anzahl endlich ist. Alle Sätze der Additionslehre ergeben sich aus dem folgenden: Hat man mehrere Grössen $a, b, c, \ldots$ die selbst wiederum zusammengesetzt sind resp. aus $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \beta_1, \beta_2 \ldots$ so erhält man die Summe

$$a+b+c+\ldots$$

wenn man alle Summanden von a zu allen von b, zu allen von c u. s. f. hinzuaddirt. Alle aus diesem allgemeinen, aus der Definition sich ergebendem Satze, hervorgehenden Sätze gelten aber vorläufig nur dann, wenn die Anzahl der Grössen $a, b, c, \ldots$ endlich ist und jede derselben aus endlicher Anzahl von Elementen $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots$ besteht, da dieser Satz die Möglichkeit des Zählens der Einheiten involvirt, was doch sobald die Anzahl jede Grenze übersteigt, so in der That nicht möglich ist. Dass die Reihenfolge der Summanden gleichgültig ist folgt aus der Definition selbst. Auch werden wir sehen, dass für jedes andere Operationszeichen dieser Satz über die Gleichgültigkeit der Reihenfolge der Grössen a, b. bestehen bleibt, z. B.

$$a.b = b.a\,, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 f(x_1 x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(x_1 x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

Wir haben also den Begriff der Vereinigung gleichartiger Dinge,

d. h. solcher die aequivalente Eigenschaften besitzen. Durch Vereinigung ungleichartiger Dinge z. B. Thaler und Silbergroschen, Atome des Chemiker, erhält man den Begriff complexer Grössen. Diese müssen nun so definirt werden, dass unsere Grundgesetze auch für diese bestehen bleiben. Eine complexe Grösse ist nun vollständig definirt, wenn man die Einheiten, aus denen sie bestehen soll, definirt hat, und dazu noch die Anzahl, wie oft jede Einheit vorkommen soll, angiebt. Es ist nun klar, dass, wenn nur eine Einheit wirklich vorkomt, die anderen aber nicht, wir dann wiederum unsere ursprünglichen, einfachen Grössen haben. Wir werden hiermit nothwendigerweise zu dem Begriffe der Null geführt; wir müssen nämlich im Stande sein, wenn eine Einheit nicht vorkomt, dies auch wirklich auszudrücken. Streng genomen hätte man die Null schon bei den ersteren Grössen einführen müssen. Eine complexe Grösse kann somit aus Einheiten gebildet werden; bestehen nun zwischen letzteren keine Beziehungen, wie z. B. in der Chemie, so kann man mit diesen complexen Grössen keine andere Operationen vornehmen, als das Addiren, wobei natürlich dieselben Gesetze gelten, wie früher.

Wie wir oben gesehen haben ist eine ganze Zahl nichts Anderes als ein Aggregat von Einheiten. Man kann nun aber die Zahl selbst als Einheit nehmen und aus derselben neue Zahlen bilden, welche so beschaffen sein sollen, dass sie dem ursprünglichen Zahlengebiet ebenfalls angehören. Wenn wir eine Zahl a als Einheit nehmen, so können wir eine neue Zahl bilden nach derselben Weise wie die Zahl a aus der Einheit gebildet wurde;

nämlich durch die Verbindung

$a+a+a+\ldots$ d. h. durch Anwendung der uns bis jetzt allein bekanten Operation. Das Resultat von $a+a+a\ldots$ nenen wir Vielfaches von a und zwar ist dies, wenn die Zahl b gegeben ist, welche angiebt, wie oft ich a setzen soll $= ab$. Diese Operation nennen wir die Multiplication. Für die Multiplication giebt es nun 3 Grundsätze dass nämlich

$$a.b = b.a$$
$$abc = acb$$
$$a(b+c) = ab + ac$$

deren Richtigkeit nach analogen Betrachtungen sofort einleuchtet.

Eine Erweiterung der Rechenoperation ist nur dan möglich, wenn die vorangehenden Grundgesetze bestehen bleiben. Man kann also 2 Grössen nicht mit einander multipliciren, wenn man sie nicht addiren kann. Hierbei wollen wir 2 Beispiele anführen, eine berechtigte Erweiterung der Addition und unberechtigte Erweiterung der Multiplication. Hat man 2 Strecken ihrer Länge und Richtung nach gegeben, so kann man sie addiren, indem man im Endpunkte der einen z. B. a die Strecke b ihrer Länge und Richtung nach aufträgt; die Verbindungslinie der nicht zusamenstossenden Endpunkte heisst dann geometrisch die Summe $a+b$, da hier die Additionsgesetze gelten. So verfährt man bekantlich seit den ältesten Zeiten bei der Zusamensetzung von Kräften; ja

in der Mechanik geht man noch weiter, und hiermit kommen wir zu unserem zweiten Beispiele. Bildet man sich aus den Kräften a, b ein Parallelogramm, errichtet man auf der Ebene desselben eine Normale, die das gleiche Vielfache der Längeneinheit ist, wie der Inhalt des Parallelogramms das Vielfache der Flächeneinheit, so ist diese Normale der Länge nach festbestimmt, sie ist aber noch doppelsinnig; bestimmt man aber, dass ein Beobachter, der in einem Endpunkte von a steht und längs dieser Strecke a hinsieht, b zur linken haben soll und die Normale nach oben gerichtet sein soll, so ist letztere eindeutig definirt. Diese Normale, die wir mit (ab) bezeichnen wollen, hat man das geometrische Product von a, b genannt aber mit Unrecht. Man sieht nämlich sofort, dass das 3te Multiplicationsgesetz gilt, dagegen aber nicht das 1te und 2te. Denn es ist:
$(ab) = -(ba)$.

Auf complexe Grössen ist die Multiplication nicht so leicht zu ~~(uf)~~ übertragen. Sind α, β 2 Einheiten, a und b zwei Zahlen, so muss a.b eine Zahl derselben Art sein, also aus denselben Einheiten bestehen. Daher müssen wir uns zunächst fragen, was bedeutet $\alpha.\beta$. Ist es nun hierfür eine Definition festzusetzen, dass die Gesetze der Multiplication bestehen bleiben.

Denken wir uns nun 2 Grössen a, b gegeben und wollen eine 3te c so bestimmen, dass $a = b + c$. Ist nun

b grösser als a, so sieht man zunächst, dass bei den bis jetzt erörterten Begriffen dies nicht möglich ist. Wir kommen hier zu dem Begriffe der Subtraction und gleichzeitig zum Begriffe von entgegengesetzten Grössen. Die Einführung entgegengesetzter Zahlen geschieht durch folgende Definition. Zwei Zahlen a, a_2 sind entgegengesetzt wenn sie zu einer und derselben Zahl hinzuaddirt, die Zahl nicht ändern.

Durch den Begriff der Addition sind wir zu dem der Multiplication geführt worden. Nun sei a als Vielfaches von α gegeben, und ebenso c; alsdann kann man fragen, wie muss man b annehmen, damit $a.b=c$ sei. Dies ist zunächst nicht möglich, wenn $a>c$. Dieses führt uns auf die Definition der Division. Wir haben bis jetzt völlig abstrahirt von dem Werthe der aus den Elementen gebildeten Zahlengrössen; wir müssen nun diesen einführen und gelangen dadurch zunächst in 2 verschiedenen Arten der Gleichheit. Sind 2 Grössen aus denselben Elementen auf dieselbe Art und Weise zusammengesetzt, so nennt man sie „identisch gleich" z. B. $a=a$. Dagegen können zwischen den Elementen, Einheiten, derartige Beziehungen stattfinden (wie häufig im practischen Leben, z. B. Thaler und Silbergroschen), dass ein Element der einen Art, D.

durch mehrere Elemente der anderen Art vertreten wird; dann sagt man die Grössen sind gleichwerthig z. B. 1 Thaler = 30 Sg. Jede Grösse kann bei solchem Zusamenhang der Elemente umgeformt werden. Haben wir z. B. $\alpha = 3\beta$, so können wir in dem complexen Ausdrucke je $1.\alpha$ durch 3β und je 3β durch $1.\alpha$ ersetzen. Unter diesen Umständen sagen wir α und β stehen in einem Werthverhältniss zu einander, indem α ein Vielfaches von β und β ein genauer Theil von α ist. Habe ich nun einen complexen Ausdruck mit den Elementen $\alpha, \alpha', \alpha''\ldots$ und ist z. B. $\alpha = 2\alpha'$, $\alpha = 3\alpha''$, … so kañ ich die Elemente α', α'', … durch α ausdrücken und umgekehrt. Also haben wir das Resultat: Wenn wir zunächst nur Zahlengrössen betrachten, deren Elemente je 2 verglichen in einem bestimten Werthverhältniss stehen und es soll die Forderung befriedigt werden, b zu bestimen bei gegebenen a und c, so ist nothwendig dass in der Reihe der Elemente die α und alle genauen Theile von α vorhanden sind. Dies genügt aber auch.

Als complexe Grössen betrachten wir jetzt also nur noch solche, welche aus dem Elemente α und den genauen Theilen von α zusamengesetzt sind. Zur Rechtfertigung der Einführung brauchen wir nur zu zeigen, dass solche Elemente α, α', α'', … vorhanden sind, aus denen sich Zusamensetzungen derart bilden lassen, dass man in dem Resultate wirklich α durch $2\alpha'$, $3\alpha''$, … ersetzen kann.

Zu dem Zwecke nehmen wir eine gerade Linie an; dieselle theilen wir durch einen Punct in 2 Theile; die Linie ist also zusamengesetzt aus 2 Theilen, die selbst wieder Linien sind, die im gewissen Werthverhältnisse zu einander stehen. Wir könen also unsere obige Vorderung in der That realisiren.

Das Element, von dem die anderen genaue Theile sind, nennen wir (gas) das Grundelement, und werden uns nun auf Grössen beschränken, die aus Grundelementen und ihren Theilen zusamengesetzt sind. Zwei so gebildeten Grössen können der Zusamensetzung nach sehr verschieden sein und doch gleichen Werth haben; dann sind sie, wie oben gesagt, aequivalent. Zwei Zahlengrössen sind also aequivalent, bei gleichen Elementen, wenn jedes Element in der einen so oft vorkomt wie in der anderen, und bei verschiedener Zusamensetzung, wenn die eine Grösse in die andere umgeformt werden kann durch Ersetzung eines oder mehrerer ~~zweier~~ seiner Elemente durch seine Theile.

Wir betrachten das Grundelement als ganze Zahl und diejenige Zahl die angiebt, wie oft ich α setzen muss, um die Einheit zu erhalten, nennen wir „den Nenner" und hierdurch haben wir Brüche definirt. Hierbei ist zu bemerken dass wir als Grundelement nicht nur Theile der Einheit zu nehmen brauchen, sondern Theile von Theilen der Einheit, z. B. $\frac{m}{n}$ heisst die Grundeinheit $\frac{1}{n}$ m mal genomen; man sieht also dass auch jedes Vielfache von Theilen vorhanden ist; Daher kann ich das Element $\frac{1}{n}$ ersetzen durch m. Elem. $\frac{1}{m.n}$ und umgekehrt: komt $\frac{1}{m.n}$ m mal vor, so kann ich es durch $\frac{1}{n}$ ersetzen. Br

Ist nun eine Reihe von Brüchen gegeben, so lehrt die Algebra eine ganze Zahl zu finden, die ein Vielfaches sämtlicher Brüche ist; man kann alsdann jedes Element ersetzen durch Brüche, sämmtliche mit dem Nenner n. Kommen nun nach dieser Umwandelung in a und b gleich viele Elemente vor, so sind die Brüche a und b einander gleich, d. h $a=b$ und $b=a$, oder mit anderen Worten a entsteht ebenso aus b wie b aus a. Zu dieser Definition der Gleichheit muss aber noch nothwendig hinzutreten die Bedingung, dass wenn $a=b$ und $b=c$, so soll auch $a=c$ sein; denn hat man z. B. zwei gleiche aber entgegengesetzte gerade Linien, so ist offenbar die erste aus der 2ten auf dieselbe Weise entstanden, wie die 2te aus der 1ten, und doch sind sie nicht gleich; folglich ist der Zusatz nothwendige Bedingung.

Haben wir zwei Grössen a, b so kön̄en wir sie so umwandeln, dass sie ein Vielfaches eines einzigen Elementes sind; ist dann a dasselbe Vielfache des Elementes wie b, so ist $a=b$. Aus diesem Begriffe der Gleichheit folgt unmittelbar der der Ungleichheit, wo $a \gtrless b$, je nachdem a ein grösseres oder kleineres Vielfaches desselben Elementes ist wie b. Auch hier gilt der Satz, dass wenn $a>b$, $b>c$ dass dann auch $a>c$ ist; dies ist leicht zu beweisen, wenn man alle 3 Grössen durch dasselbe Element ausdrückt.

Nach diesen Definitionen der Gleichheit und Ungleichheit kann man mit den Grössen operiren, wobei natürlich auch wieder die oben als nothwendig entwickelten

Gesetze gelten.

Zahlengrössen die aus unendlicher Anzahl von Elementen bestehen.

Die im vorigen Abschnitte gegebenen Definitionen und Begriffe sind vollständig ausreichend, sobald man mit Grössen zu thun hat, die aus einer endlichen Anzahl von Elementen zusamengesetzt sind. Wir kōnen uns aber Zahlengrössen bilden, die aus einer unendlichen Reihe von Elementen bestehen und nun wollen wir uns mit solchen Zahlengrössen beschäftigen.

Die 1te Frage, welche hier auftaucht ist die, ob zwei solche Zahlengrössen überhaupt vergleichbar sind, d. h. ob Zahlengrössen die aus unendlichen Reihen von Elementen bestehen überhaupt in Zusamenhang gebracht werden kōnen. Natürlich müssen die Reihen Sinn haben und nach einem bestimten Gesetze gebildet sein, was auch die Definition der Zahlengrösse verlangt. Offenbar bleibt hierbei der Satz bestehen, dass 2 solche Zahlengrössen einander gleich sind, wenn die eine in die andere durch Transformation übergeht. Diese Transformation ist aber bei den unendlichen Reihen nicht ausführbar, daher müssen wir hier eine andere Definition ~~(solcher)~~ der Gleichheit solcher Zahlengrössen geben. Ich nehme aus der Reihe a eine bestimte Anzahl von Elementen, c heraus, und nēne dies Bestandtheil von a. Ich sage wenn c ist ein

Bestandtheil von b, dass c in b enthalten ist.

t. Wenn nun jeder Bestandtheil von a auch ein Bestandtheil von b ist und umgekehrt, so ist $a=b$ und $b=a$. Ist $a=b$ und $b=c$, so ist dann auch $a=c$. Um das letztere zu beweisen verfahren wir folgendermassen. Ist e ein Bestandtheil von a und b, so kann ich c, weil $c=b$, so transformiren, dass e auch ein Bestandtheil von c ist. Da nun $a=b$, so muss jeder Bestandtheil von a zugleich ein Bestandtheil von b sein und umgekehrt. Nun ist jeder Bestandtheil von c auch ein Bestandtheil von b, da ja $b=c$ und umgekehrt. Demnach ist auch jeder Bestandtheil von a zugleich ein Bestandtheil von c, und umgekehrt d. h. $a=c$, w. z. b. w.

Hieraus gelangen wir ohne weiteres auf den Begriff der Ungleichheit zweier solchen Zahlengrössen. Wenn $a>b$ ist, so kann man beweisen, dass jeder Bestandtheil c von b in a enthalten ist, aber nicht alle Bestandtheile von a in b. Auch hier gilt dann der Satz, dass wenn

$$a \gtrless b\,,\; b \gtrless c\,,\text{ dass auch } a \gtrless c \text{ ist.}$$

Mit der Aufstellung dieser Definitionen beseitigt man die Schwierigkeiten, welche die irrationalen Grössen darbieten; wir brauchen hier gar keinen Begriff von Grenze haben und doch sind hiermit alle irrationalen Grössen definirt. Auch sieht man aus Allemdem, dass Zahlengrössen mit unendlich vielen Elementen, Grössen gleich sein können, die aus endlicher Anzahl von Elementen zusammengesetzt sind z. B.

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\cdots \text{ in inf.}$$

Die Addition solcher Zahlengrössen kann formell nach den allgemeinen Regeln der Addition ausgeführt werden, sobald jedes Element nur in endlicher Anzahl vorkomt. Dies ist aber auch nur der zu ~~(bestimmende)~~ betrachtende Fall, da sonst die Resultirende Grösse unbestimt wäre. Nun bietet sich zunächst folgender Satz dar.

Wenn $a' = a$ und $b' = b$ so ist auch

$$a' + b' = a + b.$$

Dieser Satz ist nicht selbstverständlich, da er weder aus der Definition der Addition noch der Zahlengrössen mit unendlich vielen Elementen, er muss also für diese Zahlengrössen bewiesen werden. Vorher wollen wir andere Sätze beweisen, aus denen der obige Satz fliessen wird.

Nehmen wir 2 Grössen a, b wobei wir voraussetzen dass $a > b$ ist, so giebt es Zahlen c, die aus endlicher Anzahl von Elementen bestehen und in a, nicht aber in b enthalten sind. Mit anderen Worten wie ich auch b verändere, so kome ich doch nie zu einer Grösse $b' = b$, so dass b' alle Elemente von c enthält. Die Veränderungen der Zahlengrösse sind nun zweierlei Art. Ich ersetze entweder ein Element durch mehrere diesem aequivalente, oder ich ersetze mehrere Elemente durch eins ihnen aequivalentes Element. Verändere ich b auf eine der Arten in b', indem ich z. B. für mehrere Elemente die ihnen aequivalente einführe, so wird b und b' noch in unendlich vielen Elementen übereinstimen, da ich ja nur eine endliche Anzahl von Elementen in b verändern kann. Setze ich aus b' wieder eine Grösse b'' durch Veränderung der Elemente, so wird b' mit b'' unendlich viele Elemente gemein haben, folglich auch wird b und b'' unendlich viele Elemente gemein haben u. s. f. Denken wir uns nun aus b' aus b hergeleitet durch irgend eine Transformation und zerlegen b' in 2 Aggregate, nämlich in die Zahl b'_1 und b_2 wo b_2 die mit b unendlich viele gemeinsamen Elemente enthält, so dass wir setzen:

$$b' = b'_1, b_2$$
$$b = b_1, b_2.$$

Alsdann muss $b_1 < c$, wo c eine Zahlengrösse ist die aus endlicher Anzahl von Elementen besteht und nicht in b enthalten ist. Wäre nämlich b_1 nicht in c enthalten, so müsste

$$b_1 \geqq c \text{ sein.}$$

Wäre aber $b_1 = c$, so könnten wir b so transformiren, dass $b = c, b_2$ also würde b die Zahl c enthalten, was gegen die Voraussetzung ist.

Wäre $b_1 > c$, so würde auch

$$b > c \text{ sein also } c \text{ in } b \text{ enthalten,}$$

was unmöglich ist der Voraussetzung gemäss.

Was von b_1 gilt das gilt auch von b'_1; denn est ist $b = b'$ also $b'_1, b_2 = b_1, b_2$ folglich auch

$$b'_1 = b_1$$

Also jeder Bestandtheil von b_1 ist auch ein Bestandtheil von b'_1. Wir können also durch keine Transformation dazu gelangen dass die transformirte Grösse b' alle

Elemente von c enthalte.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt.

Wenn wir 2 Zahlengrössen haben a, b und können wir eine Zahl c finden, ~~welche~~ die aus endlicher Anzahl von Elementen besteht, die wohl in a, nicht aber in b enthalten ist, so muss $a > b$ sein. Um dies nachzuweisen, haben wir nur zu zeigen, dass es durch keine Transformation von b möglich ist ein b′ zu bilden, dass dieses b′ c enthalte. Wir denken uns aus b hergeleitet $b' = b$. Und nun zerlegen wir sowohl b als auch b′ in 2 Aggregate, von denen eins die unendlich vielen b und b′ gemeinsamen Elemente enthält, das andere aber endliche Anzahl von Elementen enthält

$$b = b_1 , b_2$$

$$b' = b_1' , b_2 .$$

Nun hat b und b′ unendlich viele Elemente gemein und b_1 besteht aus endlicher Anzahl von Elementen, es muss also auch b′ und b_2 unendlich viele Elemente gemein haben, welche Zahl wir mit b_4 bezeichnen; alsdann ist

$$b_1 , b_2 = b_1 , b_3 , b_4$$

$$b' = b_5 , b_4$$

Nehmen wir nun an, dass b′ enthalte c, so hätten wir $b' = c, b''$ und enthält b′ unendlich viele Elemente die auch in b vorkomen, demnach muss auch b″ unendlich viele Elemente mit b gemein haben; diese setzen wir gleich b_2'' und die anderen von b′ gleich b_1'' so dass wir zunächst haben

$b' = c_1 , b_1'' , b_2''$. Es ist aber auch

$b = b_6 , b_2''$ da aber

$b = b'$ so muss

$c, b_1'', b_2'' = b_6, b_2''$ oder

$c, b_1'' = b_6$ Es müsste also c entweder kleiner oder gleich sein b_6 d. h. es wäre c in b enthalten sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Haben wir also $a > b$, so ist jedes aus b gebildetes Elementenaggregat in a enthalten.

Können wir also zeigen, dass jedes aus den Elementen von b gebildetes Aggregat in a enthalten ist, so kann $a \geqq b$ sein. Nämlich wenn $a < b$ wäre, so wä-
it re ja nach dem bewiesenen Satze jedes aus den Elemen-
heit. ten von a gebildetes Aggregat in b enthalten sein. Hieraus folgt also der Begriff der Gleichheit und Ungleichheit solcher Zahlengrössen in seinem ganzen Lichte hervor. Wenn jeder Bestandtheil von b in a und jeder Bestandtheil von a in b enthalten ist, so ist a gleich b.

Nunmehr können wir sofort folgenden Satz beweisen: Wenn wir 2 Zahlenpaare $a'b$, ab haben und wissen, dass

$$a' > a$$
$$b' > b \quad \text{so ist dann auch}$$
$$a' + b' > a + b.$$

Da $a' > a$ so können wir einen Bestandtheil von a' finden, a'' der aus endlicher Anzahl von Elementen besteht und nicht in a enthalten ist, ebenso in b'.

Wir haben also

$$a' > a'' > a$$
$$b' > b'' > b$$

Da nun $a'' > a$, so ist jeder Bestandtheil α von a in a'' enthalten, ebenso β in b''.

Es ist aber auch

$$a' = a'', a'''$$
$$b' = b'', b''' \quad \text{und}$$

$$a'' = \alpha, a^{IV}$$
$$b'' = \beta, b^{IV}$$

Es wird also in der Summe

$a'' + b''$ jedenfalls jeder Bestandtheil von a, b vorkommen, so dass wir haben

$$a'' + b'' \geqq a + b.$$

Da aber $a' + b' > a'' + b''$ da ja $a'' + b''$ nicht alle Bestandtheile von $a' + b'$ enthält, so folgt

$$a' + b' > a + b.$$

Dieser Satz lässt sich ausdehnen auf beliebig viele Zahlengrössen. Wenn

$$a' > a$$
$$b' > b$$
$$c' > c \quad \text{so ist auch}$$

$$a' + b' + c' + \ldots > a + b + c + \ldots$$

Damit können wir nun einen überaus wichtigen Satz beweisen.

Wenn eine Zahlengrösse einen endlichen Werth hat, so kann man dieselbe stets in 2 andere zerlegen, die eine aus einer endlichen Anzahl von Elementen, die andere aus unendlich vielen Elementen bestehend, so dass die 2^{te} Zahl kleiner ist als eine beliebig gewählte Grösse α.

Die zu betrachtende Zahl sei a und die beliebig gewählte Zahl sei α. Da wir α kleiner als a voraussetzen, so wird α in a enthalten sein. Es kann aber auch Vielfaches von α in a enthalten sein. Dasjenige Vielfache von α, welches noch in a enthalten ist sei β, so haben wir

$$\beta + \alpha \geqq a.$$

Es muss also a transformirt werden können, so dass die transformirte Zahl, die Zahl β enthält.

Wir haben $\quad a = \beta, a'$

Da wir nun α aus endlicher Anzahl von Elementen bestehend annehmen können, so wird auch β aus endlicher Anzahl von Elementen bestehen. Nach dieser Transformation hat a' mit a noch unendlich viele Elemente gemein, und die Zahl, welche diese letzteren darstellen, sei a_2, so können wir setzen:

$$a = a_1, a_2$$
$$a' = a_3, a_2$$ Wegen 2 haben wir

$$a = \beta, a_3, a_2$$ aber auch
$$a = a_1, a_2$$ Daraus folgt

$$a_1, a_2 = \beta, a_3, a_2 \quad \text{also wegen } 1: \qquad 4.$$

$$\alpha + \beta \geqq \beta, a_3 a_2 \quad \text{oder}$$

$$\alpha \geqq a_3, a_2$$

Also wird das Aggregat von den unendlich vielen Elementen a_3, a_2 der Zahl a nicht grösser sein als α.

Wenn wir also eine endliche Zahlengrösse haben, die aus unendlich vielen Elementen besteht, können wir stets eine endliche Anzahl von Elementen dieser Zahl herausheben, so dass der übrige Theil kleiner ist als eine beliebige Grösse α.

Diesen Satz kann man anwenden um zu entscheiden, ob eine aus unendlich vielen Elementen bestehende Zahl einen endlichen Werth hat.

Jetzt können wir alle Sätze über das Addiren und Multipliciren der hier betrachteten Zahlengrössen mit aller Strenge nachweisen.

Satz. Wenn $a' = a$, $b' = b$, dann ist auch

$$a' + b' = a + b.$$

Diesen Satz kann man mittelst aller Kriterien der Gleichheit nachweisen. Zunächst nehmen wir irgend ein Element α und dieses sei in a n mal in b n' mal enthalten; dann ist

$$a = n\alpha + \beta \text{ und}$$

$$b = n'\alpha + \gamma$$

wo $n\alpha$, $n'\alpha$ nichts weiter bedeuten soll, als dass das Element n, n' mal vorkommt. Da nun dieses in a nur n mal vorkomt, so muss

$\alpha > \beta$ und ebenso

$\alpha > \gamma$.

In der Sume $a+b$ wird also das Element α wenigstens $(n+n')$ mal enthalten sein, d. h. es ist

$$a+b = (n+n')\alpha + (\beta+\gamma)$$

Da nun $a = a'$ und $b = b'$ so komt das Element α resp. in a' und b' ebenfalls n, n' mal vor.
Also in der Sume $a'+b'$ wird es wenigstens $(n+n')$ mal vorkomen, so dass wir haben

$$a'+b' = (n+n')\alpha + (\beta'+\gamma').$$

Nun ist klar, dass das Element α in $a'+b'$ weder mehr noch weniger oft vorkomen darf, als in $a+b$; denn wäre es der Fall, so müsste in einem von den Zahlen a, a'; b, b' öfter vorkomen, was unmöglich ist. Jeder Bestandtheil von $a+b$ ist also in $a'+b'$ enthalten und umgekehrt, folglich ist $a+b = a'+b'$.
Man kann aber den Beweis auch so liefern.
Wenn wir $a+b$ so bilden, dass wir die Elemente von a mit denen von b vereinigen, so nehmen wir aus dieser neuen Zahl, die Elemente a_1+b_1 heraus beliebig

und in endlicher Anzahl. Da nun $a' = a$, so kann man a' umwandeln so dass es die Elemente a_1, die aus a stamen enthält; also wird man haben

$$a' = a_1 + a_1' \quad \text{ebenso}$$
$$b' = b_1 + b_1'$$

Folglich wird die Sume $a'+b'$ die Elemente $a_1 + b_1$ sicher enthalten. Dasselbe gilt offenbar umgekehrt. Die Sume $a+b$ hat also dieselben Bestandtheile wie $a'+b'$ und umgekehrt, d. h. es ist

$$a'+b' = a+b.$$

Bis jetzt haben wir nur endliche Anzahl von Zahlengrössen betrachtet, die selbst aus unendlicher Anzahl von Elementen bestehen. Jetzt wollen wir untersuchen, ob wir nicht aus unendlich vielen Zahlengrössen dieser Art Sumen bilden könen. Denken wir uns eine unendliche Reihe von Zahlen <u>U,</u> <u>viel</u>

$$a, a', a'', \ldots$$

wo $a, a', a'', \ldots$ aus unendlich vielen Elementen bestehen und es ist die Frage, ob man diese Zahlen addiren kann. Dass wir in der Arithmetik auf solche Untersuchungen stossen, zeigt folgendes Exemplum. Denken wir uns 2 Zahlengrössen die resp. aus den unendlich vielen Elementen

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \ldots$$
$$1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{27},\ \ldots$$

bestehen. Von beiden können wir leicht zeigen, dass sie endlich sind. Denken wir uns die beiden Reihen mit einander multiplicirt, so bekommen wir

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \dots$$
$$\tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{12},\ \tfrac{1}{24},\ \dots$$
$$\tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{18},\ \tfrac{1}{36},\ \tfrac{1}{72},\ \dots$$
$$\tfrac{1}{27},\ \tfrac{1}{54},\ \tfrac{1}{108},\ \tfrac{1}{216},\ \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Die Elemente jeder Horizontalreihe mögen nun eine Zahlengrösse bilden. Auf diese Weise erhalten wir unendlich viele Zahlengrössen, aus unendlich vielen Elementen bestehend. Lässt sich nun hierauf der Begriff der Summation anwenden?

2. Haben wir nun solche Zahlen

$$a,\ a',\ a'',\ \dots$$

so ist die nothwendige Bedingung der Möglichkeit der Sumation, dass jedes Element in den Zahlen $a, a', \dots$ nur in endlicher Anzahl vorkomt; d. h. jedes Element darf nicht in unendlich vielen dieser Zahlen vorkomen und in denen es vorkomt, muss in endlicher Anzahl vorhanden sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die formelle, begriffliche Sumation möglich, da man imer je eine Zahl finden kann, die jedes Element so oft enthält, als es in den Zahlen $a, a', \dots$ vorkomt.
Haben wir nun die formelle Sumation ausgeführt, so handelt es sich darum, wann die Summe endlich

ist. Damit das Resultat der Sumation endlich sei, ist nothwendig, dass die Zahlen $a, a', a'', \ldots$ selbst endlich bleiben. Nehme ich also beliebige von den z. B. in a vorkomenden Elementen, so muss die aus ihnen gebildete Zahl unterhalb einer angebbaren endlichen Grenze liegen. Dies ist offenbar in unserem Beispiele erfüllt. Ist nun die ganze Summe Σa endlich, so muss es stets eine ganze Zahl g geben, welche grösser ist als eine beliebige aus beliebig vielen der Zahlen a gebildete Zahl, welche wir mit $\Sigma' a$ bezeichnen. Es ist also

$$g > \Sigma' a.$$

Denken wir uns nun die formelle Sumation ausgeführt, und heben aus der Summe die Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ heraus. Man kann nun aus $a, a', a'', \ldots$ gerade diejenigen herauszählen, welche gerade die Elemente $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ geliefert haben. Diese seien $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Nun ist offenbar die aus den Elementen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gebildete Zahl kleiner als $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

also $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) < a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

Wegen $g > \Sigma' a$ ist also

$$(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) < g.$$

Die aus den Elementen $\alpha, \beta, \ldots$ gebildete Zahl ist also kleiner als eine ganze endliche Zahl g. Demnach muss jedes der hervorgehobenen Elemente $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ in endlicher Anzahl vorkomen. Die Bedingung der Endlichkeit der Sume Σa oder was dasselbe ist die Bedingung $g > \Sigma' a$ erfüllt somit gleich die Bedingung der formellen Sumation.

Die Möglichkeit des Addirens und die Endlichkeit der Sume ist ausgesprochen in der Bedingung

$$g > \Sigma' a.$$

Nun gilt für gewöhnliche Sumen das Gesetz. Man kann sämtliche Sumanden mehrerer Sumen in einem einzigen vereinigen und das Resultat bleibt dasselbe. Wir wollen dieses Gesetz auch bei unseren Zahlengrössen prüfen. Denken wir uns zwei Zahlen zunächst b und b', wobei jedes b, b' aus unendlich vielen Gliedern bestehen möge. Es sei

$$b = \Sigma a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$
$$b' = \Sigma a' = a'_1 + a'_2 + a'_3 + \ldots$$

und diese Sumen seien endlich. Um nun die Sume $b+b'$ zu bilden nach der Definition des Addirens, müssten wir alle Elemente aufsuchen, die in Σa, $\Sigma a'$ vorkommen und dann eine Zahl bilden, in welcher jedes Element so oft vorkomt, wie in allen $a_1, a_2, a_3, \ldots a'_1, a'_2, a'_3 \ldots$ Wir wollen nun zeigen, dass wir die Sume $b+b'$ auch so bilden können, indem wir die Elemente von einzelnen a's zu einander addiren also z. B. auf folgende

Weise
$$b+b' = (a_1+a_1')+(a_2+a_2')+\dots$$
Nehme ich nun irgend ein Element α und suche wie oft es in Σa, $\Sigma a'$ vorkomt. Wenn nun das Element α in allen $a_1, a_2 \dots$ n mal und in allen $a_1', a_2' \dots$ n' mal vorkomt, so wird es in $\Sigma a + \Sigma a'$ $(n+n')$ mal vorkomen. Suche ich nun dasselbe Element in

$b+b' = (a_1+a_1')+\dots$ auf, so wird es mehrere von diesen Gliedern
$$(a_1+a_1'),\ (a_2+a_2'),\ \dots$$
geben, in denen es vorkomt; es kann aber nur in einigen derselben vorkomen. In diesen muss es aber genau $(n+n')$ mal vorkomen. Also wird jedes Element α so oft in der Sume $\Sigma a+\Sigma a'$ vorkomen, als es in der Sume

$(a_1+a_1')+\dots$ vorkomt; folglich muss
$$\Sigma a + \Sigma a' = (a_1+a_1')+\dots$$
Beide Methoden der Sumation führen also zu demselben Resultate. Es ist auch klar, dass die Sume $b+b'$ einen Sinn hat, wenn
$$\Sigma a < g\,,\ \Sigma a' < g' \text{ ist.}$$

Diesen Satz können wir erweitern auf unendlich viele Sumanden
$$b,\ b',\ b'',\ \dots$$
von denen jeder aus unendlich vielen Gliedern besteht
$$\begin{aligned} b &= \Sigma a \\ b' &= \Sigma a' \\ b'' &= \Sigma a'' \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Sobald Σb endlich ist, so können wir nach dem früher bewiesenen Satze die Sumation formell bilden (durch Aufsuchen der Elemente). Man kann sie aber auch so ausführen, dass man die Sumanden von b zu einer Sume, die von b' zu einer zweiten u. s. f. vereinigen. Es handelt sich nun darum, ob wir durch jede beliebige Sumationsordnung zu demselben Resultate gelangen, vorausgesetzt natürlich, dass die Summe überhaupt noch einen Sinn hat, d. h. endlich ist. Diesen Satz wollen wir aus einem anderen Gesichtspunkte auffassen und beweisen.

g Wir denken uns eine Sume von unendlich vielen
en Gliedern, die einen endlichen Werth hat. Wir könen die
pen. Glieder derselben nach einem beliebigen Gesetze auf unendlich viele Arten in Gruppen theilen, wobei auch in jede einzelne Gruppe unendlich viele Glieder komen können und es unendlich viele Gruppen giebt. Um Beispiel anzuführen, denken wir uns die Potenzreihe $x^\lambda y^\mu$ für $x < 1$ $y < 1$; so können wir die Glieder z. B. so in Gruppen theilen, dass in jede Gruppe diejenigen Glieder komen, für welche die Summe der Exponenten $\lambda + \mu = 0, 1, 2, \dots$ oder auch so, dass alle diejenigen Glieder für welche $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ zu der 1ten, 2ten, 3ten.. Gruppe gehören u. s. f.

Hat nun die ganze Sume einen endlichen Werth, so wird auch jede Gruppe einen endlichen Werth haben müssen. Es sei nun die ursprüngliche Zahlenreihe Σc. Diese c zerlege ich in Gruppen. Jede einzelne Gruppe hat einen endlichen Werth, da die Summe von beliebig vielen der c kleiner ist als g. Bezeichne ich die Theilsumen, die Gruppen mit $a, a', a'', \ldots$

Zunächst sehen wir dass die Summe

$$a + a' + a'' + \ldots$$

einen endlichen Werth hat und wir wollen zeigen, dass sie der ursprünglichen Σc gleich ist.

Nehmen wir irgend ein Element α und es kome in Σc n mal vor. Da dieses α nur in endlicher Anzahl von c vorkomt, so wird es auch in endlicher Anzahl von den a's vorkomen und zählen wir, wie oft es in $a+a'+a''+\ldots$ vorkomt, so sehen wir, dass es darin genau so viel mal vorkomt, wie in Σc. Also ist

$$\Sigma c = a + a' + a'' + \ldots$$

Wenn ich eine andere Gruppeneintheilung mache, so ist auch

$$\Sigma c = b + b' + b'' + \ldots$$

Wie man also auch die Eintheilung macht, bekomt man stets dieselbe Sume.

Diesen Satz könen wir folgendermassen aussprechen.

Wenn wir eine unendliche Anzahl von Zahlen haben, und kōnen beweisen, dass die Summe derselben endlich ist, so kōnen wir die Glieder der unendlichen Reihe beliebig in Gruppen ordnen und dann die Gruppen zu einander addiren und die Sume derselben bleibt imer dieselbe. Als unmittelbare Umkehrung dieses Satzes ergiebt sich folgender. Wenn wir eine unendliche Anzahl von Sumen haben und kōnen nachweisen, dass die Sume derselben endlich ist, so kann man die Sumen so addiren, dass man die Sumanden der einzelnen Sumen sumirt und dann die sich hieraus ergebenden Glieder addirt. Dies ist aber nichts weiter als der Satz, dass wenn

$$b = \Sigma a$$
$$b' = \Sigma a'$$
$$b'' = \Sigma a'' \ldots$$ und Σb endlich ist, dass dan

$$b + b' + b'' + \ldots = \Sigma a + \Sigma a' + \Sigma a'' + \ldots$$

Alle diese Sätze über die Sumation von unendlich vielen Sumen ergeben sich hier sehr einfach. Sie sind auch in der That unmittelbare Folge der Definitionen gewesen. Dies gilt natürlich nur dann, wenn wir solche Zahlengrössen in Betracht ziehen, welche wir hier untersucht haben, wobei nur eine Grundeinheit vorkam. Kommen aber mehrere Grundeinheiten vor (z. B. negative Zahlen), so muss man mit diesen Sätzen vorsichtig sein, wie wir es später sehen werden. Diese Sätze sind überaus wichtig und leisten vorzügliche Dienste bei der Umformung der arithmetischen Ausdrücke.

Aus der Arithmetik wissen wir, dass wir jede Zahl in Form eines Decimalbruches darstellen können. Hierbei bestimmen wir die Elemente der Zahl, nämlich,

$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$ und die Anzahl des Vorkommens, welche zwischen 0 und 9 liegt. Stellen wir 2 Zahlen in dieser Form dar und sollen sie aequivalent sein, so ist dies nur dann möglich, wenn zwischen den Darstellungen Identität stattfindet.

Wir werden nun allgemein zeigen, dass man alle Zahlengrössen so darstellen kann, dass in ihnen nur vorgeschriebene Elemente vorkommen. Wenn wir alsdann 2 aequivalente Zahlen durch dieselben vorgeschriebenen Elemente darstellen, so wird sich die Aequivalenz in Identität verwandeln müssen. Wählen wir eine Reihe von ganzen wachsenden Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ und bilden die Elemente so, dass sie die a's zu Nennern haben, so werden diese Elemente zur Bildung der Zahlengrössen ausreichen.

Bevor wir diesen Satz nachweisen, wollen wir noch eine merkwürdige Eigenschaft der Zahlengrössen zeigen.

Wir haben festgestellt was es heisst, ein Element α ist in einer Zahl a n mal enthalten. Das heisst nichts weiter, als dass es möglich ist a so zu transformiren, dass das Element in der transformirten Zahl $a'=a$ genau n und nicht $(n+1)$ mal vorkommt. Dann waren 2 Zahlen gleich, wenn in ihnen dasselbe beliebige Element gleich oft vorkomt.

Nun nehmen wir ein Element $\alpha = \frac{1}{g}$.

Dieses sei in a enthalten n mal. Alsdann köñen wir das a so transformiren, dass wir haben

$$a = n\alpha + a'$$

wo $n\alpha$ der Kürze wegen für $\alpha + \alpha + \alpha \ldots (n)$ gesetzt ist. Wenn ich nun das g fache von a nehme, das heisst wenn ich jedes Element von a g mal nehme, dann ist in dem g fachen von a die Eins auch n mal enthalten. Wenn man also prüfen will, wie oft das Element $\alpha = \frac{1}{g}$ in a enthalten ist, so kann man untersuchen wie oft die Eins in ~~ganz~~ dem g fachen von a enthalten ist. Dieser Satz kann auch umgekehrt werden.

Wenn wir nun eine Zahlengrösse a vor uns haben und prüfen wie oft die Eins in ~~dem~~ a, dann in dem 2fachen von a, dann in dem 3fachen von a u.s.f.

vorkommt, so ergiebt sich eine Reihe von ganzen Zahlen: $n_1, n_2, n_3 \ldots$, welche angeben wie oft die Eins in a, $2.a$, $3.a$, … oder was dasselbe ist, wie oft das Element $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ in a vorkomt. Haben wir eine Zahlengrösse a gegeben, so ist auch begrifflich die Zahlenreihe $n_1, n_2\ n_3 \ldots$ gegeben. Wir sagen absichtlich, dass mit der Vorstellung einer Zahl die ganzen Zahlen $n_1, n_2 \ldots$ begrifflich feststehen, weil es Fälle giebt, wo man diese Zahlen nicht bestimmen kann, z. B. wenn wir nehmen

$$a = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Wenn umgekehrt für irgend eine nicht gegebene Zahlengrösse die Zahlen $n_1, n_2 \ldots$ gegeben sind, dann ist die Zahl selbst definirt und man kann sie wirklich bilden.

Haben wir nun 2 Zahlen a, b von denen wir wissen, dass $a = b$; ferner seien für beide Zahlen die Zahlenreihen

$$n_1,\ n_2\ \ n_3 \ldots$$
$$n'_1\ \ n'_2\ \ n'_3 \ldots$$

ermittelt, so müssen die Zahlenreihen identisch sein. Denn es giebt allgemein n_r an wie oft das Element $\frac{1}{r}$ in a vorkommt, und n'_r wie oft dasselbe Element in b vorkommt. Wäre nicht $n_r = n'_r$ so könnte auch nicht $a = b$ sein.

Zwei Zahlen sind also aequivalent wenn die Zahlenreihen

$$n_1 \; n_2 \; n_3 \dots$$
$$n'_1 \; n'_2 \; n'_3 \dots$$

identisch sind. Sind die Zahlenreihen nicht identisch, dann können nicht die Zahlen gleich sein. Es seien die ersten nicht übereinstimmenden Zahlen von den n,

$$n_r \text{ u. } n'_r \text{ und es sei } n_r > n'_r,$$

so komt das Element $\frac{1}{r}$ in der ersten Zahl öfter vor als in der zweiten. Hieraus folgt der Begriff der Ungleichheit zweier Zahlen.

Bei der Prüfung der Gleichheit zweier Zahlengrössen nach dieser Methode ist es nicht nöthig die Uebereinstimung für alle diese Zahlen n zu zeigen; es reicht aus nur für beliebig ausgewählte dieser Zahlen, doch unendlich viele, die Uebereinstimung zu zeigen. Kurzum bei der Untersuchung der Gleichheit zweier Zahlen kann ich die Reihe der Elemente willkürlich wählen nach einem beliebigen Gesetze, und für diese die Zahlen n bestimmen; und wenn für unendlich viele dieser willkürlich gewählten Elemente die Uebereinstimmung der Zahlen n stattfindet, so sind beide Zahlengrössen gleich. Ich nehme eine Reihe von ganzen wachsenden Zahlen an nach einem bestimmten Gesetze; diese seien

$$g_1 \quad g_2 \quad g_3 \ldots\ldots$$

bilde die Elemente

$$\frac{1}{g_1} \quad \frac{1}{g_2} \quad \frac{1}{g_3} \ldots\ldots$$

und untersuche wie oft jedes dieser Elemente in a und dann in b vorkommt. Die Zahlen welche angeben wie oft $\frac{1}{g_1}$ $\frac{1}{g_2}$ ... in a vorkommt mögen sein

$$h_1 \quad h_2 \quad h_3 \ldots\ldots$$

Diese Zahlen sind natürlich unter den Zahlen $n_1\ n_2\ n_3\ldots$ enthalten. Nun sage ich wenn a u. b übereinstimmen sollen, so müssen sie in allen Zahlen $h_1\ h_2\ldots$ übereinstimmen. Wenn sie aber auch nur in diesen Zahlen übereinstimmen, so sind sie einander gleich, d.h $a = b$. Das erste ergiebt sich ohne weiteres. Das umgekehrte zeigen wir indem wir nachweisen, dass alsdann a weder kleiner noch grösser sein kann als b.

Angenommen es wäre $b > a$, so können wir eine aus endlicher Anzahl von Elementen bestehende Zahl c fin=

den, so dass

$$b > c > a \text{ ist.}$$

Man kann nun stets das c so transformiren, dass es ein Vielfaches von einem Elemente z. B. von $\frac{1}{g}$ sei; es sei das κ fache von $\frac{1}{g}$

$$\text{also} \quad c = \kappa_1 \cdot \frac{1}{g'}.$$

Nehmen wir eine zweite Grösse c' so dass

$b > c' > a$, so können wir sie ebenfalls auf die Form bringen

$c' = \kappa_2 \cdot \frac{1}{g''}$ oder denken wir uns beide auf gleichen Nenner gebracht, so können wir setzen

$$c = \kappa \cdot \frac{1}{g}$$

$c' = \kappa' \cdot \frac{1}{g}$ wobei wir die c so bestimen kömen dass κ nicht gleich κ' ist. Nun wählen wir eins der g_λ so an, dass das Element $\frac{1}{g_\lambda}$ nicht in beiden gleich oft vorkommt, was möglich ist sobald

$$\frac{1}{g_\lambda} < \frac{1}{g} \text{ ist.}$$

Nun sei das Vielfache von $\frac{1}{g_\lambda}$ welches in c vorkommt $h''_\lambda \cdot \frac{1}{g_\lambda}$ so haben wir sicher

$$b > h''_\lambda \cdot \frac{1}{g_\lambda} > a$$

Nun sei $\quad b = h'_\lambda \cdot \frac{1}{g_\lambda} + b'$

$a = h_\lambda \cdot \frac{1}{g_\lambda} + a'$, so haben wir

$$h'_\lambda \cdot \frac{1}{g_\lambda} + b' > h''_\lambda \cdot \frac{1}{g_\lambda} > h_\lambda \cdot \frac{1}{g_\lambda} + a' \quad \text{also}$$

$$h''_\lambda > h_\lambda \quad \text{und}$$

$$h_1'' < h_1' + 1 \quad \text{oder}$$
$$h_1' > h_1'' - 1 \quad \text{also}$$
$$h_1' \geqq h_1'' \quad \text{Da nun}$$
$$h_1'' > h_1 \quad \text{und}$$
$$h_1' \geqq h_1'' \quad \text{so ist sicher}$$
$$h_1' > h_1 .$$

Wenn also die Zahlen a u. b nicht gleich sind, so muss es mal 2 Zahlen h_λ u. h_λ' geben, die nicht überein. stimmen. Dasselbe gilt, wenn wir $b < a$ annehmen. Da nun aber alle $h_1\ h_2 \ldots,\ h_1'\ h_2' \ldots$ übereinstim. men, so muss $a = b$. was zu beweisen war.

Der ganze Beweis beruht auf der Möglichkeit der An. nahme zweier Zahlen c u c' für $b > c > a$

$b > c' > a$ und

beide sollen aus endlicher Anzahl von Elementen bestehen; ferner die Eigenschaft haben, dass es kein Element $\left(\frac{1}{g_\lambda}\right)$ gibt, welches nicht in beiden gleich oft vor. kommt. Jetzt weisen wir unseren Satz nach, dass, wenn man eine beliebige Reihe von ganzen wachsen den Zahlen $a,\ a_1, \ldots$ bildet und die Elemente mit den Nennern $a,\ a_1, \ldots$ also $\frac{1}{a},\ \frac{1}{a_1} \ldots$ bildet, sich dann jede Zahlengröße durch diese Elemente darstellen lassen wird.

Wir wählen die Reihe der ganzen wachsenden Zahlen

$1, g, g^2, g^3 \dots$

~~da~~ wo jede folgende Zahl das g fache der vorangehenden ist und bilden die Elemente

1. $$1, \frac{1}{g}, \frac{1}{g^2}, \frac{1}{g^3}, \dots$$

und wollen zeigen, daß jede Zahlengröße a sich ~~aus~~ in der Form darstellen läßt

2 $$a = h_0 + h_1 \frac{1}{g} + h_2 \frac{1}{g^2} + h_3 \cdot \frac{1}{g^3} + \dots$$

mit der Bedingung, daß h_1, h_2 .. ganze Zahlen sind von 0 bis $g - 1$ inclusive also $0, 1, 2 \dots (g-1)$

Um diese Zahlen h zu bestimmen, verfahren wir folgendermaßen. Ich nehme ein Element z. B. $\frac{1}{g^\lambda}$ ~~aus g~~ heraus, und untersuche, wie oft es in a enthalten ist, oder ich untersuche, wie oft die Einheit in $g^\lambda a$ enthalten ist. Es sei gefunden:

3. $$g^\lambda \cdot a = h_\lambda + a'_\lambda, \quad a'_\lambda < 1$$

4 $$g^{\lambda+1} a = h_{\lambda+1} + a'_{\lambda+1}, \quad a'_{\lambda+1} < 1$$

Die 3 mit g vervielfacht, und mit 4 verglichen gibt

5 $$h_{\lambda+1} + a'_{\lambda+1} = g h_\lambda + g \cdot a'_\lambda$$

Also $h_{\lambda+1}$ $a'_{\lambda+1} > g h_\lambda$ also um so mehr.

6 $$h_{\lambda+1} + 1 > g h_\lambda$$

Ebenso folgt aus 5

$k_{\lambda+1} + a'_{\lambda+1} = g \cdot k_\lambda + g \cdot a'_\lambda$ daß

$k_{\lambda+1} < g\, k_\lambda + g \cdot a'_\lambda$ also um so mehr

$k_{\lambda+1} < g\, k_\lambda + g$ 7

Wir haben also die beiden ~~Ver~~ Ungleichungen

$k_{\lambda+1} + 1 > g\, k_\lambda$

$k_{\lambda+1} < g\, k_\lambda + g$ 8

Es folgt aber ~~nun~~ auch

$k_{\lambda+1} + a'_{\lambda+1} < g k_\lambda + g$ da $k_{\lambda+1}$, k_λ, g ganze

Zahlen sind, so wird man hieraus folgern daß

$k_{\lambda+1} + 1 \leqq g \cdot k_\lambda + g$ oder

$k_{\lambda+1} \leqq g\, k_\lambda + g - 1$ ist. 9

Wir beweisen nun folgendes, daß

$k_0 + k_1 \frac{1}{g} + \dots + k_\lambda \frac{1}{g^\lambda} < a$ und 10

$k_0 + k_1 \frac{1}{g} + \dots + (k_\lambda + 1) \frac{1}{g^\lambda} > a$

Denken wir uns den übrigen Rest von 2, der ~~..~~ bleibt nach

Abzug der ~~Größe~~ Glieder 10 und bezeichnen ihn mit

$s = k_{\lambda+1} \frac{1}{g^{\lambda+1}} + k_{\lambda+2} \frac{1}{g^{\lambda+2}} + \dots$ 11

Da nun jedes k höchstens $(g-1)$ sein darf, so haben wir

$s < (g-1)\left(\frac{1}{g^{\lambda+1}} + \frac{1}{g^{\lambda+2}} + \dots\right)$ 12

Nehme ich nun das $g^{\lambda+1}$ fache davon, indem ich jedes Element $g^{\lambda+1}$ mal nehme, so haben wir

$g^{\lambda+1} \cdot s < (g-1) + (g-1)\frac{1}{g} + (g-1)\frac{1}{g^2} + \dots$ 13

Den Werth der letzteren Summe aber können wir leicht finden. Es sei nämlich

$b = (g-1) + (g-1)\frac{1}{g} + (g-1)\frac{1}{g^2} + \dots$ dann ist das $g$fache hiervon

$gb = (g-1)g + (g-1) + (g-1)\frac{1}{g} + \dots$ hier wiederholt sich dasselbe, also haben wir

$gb = (g-1)g + b.$

Nehmen wir nun auf beiden Seiten $1.b$ weg so bleibt $(g-1)b = (g-1)g$ also

$$g = b.$$

Dies erhalten wir also durch eine einfache Transformation, ohne alle Rechnung. Wir haben

$g^{\lambda+1} s < g$ folglich ist das g^λfache von s kleiner als ~~s~~ 1 d.h.

$$g^\lambda s < 1,$$ also s kleiner als das Element

$\frac{1}{g^\lambda}$ d.h. $s < \frac{1}{g^\lambda}$

Habe ich also eine Zahl

$h_0 + h_1\frac{1}{g} + h_2\frac{1}{g^2} + \dots$

gebildet mit der Bedingung, daß die ganzen Zahlen $h_1\, h_2 \dots$ die Werthe zwischen 0 u. $(g-1)$ haben, so ist der Rest $s < \frac{1}{g^\lambda}$. Stellen wir nun, wenn a gegeben ist in irgend einer Form, es als ein Vielfaches von $\frac{1}{g^\lambda}$ so haben wir

$$a = n_\lambda \cdot \frac{1}{g^\lambda} + s \qquad 14$$

nun ist wenn wir das g^λfache von a nehmen

$$n_\lambda = h_0 g^\lambda + h_1 g^{\lambda-1} \dots + h_{\lambda-1} g + h_\lambda \text{ und wegen 10} \qquad 15$$

$a < (n_\lambda + 1)\frac{1}{g^\lambda}$ d. h. n_λ zeigt wie oft das Element $\frac{1}{g^\lambda}$ in a enthalten ist. Demnach haben wir

$n_\lambda = k_\lambda$ Wegen 15 ist also auch wenn wir dort für ~~zu~~ λ, $\lambda + 1$ setzen

$$k_{\lambda+1} = h_0 g^{\lambda+1} + h_1 g^\lambda \dots + h_\lambda g + h_\lambda \text{ oder auch}$$

$$k_{\lambda+1} = k_\lambda g + h_{\lambda+1} \qquad 16$$

Wenn a gegeben ist so sind die Zahlen

$k_1\ k_2 \dots$ begrifflich gegeben.

Nun stimmt ~~dem~~ Begriffe nach k_0 mit h_0 überein. Also ist

$$k_0 = h_0$$
$$k_1 = g h_0 + h_1 \qquad 17$$
$$k_2 = g k_1 + h_2$$

Wegen ~~8~~ 9 u. 16 hat man auch die Bedingung erfüllt dass $h_{\lambda+1} \leqq g - 1$ ~~sind~~ sei. 18

Somit sehen wir, dass die Darstellung einer in beliebiger Form dargestellten Zahlengrösse in der Form

$$a = h_0 + h_1 \frac{1}{g} + h_2 \frac{1}{g^2} + \dots \qquad 19$$

sich reducirt auf die Bestimmung der Zahlen

$k_0\ k_1\ k_2 \dots$

Auch ist ohne Weiteres klar, dass wenn die Elemente $\cancel{x}\ \frac{1}{g}, \frac{1}{g_2}, \cancel{x} \dots$ gegeben sind, dass die Darstellung in der verlangten Form nur auf eine Art möglich ist, denn da die beiden Darstellungen aequivalent sein sollen, so müssen die Zahlen k für beide dieselben sein, die Aequivalenz muss also Identität sein.

Dieser Satz gibt uns das erste Beispiel, dass eine aus endlicher Anzahl von Elementen bestehende ~~x~~ Zahl gleich sein kann einer Zahl, die aus unendlich vielen Elementen zusammengesetzt ist.

Man kann aber jede Zahl a auf verschiedenste Weise durch eine unendliche Anzahl von Elementen darstellen. So heben wir z. B. noch folgende Darstellung hervor, welche sich bei den Kettenbrüchen ergibt. ~~Es~~ Es seien

$$g, g_1\ g_2\ g_3 \dots$$

wachsende ganze Zahlen, bildet man hieraus die Elemente

$$\frac{1}{g}, \frac{1}{g_1 g_2}, \frac{1}{g_1 g_2 g_3}, \dots$$ so kann man jede Zahl auf die Form bringen:

$$a = g + \frac{1}{g} + \frac{1}{g_1 g_2} + \frac{1}{g_1 g_2 g_3} + \dots$$

Wenn die Zahlen $g_1 g_2 \dots$ gegeben sind, so kann man leicht nachweisen, dass die Reihe einen endlichen Werth hat. Man kann aber leicht umgekehrt nachweisen, dass wenn die Zahl a in einer beliebigen Form gegeben ist, dass man dann stets die $g_1 g_2 \dots$ finden kann, dass die Gleichheit

$a = g + \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_1 g_2} + \dots$ besteht:

Diese Darstellung ist besonders merkwürdig, da sie Irr.
auf den Begriff der irrationalen Zahlen führt. Bricht nämlich die Reihe nicht ab, sondern geht sie ins unendliche, so kann man leicht zeigen, dass die durch dieselbe dargestellte Zahl a die Eigenschaft hat, dass man kein Element mit einem endlichen Nenner finden kann, dessen Vielfaches die Zahl a wäre. Nehmen wir das Element mit dem Nenner $g_1 g_2 g_3 \dots$ und vervielfältigen wir die Zahl a, $g_1 \dots g_\mu$ mal, so erhalten wir nach Reduction $g_1 g_2 \dots g_\mu a = g g_1 \dots g_\mu + g g_2 g_3 \dots g_\mu + \dots + 1 + \frac{1}{g_{(\mu+1)}} + \frac{1}{g_{(\mu+1)} g_{(\mu+2)}} + \dots$

Von dem Reste können wir nun leicht nachweisen dass er kleiner ist als 1; denn es ist

$\frac{1}{g_{\mu+1}} + \frac{1}{g_{\mu+1} g_{\mu+2}} + \dots < \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \dots$ da aber

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots = 1$ so haben wir

$\frac{1}{g_{\lambda+1}} + \dots < 1$. Also ist

$g_1 g_2 \dots g_{\lambda} \cdot a = g + \delta$ wo g eine ganze Zahl und $\delta < 1$ ist.

Man kann also, sobald die Reihe nicht abbricht, kein Element finden, dessen genaues Vielfaches die Zahl a ergäbe.

Nehmen wir speciel an

$$g_1 = 1,\ g_2 = 2,\ g_3 = 3$$

so haben wir die Zahl

$$a = \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

Angenommen die Zahl wäre rational, so müsste sie sich darstellen als ein Vielfaches eines Elementes z. B. des Elementes $\frac{1}{1.2.3\dots n}$. Alsdann müßte

$1.2.3 \dots n.\, a = h'$ einer ganzen Zahl gleich sein, was nach dem obigen unmöglich ist. Demnach ist die durch die obige Reihe dargestellte Zahl irrational.

An diese Betrachtungen schliesst sich folgende Aufgabe. Es sind zwei Zahlengrößen a, b gegeben und es ist $a > b$. Man soll eine Zahl c darstellen sodaß $b + c = a$.

Die Zahlen a, b denken wir uns in der Form dargestellt,

$$a = h_0 + h_1 \frac{1}{g} + h_2 \cdot \frac{1}{g^2} + \dots$$
$$b = h_0' + h_1' \frac{1}{g} + h_2' \cdot \frac{1}{g^2} + \dots$$

Da $a > b$ so stimmen die Zahlen $k_0\ k_1 \ldots, k_1' \ldots$ nicht überein. Wir unter~~suchen~~scheiden nun hierbei 3 Fälle.

1) Es komme nur ein einziges Element öfter in a als in b; dieses Element sei $\frac{1}{g^\lambda}$. Alsdann stimmen beide Zahlenreihen

$$k_0, k_1, k_2 \ldots$$
$$k_0', k_1', \ldots$$

überein außer k_λ u k_λ' wofür $k_\lambda > k_\lambda'$. In diesem Falle koennen wir eine Zahl h finden, so daß

$b + h\frac{1}{g^\lambda} = a$, denn h ist diejenige Zahl, welche angibt, wie viel mal öfter das Element $\frac{1}{g^\lambda}$ in a als in b vorkommt. Alsdann ist

$$c = h \cdot \frac{1}{g^\lambda}$$

2) Es koennen mehrere Elemente vorhanden sein, welche in a öfter vorkommen als in b, und keine die in b öfter vorkommen als in a. Die Elemente, welche in a öfter vorkommen als in b. seien z. B.

$$\frac{1}{g^\lambda}, \frac{1}{g^{\lambda+\nu}}, \frac{1}{g^{\lambda+\mu}}, \ldots$$

Alsdann stimmen die Zahlen $k_0\ k_1 \ldots, k_0'\ k_1' \ldots$ überein, bis auf die Zahlen

$$k_\lambda, k_{\lambda+\nu}, k_{\lambda+\mu}, \ldots$$
$k_\lambda', k_{\lambda+\nu}', k_{\lambda+\mu}' \ldots$ und es ist hierbei
$$k_\lambda > k_\lambda'$$

$$k_{\lambda+\nu} > k'_{\lambda+\nu}$$
$$k_{\lambda+\mu} > k'_{\lambda+\mu}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Bezeichnen wir nun mit

$$k_\lambda, \; k_{\lambda+\nu}, \; k_{\lambda+\mu}$$

diejenigen Zahlen, welche angeben wie viel mal die entsprechenden Elemente in a öfter vorkommen als in b, so haben wir

$$b + k_\lambda \frac{1}{g^\lambda} + k_{\lambda+\nu} \cdot \frac{1}{g^{\lambda+\nu}} + k_{\lambda+\mu} \cdot \frac{1}{g^{\lambda+\mu}} + \cdots = a$$

also $c = k_\lambda \cdot \frac{1}{g^\lambda} + k_{\lambda+\nu} \cdot \frac{1}{g^{\lambda+\nu}} + \cdots$

3) Es mögen einige Elemente öfter in a, einige in b öfter vorkommen. Da nun $a > b$, so muss es ein erstes Element geben, welches in a öfter vorkommt als in b. Es mögen nun die beiden Zahlen in Bezug auf die k u. k' übereinstimmen bis zu k_λ u. k'_λ wobei $k_\lambda > k'_\lambda$ sein muss, und die übrigen mögen übereinstimmen oder nicht. Nun koennen wir eine Zahl ~~x~~ k_λ so bestimmen, daß

$$b + k_\lambda \cdot \frac{1}{g^\lambda} < a \quad \text{und}$$
$$b + (k_\lambda + 1) \cdot \frac{1}{g^\lambda} > a$$

Denn denken wir uns die a u. b in der Form geschrieben: $a = k_0 + k_1 \frac{1}{g} + \cdots + k_{\lambda-1} \frac{1}{g^{\lambda-1}} + k_\lambda \frac{1}{g^\lambda} + s \left(s < \frac{1}{g^\lambda}\right)$

$$b = k_0 + k_1 \frac{1}{g} + \cdots + k_{\lambda-1} \frac{1}{g^{\lambda-1}} + k'_\lambda \frac{1}{g^\lambda} + s' \left(s' < \frac{1}{g^\lambda}\right)$$
$$\text{und } k_\lambda > k'_\lambda$$

so brauchen wir nur für h_λ wenn $s' > s$ ist, was man leicht ~~entscheiden~~ entscheiden kann, die Zahl~~en~~ zu nehmen, welche angibt, wie viel mal das Element $\frac{1}{g^\lambda}$ in a öfter vorkommt als in b weniger 1, also in Zeichen

$$h_\lambda = k_\lambda - k'_\lambda - 1.$$

dann ist, wenn man die Zeichen anwendet

$$k_0 + k_1 \frac{1}{g} + \ldots + k_{\lambda-1} \frac{1}{g^{\lambda-1}} + (k_\lambda - 1) \frac{1}{g^\lambda} + s' = b + h_\lambda \frac{1}{g^\lambda} <$$

und

$$k_0 + k_1 \frac{1}{g} + \ldots + k_{\lambda-1} \frac{1}{g^{\lambda-1}} + k_\lambda \frac{1}{g^\lambda} + s' = b + (h_\lambda + 1) \frac{1}{g^\lambda} > a$$

Wenn dagegen $s' < s$, so wähle man für

$$h_\lambda = k_\lambda - k'_\lambda \text{ dann ist}$$

$$b + h_\lambda \frac{1}{g^\lambda} = k_0 + k_1 \frac{1}{g} + \ldots + k_{\lambda-1} \frac{1}{g^{\lambda-1}} + h_\lambda \frac{1}{g^\lambda} + s' < a$$

$$b + (h_\lambda + 1) \frac{1}{g^\lambda} = k_0 + \ldots + k_{\lambda-1} \frac{1}{g^{\lambda-1}} + (k_\lambda + 1) \frac{1}{g^\lambda} + s' > a$$

Wir haben also in diesem Falle immer ein h gefunden, so dass $b + h_\lambda \frac{1}{g^\lambda} < a$

$$b + (h_\lambda + 1) \frac{1}{g^\lambda} > a.$$

Hieraus folgt, dass die Zahl c das Element $\frac{1}{g^\lambda}$ genau h_λ mal enthalten wird. Haben wir dies gefunden, so gehen wir weiter und suchen das nächste Element auf, welches nicht in a u. b gleich oft vorkommt. Dieses sei z. B. $\frac{1}{g^{\lambda+r}}$. Dann untersuchen wir die beiden Reihen

$$s = k_{x+r} \frac{1}{g_{x+r}} \dots$$
$$s' = k'_{x+r} \frac{1}{g_{x+r}} \dots$$

und suchen eine Zahl h_{x+r} so daß wenn $s' < s$ ist

$$s' + h_{x+r} \frac{1}{g_{x+r}} < s$$
$$s' + (h_{x+r} + 1) \frac{1}{g_{x+r}} > s$$ und wenn $s' > s$, daß
$$s + h_{x+r} \frac{1}{g_{x+1}} < s'$$
$$s + (h_{x+1} + 1) \frac{1}{g_{x+1}} > s'$$

Diese Zahl wird uns dann angeben, wie oft das Element $\frac{1}{g_{x+r}}$ in c vorkommt. Auf diese Weise fortfahrend koennen wir immer die Zahl c finden, sodaß

$$b + c = a$$

Hieraus fließt ohne Weiteres der Begriff der Subtraction. Wir sagen man solle b von a subtrahiren, das heisst eine Zahl c finden, die die Eigenschaft haben soll, daß sie zu b addirt genau a ergibt.
In Zeichen setzen wir dies

$$a - b = c$$

Sobald $a > b$ ist, so existirt ein c, welches der Bedingung genügt. Wenn aber $a < b$ ist, so koennen wir mit Hülfe der bis jetzt eingeführten Zahlengrößen dies nicht lösen, wie wir es ohne Weiteres aus der Methode der Bestimmung der Zahl c sehen koennen. Da also diese Aufgabe in dem Gebiete der bis jetzt betrachteten Zahlen, die aus einer Einheit und den genannten Theilen derselben gebildet ist, nicht lösbar ist, so sehen wir uns gezwungen, wenn die Subtraction immer gültig sein soll, unser Zahlengebiet zu erweitern. Dies kann geschehen durch Einführung einer neuen Ein- Einheit. Die ursprüngliche und die neue Einheit tive nennen wir die 1te und die 2te und wollen sie mit e, e' bezeichnen. Ebenso wie bei einer Einheit $\frac{e}{n}$ diejenige Zahl bedeutete welche n mal genommen die Einheit selbst ergibt, so wird hier $\frac{e'}{n}$, wo n vorläufig eine aus der 1ten Einheit gebildete ganze Zahl ist, diejenige Zahl bedeuten, welche ver n facht die Einheit e' gibt. Mit a, b, c... wollen wir nun beliebige Zahlen unseres erweiterten Gebietes bezeichnen, die jetzt complexe d. h. aus beiden Einheiten zusammengesetzte Zahlen und ihren Theilen sind; mit α, β,... wollen wir unbenannte, aus einer unbenannten Einheit gebildete Zahlen bezeichnen, und mit $\alpha . e$, $\alpha . e'$, diejenigen Zahlen welche aus α entstehen, wenn man an die Stelle der unbenannten Einheit resp. e, e' setzt.

Nun sehen wir zunächst, daß man die Gesetze des Addirens aufrecht erhalten kann auch nach dieser Gr. Erweiterung. Die Möglichkeit des Addirens folgt unmittelbar Za. Ein.

Wenn wir Aggregate aus den Einheiten e u. e' und ihren Theilen haben, so koennen wir die Elemente desselben Gebietes zusammenfassen. Jede Zahlengrösse des erweiterten Gebietes wird sich nun in der Form darstellen lassen

(1) $$a = \alpha e + \alpha' e'$$

Nun wollen wir untersuchen in welche Beziehung wir die Elemente e u. e' bringen müssen, um die Möglichkeit der Subtraction in allen Fällen aufrecht zu erhalten.

2 Die Formel $(a-b)+b=a$ gibt uns zunächst die Bedeutung des Zeichens $(a-b)$: Wenn $a > b$ so haben wir

$$(a-b)+c = (a+c)-b$$

Denn es ist

$$\{(a+c)-b\}+b = a+c$$ nach der Definition.

Lassen wir nun beiderseits die Zahl b weg, indem wir rechts die Einheiten weglassen, welche b enthält. Da nun $a > b$ so muss jeder Restantheil von b in a enthalten sein; wir koennen also die Elemente, welche in b vorkommen aus a wegnehmen und erhalten

$$(a+c)-b = (a-b)+c$$

Ferner ist

(3) $$(a-b)-c = a-(b+c)$$

Dies in dem ursprünglichen Zahlengebiete erfordert, dass

$(a-b) > c$ da aber

$b = b$ so folgt

$(a-b) + b > b + c$, da aber

$(a-b) + b = a$ so muss

$a > b + c$ sein.

In diesem Falle koennen wir nun so schliessen. Es ist

$\{a-(b+c)\} + b + c = a$

Da nun sowohl auf der Rechten als auf der Linken die Elemente von b vorhanden sind, so lassen wir sie beiderseitig weg, dies heisst ~~also~~ aber nach der Definitionsformel

$\{a-(b+c)\} + c = (a-b)$ und nun die Elemente von c weglassen

$a-(b+c) = (a-b) - c.$

Nun müssen wir die Elemente in solcher Beziehung zu einander bringen, dass die Gesetze der Subtrac. welche für die ursprünglichen Zahlengrössen bestehen, allgemein gültig bleiben. Zunächst sehen wir, wenn $(a-b)$ stets eine Bedeutung haben soll, so muss auch $(a-a)$ eine Bedeutung haben. Wir haben ~~also~~:

4 $$(a-a)+a=a$$

Denn wir haben zunächst

$$(a-a)+(a+a')=\{(a-a)+a\}+a'=a+a'$$

$$(a'-a')+(a+a')=\{(a'-a')+a'\}+a=a+a'$$

Hieraus folgt

$$(a-a)+(a+a')=(a'-a')+(a+a')$$

und beiderseits die Elemente $(a+a')$ weggelassen

5 $$(a-a)=(a'-a')$$

Das Zeichen $(a-a)$ ist also von dem Werthe der Zahlengrössen a unabhängig.

Nun haben wir ferner nach dem Begriffe

$$(a-a)+b=(b-a)+a=b.$$

Wenn also die Subtraction immer möglich sein soll so muss es in dem neuen Zahlengebiete eine Größe geben, welche zu einer andern hinzu=addirt (~~doch~~, letztere unverändert läßt. Hieraus folgt der Begriff der entgegengesetzten Größen. Entgegengesetzte Größen c u c' nennen wir dann, wenn sie eine Summe nicht aendern, wenn sie gleichzeitig vorkommen. Deshalb nennen wir sie auch ~~mit~~ sich gegenseitig aufhebende~~n~~ Größen. Betrachte ich nämlich $a-b$, $b-a$, so sollen sie der Annahme nach beide Bedeutung haben, dies sind aber solche Größen welche, wenn sie in einer Summe gleich~~ar~~zeitig vorkomnen sich aufheben. Denken wir uns die Summe gebracht auf die Form $c+(a-b)+(b-a)$ wo c das Aggregat von den übrigen Gliedern bedeutet. Es ist dann

$$c+(a-b)+(b-a)=(a+c)-b+(b-a)$$
$$=(a+c)-a+(b-b)=(a-a)+(b-b)+c=c$$

Die Größen $a-a$ bezeichnen wir mit Null, achten aber wohl darauf, daß dies nicht das Nichts ist, sondern es ist eine wirklich existirende Zahlengröße, ein Ausdruck, in dem die Elemente so vorkommen, daß es je zwei entgegengesetzte gibt, die sich aufheben. Null

Wenn also in unserem Größengebiet Subtraction immer möglich sein soll, so muß es entgegengesetzte Größen geben. Nehmen wir nun 2 von diesen z. B.

$$g=\lambda e+\lambda' e'$$
$$g'=\mu e+\mu' e'$$ 6

wobei wir uns $\lambda\ \lambda'\ \mu,\ \mu'$ aus endlicher Anzahl von Elementen gebildet denken, alsdann kann man zeigen, daß man aus diesen entgegengesetzten Größen $g\ g'$ und ihren genauen Theilen, alle Zahlengrößen zusammensetzen kann. Man kann nämlich beweisen, daß sich hieraus die Einheiten $e\ e'$ bilden lassen, als auch ihre genauen Theile. Nehmen wir z. B.

$$g=e-e'$$ 7

$g' = e' - e$

Die Hälfte von g finden wir, indem wir von jedem Element die Hälfte nehmen; also ist:

$$\tfrac{1}{2}\,g = \tfrac{1}{2}\,e - \tfrac{1}{2}\,e'$$

8 $$\tfrac{1}{2}\,g' = \tfrac{1}{2}\,e' - \tfrac{1}{2}\,e$$

Hieraus folgt $\frac{1}{2}g - \frac{1}{2}g' = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e' - (\frac{1}{2}e' - \frac{1}{2}e)$

$$= \tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}e - (\tfrac{1}{2}e' + \tfrac{1}{2}e') = e - e'$$

Ebenso folgt

$$e' - e = \tfrac{1}{2}g' - \tfrac{1}{2}g$$

Wegen $e + e' = e + e'$ folgt

$$e = \tfrac{1}{2}\,g$$

$e' = \frac{1}{2}g'$ oder auch

$$e = \frac{1}{2\cdot 2}\,\frac{1}{g} - \frac{1}{2\cdot 2}\,\frac{1}{g'}{}^{*}$$

$$e' = \frac{1}{2\cdot 2}\,\frac{1}{g'} - \frac{1}{2\cdot 2}\,\frac{1}{g}.$$

Es lassen sich somit die Einheiten e u. e' aus den beiden entgegengesetzten Zahlen $g\,g'$ zusammensetzen. Man kann ferner zeigen dass

$$\tfrac{1}{n}\,e = \tfrac{1}{4n}\,g - \tfrac{1}{4n}\,g'$$

$$\tfrac{1}{n}\,e' = \tfrac{1}{4n}\,g' - \tfrac{1}{4n}\,g$$

Wie wir also 2 entgegengesetzte Grössen $g\,g'$ nehmen, so lassen sich daraus die Einheiten und ~~die~~ ihre genauen Theile
Folgl. lässt sich jede Zahlengrösse durch diese beiden Grössen gg' zusammensetzen
zusammensetzen. Man kann also auch 2 beliebige entgegengesetzte Grössen als Grundeinheiten unseres Zahlen-

gebietes annehmen.

Hier ist noch zu bemerken, dass die Theile von g u g' ebenfalls entgegengesetzte Grössen sind, denn es ist

$$\frac{1}{n} g = \frac{1}{n} e - \frac{1}{n} e'$$

$$\frac{1}{n} g' = \frac{1}{n} e' - \frac{1}{n} e .$$

Soll also die Subtraction immer möglich sein, so müssen wir 2 entgegengesetzte Grundeinheiten annehmen und festsetzen, dass ihre genauen Theile ebenfalls entgegengesetzte Grössen sind.

Dass nun dann umgekehrt nicht nur die Addition, sondern auch Subtraction immer möglich ist, ergibt sich leicht. Um eine Zahl b von a zu subtrahiren, kann man die zu b entgegengesetzte Zahl b' finden, und diese zu a addiren. Die Operation wird also ausgeführt

$a - b = a + b'$ dies ist in der That, denn nach der Definition ist

$(a-b) + b = a$ da nun

$-b' = b''$ so ist

$(a-b) + b + b' = a + b'$ da aber b u. b' entgegengesetzt sind, so ist $a - b = a + b'$

Somit ist nach dieser Erweiterung des Zahlengebietes die Subtraction immer möglich. Auch kommen wir hier ~~neue~~ zum Begriffe der Nulls als einer Zahlengrösse in welcher zu jedem Elemente das entgegengesetzte vorhanden ist. Alle Nullen sind einander gleich. d. h.

$$a-a=\alpha'-\alpha'$$

Nun müssen wir den Begriff der Gleichheit zweier Zahlen unseres Gebietes feststellen.
Haben wir 2 complexe Zahlen

$$\alpha e+\alpha' e'$$
$$\beta e+\beta' e'$$ so sind sie zunächst gleich wenn $\alpha=\beta$
$$\alpha'=\beta'$$. Hiermit ist aber der Begriff der Gleichheit nicht erschöpft. Wir können nämlich zu jeder der Zahlen eine Zahl Null addiren und haben alsdann wenn diese Null gleich ist $\gamma e+\gamma e'$,

$$\alpha e+\alpha' e'+\gamma e+\gamma e'=(\alpha+\gamma)e+(\alpha'+\gamma)e'=\alpha e+\alpha' e'$$

Es kann also $\alpha e+\alpha' e'=\beta e+\beta' e'$ ohne daß

$$\alpha=\beta$$
$$\alpha'=\beta'$$ ist. Die Gleichheit kann nämlich bestehen auch dann wenn

9
$$\beta=\alpha+\gamma$$
$$\beta'=\alpha'+\gamma$$

Ich koennte die Gleichheit auch so hervorbringen daß ich setze:

$$\alpha = \beta + \delta$$ 10
$$\alpha' = \beta' + \delta$$

Durch Addition folgt ohne weiteres

$\beta + \alpha' = \alpha + \beta'$ als die allgemeinste Bedingung der Gleichheit zweier complexen Zahlen 11

$$\alpha e + \alpha' e'$$
$$\beta e + \beta' e'.$$

Wir nennen die Zahlen $\alpha, \beta\ \alpha' \beta'$ die Coordinaten der complexen Zahlen. Wir sehen aus dem Obigen, daß 2 Zahlen mit verschiedenen Coordinaten auch gleich sein koennen. Wir müßen noch zeigen, daß auch nur dann, wenn die Coordinaten der Gleichung 11 genügen, die Zahlen gleich sein koennen. Wenn wir 2 Zahlen haben

$$\alpha e + \alpha' e'$$
$\beta e + \beta' e'$, die einander gleich sind sollen, und sind die Coordinaten gleich, so ist die Bedingung

$\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$ erfüllt.

Wenn ~~wir~~ sie ungleiche Coordinaten haben, so wie sei

$\alpha > \beta$ alsdann koennen wir γ so bestimmen, daß $\alpha = \beta + \gamma$ ist.

Dieses eingeführt in die Gleichheit

$\alpha e + \alpha' e' = \beta e + \beta' e'$ ergibt

$$\beta e + \gamma e + \alpha' e' = \beta e + \beta' e' \text{ also}$$

12 $$\gamma e + \alpha' e' = \beta' e'$$

Daraus schließen wir zunächst, daß zwischen α' u β' dieselben Relationen stattfinden muß, nämlich daß $\alpha' = \beta' + \gamma$. Denn wir haben wegen 12

$$\gamma e' + \gamma e + \alpha' e' = \beta' e' + \gamma e' \text{ also}$$

13 $$\alpha' e' = (\beta' + \gamma) e' \quad \text{oder}$$

$$\alpha' = \beta' + \gamma$$

Die allgemeinste Bedingung der Gleichheit zweier complexen Zahlen $\alpha e + \alpha' e'$, $\beta e + \beta' e'$ ist daß

$$\alpha' + \beta = \alpha + \beta'$$

Hiermit ist die Gleichheit zweier Zahlen unseres erweiterten Gebietes zurückgeführt auf Gleichheit der Zahlen mit einer Einheit.

An diese Betrachtungen schließen wir den Begriff der reducirten Form einer Zahlengröße.

Eine complexe Zahl unseres Gebietes heisst reducirt, wenn sie nur die Einheit e, oder nur e' oder auch $(e + e')$ enthält, nebst den genauen Theilen davon. Nehmen wir eine Größe

$$\alpha e + \beta e'$$

ist zunächst $\alpha = \beta$, so haben wir

$$\alpha e+\beta e' = \alpha e+\alpha e' = \alpha(e+e')$$

Wenn $\alpha > \beta$ ist, so koennen wir setzen

$\alpha = \beta + \gamma$, also ist dann

$$\alpha e + \beta e' = \beta e + \gamma e + \beta e' = \gamma e$$

Wenn $\alpha < \beta$, so setzen wir $\beta = \alpha + \gamma$, dann ist

$\alpha e + \beta e' = \alpha e + \alpha e' + \gamma e' = \gamma e'$. Hiermit ist die Behauptung bewiesen: Jede complexe Zahl ist entweder der Null gleich, oder sie kann dargestellt werden als ein Aggregat von e oder e' und resp. ihren Theilen. (Hierbei muss man unterscheiden gleich Null oder Null selbst; im ersteren Falle denken wir uns, dass wir die Zahl so transformiren koennen, dass in jedem Elemente ein entgegengesetztes sich ergibt, im zweiten Falle muss es eine Identität sein.) Es ist zweckmäßig die beiden Einheiten mit Namen zu bezeichnen, und wir nennen e die positive e' die negative Einheit und unterscheiden positive und negative Zahlen. Natürlich ist es gleichgültig, welche von den Einheiten als die positive, welche als die negative bezeichnet wird. Untersuchen wir nun die Frage, ~~mit~~ unter welchen Umständen lässt sich aus einer unendlichen Reihe von den hier betrachteten Größen eine Summe bilden. Wir müssen hier die Definitionen, welche wir bei positiven Größen festgestellt haben aufrecht zu erhalten suchen. Wir haben früher gesehen, daß das Addiren von unendlich ~~mehr~~ vielen Größen möglich ist, wenn jedes der Elemente, welche überhaupt vorkommen, nur in einer endlichen Anzahl von diesen Größen, und in jeder endlich mal vorkommt, und die Summe ist dann endlich, wenn die Summe von beliebig vielen Gliedern der Reihe unterhalb einer bestimmten Größe g liegt, welche ein Vielfaches der Einheit (positiver) ist. Die 1te Bedingung muß auch hierbei bestehen; es frägt sich nun, ob wir dann stets eine Zahlengröße erhalten, welche in der reducirten Form einen endlichen Werth hat. Die reducirte Form erfordert aber, daß die Coordinaten der ~~resp.~~ complexen Größe, α, β endlich sind. Als Beispiel nehmen wir

$$e + \tfrac{1}{2} e'$$
$$\tfrac{1}{3} e + \tfrac{1}{4} e'$$
$$\tfrac{1}{5} e + \tfrac{1}{6} e'$$
$$\cdots\cdots$$

Dies ist Additionsfähig. Addire ich nun zunächst die positiven und dann die negativen Glieder, so erhalte ich als Coordinaten der Summe

$$\alpha = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \dots$$

$$\beta = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \dots$$

Nun kann man zeigen, dass $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$. Wenn ich also auf diese Weise addire, so bekomme ich ein sinnloses Resultat; doch ist die Summe endlich; denn reduciren wir die einzelnen Grössen, so bekommen wir die Reihe

$$\tfrac{1}{2}e, \tfrac{1}{3 \cdot 4}e, \tfrac{1}{5 \cdot 6}e, \dots$$

und nun kann man zeigen dass

$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3 \cdot 4}, \tfrac{1}{5 \cdot 6}$ endliche Summe liefert.

Aus diesem Beispiele sehen wir, dass die Grössen der hier betrachteten Art für die Addition zunächst sozusagen vorbereitet werden müssen. Die eine Vorbereitung wäre also, dass man die einzelnen Zahlen reducirt, alsdann ist

$$\sum a = \sum (\alpha e + \alpha' e')$$

Wenn aber die Reihe die Eigenschaft hat, dass $\sum \alpha$ und $\sum \alpha'$ endlich sind, dann kann man die Reihe auch so summiren:

$$\sum a = e \sum \alpha + e' \sum \alpha' = \beta e + \beta' e'.$$

Wir sehen somit, dass unendlich viele Grössen der Art eine endliche Summe geben, wenn sowohl die positiven, als auch die negativen Glieder für sich eine endliche Summe liefern. Sind die gegebenen Größen nicht so beschaffen, und können wir sie nicht so umwandeln dann kann man die Addition auf diese Weise nicht ausführen, denn dann ist dies ohne Sinn.

Wir hätten nun für Zahlen, die aus einer Einheit gebildet waren den Satz: Wenn die Summe von beliebig vielen der Größen a unterhalb einer Zahl g liegt, so hat die Summe einen endlichen Werth. Um diesen Satz hier anzuwenden, führen wir den Begriff des absoluten Betrages ein.

Der absolute Betrag einer aus positiven Einheiten gebildeten Zahl, ist die Zahl selbst; ist sie aus negativen Einheiten gebildet, so ist die entgegengesetzte Zahl der absolute Betrag; Ist sie schließlich in der complexen Form $\alpha e + \beta e'$ gegeben, so ist wenn $\alpha > \beta$ und $\alpha = \beta + \gamma$, γ der absolute Betrag. Eine unendliche Reihe von Größen a hat einen endlichen Werth, wenn sich zeigen läßt, daß der absolute Betrag von der Summe von beliebig vielen der Größen, unterhalb einer unveraenderlichen endlichen Grenze g liegt. Wir koennen auch zeigen, daß dann die Reihe zur Addition vorbereitet ist.

Die ursprüngliche Reihe sei

$\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ oder in der Form

$\alpha e + \beta e', \alpha' e + \beta' e', \alpha'' e + \beta'' e', \ldots$ 1

Denken wir uns die Zahlen reducirt, so daß einige von den α oder β gleich Null sind, und dann sei die Reihe in der Form

$\gamma e + \delta e', \gamma' e + \delta' e', \gamma'' e + \delta'' e', \ldots$ 2

Heben wir aus dieser Reihe alle Zahlen, wofür $\delta = 0$ addiren beliebig viele von ihnen, so haben wir

$\gamma_1 e + \gamma_2 e + \gamma_3 e + \ldots$ 3

Der Annahme nach liegt der absolute Betrag dieser Summe unterhalb λ, so haben wir

$\lambda > \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots$ 4

Die positiven Glieder sind also summirbar und geben eine endliche Summe. Heben wir nun diejenigen hervor in denen $\gamma = 0$ so haben wir die Summe derselben:

$\delta_1 e' + \delta_2 e' + \ldots$ +

Es wird also die Bedingung erfüllt, daß die Summe von den positiven und die Summe von den negativen Gliedern für sich einen endlichen Werth hat. Die Zahlen sind also summationsfähig und ergeben einen endlichen Werth

Es ist aber nicht nöthig, die reducirte Form aufzusuchen.

+ Nehmen wir nun beliebig viele von diesen und bilden den absoluten Betrag der Summe so haben wir nach der Voraussetzung

$\lambda' > \delta_1 + \delta_2 + \ldots$

Denken wir uns aus der Reihe

$$\alpha\ \alpha'\ \alpha''\ldots$$

die positiven hervorgehoben, diese seien

$$\alpha e+\beta e',\ \alpha' e+\beta' e',\ldots$$

Wir koennen sie so umwandeln, dass sie addirbar sind; nehmen wir nämlich eine Reihe von Zahlen ~~als~~ an $\gamma\ \gamma'\ldots$ so dass

5 $\gamma+\gamma'+\gamma''\ldots$ eine endliche Summe hat, so koennen wir die Zahlen so vorbereiten, dass die β kleiner sind als die γ; denn wäre $\beta>\gamma$, so koennen wir β vermindern, indem wir gleichzeitig die α aendern. Dann bekommen wir:

6 $\mu e+\gamma^{\nu} e',\ \mu' e+\gamma^{\nu'} e',\ \ldots$ ~~ist~~ wo die $\gamma^{\nu'}$ summirbare ~~Reste~~ Reihe geben. Soll nun die Summe endlich sein so muss auch $\Sigma\mu$ endlich sein, denn addiren wir beliebig viele von den Zahlen, und bezeichnen ~~sie~~ dies mit

$\Sigma'\mu e+\Sigma'\gamma^{\nu} e'$ und den absoluten Betrag hiervon mit $|\Sigma'\mu e+\Sigma'\gamma^{\nu} e'|$ so haben wir

7 $$|\Sigma'\mu e+\Sigma'\gamma^{\nu} e'|=\Sigma'\mu-\Sigma'\gamma^{\nu}.$$

Nun soll der Annahme nach

$|\Sigma'\mu e+\Sigma'\gamma^{\nu} e'|<g$, also muss auch

8 $\Sigma'\mu-\Sigma'\gamma^{\nu}$ endlich sein, da nun $\Sigma\gamma$ selbst endlich ist, so muss auch

$\Sigma' \mu$ es sein; d. h. die ~~μ~~ μ bilden eine Reihe mit einem endlichen Werthe. Auf diese Weise ist die Reihe so vorbereitet daß man die $\mu e, \mu' e', \dots$ u $\mu'' e', \mu''' e'$ für sich summiren kann. Ebenso präpariren wir die negativen Glieder indem wir sie so ~~umändern~~ umwandeln, daß die positiven Theile in ihnen eine summirbare Reihe mit endlichem Werthe bilden. Auf dieselbe Weise schließend gelangen wir zu dem Resultate, daß die negativen Glieder eine endliche Summe liefern. Also gilt hier der Satz, daß wenn wir eine Reihe von Zahlen haben, $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ und wissen, daß dann $|\Sigma' \alpha| < g$, so hat die Reihe einen endlichen Werth.

Es sei nun $\Sigma\, c$ gegeben, wir nehmen an, daß die Summe endlich ist. Zerlegen wir nun die c in Gruppen, so wird die Summe in jeder Gruppe endlich sein, und die Summe der Gruppen ist gleich der ursprünglichen. Dieser Satz ist hier ohne Weiteres evident, wenn wir nur voraussetzen, daß die c so umgeformt sind, daß sie addirungsfähig sind, d. h. daß die Reihe

$$c,\ c',\ c'' \dots$$

auf irgend eine Weise nach den obigen Methoden zur Addition vorbereitet ist. Daraus bilden wir nun

Gruppen. Zunächst ist es klar, daß jede Gruppe einen endlichen Werth hat. Denn da die c's für die Addition vorbereitet sind, so ist die $\Sigma\,\alpha e$, $\Sigma\,\beta e'$ endlich; nun ~~koennen~~ kommen in jeder Gruppe ~~nun~~ nur einige von den αe, $\beta e'$, es wird also $\Sigma'\,\alpha e$, $\Sigma'\,\beta e'$ auch endlich sein, folglich auch

$$\Sigma'\,\alpha e + \Sigma'\,\beta e'.$$ Die Summen der einzelnen Gruppen seien

$$b,\ b'\ b'' \ldots$$ nun handelt es sich darum zu zeigen daß

$$\Sigma\,b = \Sigma\,c$$

Faßen wir irgend ein Element

$$e,\ \tfrac{1}{2}e,\ \tfrac{1}{3}e, \ldots$$

$$e',\ \tfrac{1}{2}e',\ \tfrac{1}{3}e' \ldots$$ so kommt jedes nur in endlicher Anzahl ~~des~~ der c vor. Nehmen wir eins dieser Elemente z. B. α_i ~~es~~ möge in allen c n mal vorkommen; alsdann muß es in allen b's auch wenigstens n mal vorkommen, da alle b aus den Elementen aller c gebildet sind; es kann aber auch nicht öfter in den b's vorkommen, da man ja jedes Element, ~~daß~~ das in c vorkommt, nur so oft nehmen konnte bei der Eintheilung in Gruppen als es überhaupt vorkam. Da dies von jedem Elemente gilt, so

haben wir

$$\Sigma c = \Sigma b.$$

Denken wir uns eine zweite Gruppirung angewandt in ~~den~~ die Gruppen

$a, a'a'..$ so wird man haben

$$\Sigma a = \Sigma c = \Sigma b. \qquad 9$$

Dieser Satz basirt nun zunächst darauf, dass die c's endlich und zur Addition vorbereitet sind, und dass Σc endlich ist. Es müssen sowohl die positiven, als auch die negativen Summanden für sich eine endliche Summe ergeben. Wenn dies nicht der Fall ist, so ist die Gruppirung nicht erlaubt. Auf diese Weise erklärt sich z. B. dass wenn man in der Fourier'schen Reihe

$$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots$$

für $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots$ u. s. f. einsetzt ~~einzeln~~, dass man durch Gruppirung nach Potenzen von x widersprechende oder oder wenigstens sinnlose Resultate ~~enthält~~ erhält. Es is nämlich hierbei die Summe der positiven Glieder unendlich gross z. B. in dem Falle, wo die Glieder

a_1, a_2 – gleich sind $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$

Hierhin gehört auch das Beispiel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Unter den Zahlengrössen ist die Null die einzige welche der entgegengesetzten gleich ist. Die entgegengesetzten Grössen sind nämlich

$$(a-b), (b-a) \text{ also für } b=a$$

$$(a-a), (a-a).$$

Man kann somit die Null von einer Zahlengrösse subtrahiren, ohne die Zahl zu aendern. Denn um die Null zu subtrahiren, kann man die entgegengesetzte Zahl, Null addiren; das Addiren der Null aendert aber das Resultat nicht.

Wenn a irgend eine Zahl ist, so kann man die entgegengesetzte Zahl mit $o-a$ oder kurz mit $-a$ bezeichnen. Denn es ist $(a-a)-a=(a-a)+a'$ da aber $(a-a)$ zu a' addirt es nicht aendert, so ist

$$a'=(a-a)-a=o-a.$$

Wenn wir also die Einheit e eingeführt haben, so koennen wir die entgegengesetzte mit

$$o-e \text{ oder kurz } -e \text{ bezeichnen}.$$

Wenn wir künftig sprechen von Zahlengrössen, die aus einer Einheit gebildet sind, so werden es Zahlen sein die aus

$$e, \tfrac{1}{2}e, \tfrac{1}{3}e, \ldots, -e, -\tfrac{1}{2}e, -\tfrac{1}{3}e, \ldots$$

zusammengesetzt sind.

Jetzt gehen wir zu der Begründung der Multiplication und Division für diese Größen. Es handelt sich also darum allgemeine Multiplicationsgesetze für diese hier betrachteten Zahlen aufzustellen, welche die für die ganzen aus einer Einheit gebildeten Zahlen aufrecht erhalten. Für die ganzen Zahlen hätten wir die 3 Grundgesetze

$$ab = ba$$

$$a(b+c) = ab + ac$$ 1

Hieraus kann man ohne Weiteres herleiten, daß man 2 Summen von ganzen Zahlen multiplicirt, indem man mit jedem Summand der einen Summe alle Summanden der andern multiplicirt und die Theilsummen addirt. Dieses Gesetz soll allgemein gültig sein. Wenn wir also zwei beliebige Zahlen a, b mit einander zu multipliciren haben, so denken wir uns die Zahlen in ihre Elemente aufgelöst, und dann reducirt sich die Aufgabe auf die Multiplication der Elemente selbst, denn wir multipliciren nach der Regel a. b. indem wir jedes Element der einen Zahl durch jedes Element der andern Zahl multipliciren. Es sei zunächst die Frage was bedeutet

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = x \quad (m, n \text{ positiv})$$ 2

Dieses koennen wir nicht willkürlich definiren denn es ist schon durch die Definition der Multiplication und des Elementes definirt. Bei den ganzen Zahlen hatten wir nämlich das Gesetz:

3 $(a\,b)\,c = a\,(b\,c)$ Wenn wir also dieses x ver n fachen, so erhalten wir die Summe von ^{n}x oder

4 $$n x = n \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{m}\left(n \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m} \cdot 1$$

und dieses ver m facht gibt

$m\,(n\,x) = 1 . 1$. Nun ist aber definirt worden $1 \cdot 1 = 1$, also muss

$m\,(n\,x) = 1$, wegen 3 hat man schliesslich

5 $$(m\,n)\,x = 1$$

Das Product $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}$ haben wir also so zu definiren, daß es eine Zahl ist, welche $(m\,n)$ mal genommen die Einheit ergibt; diese Zahl muß also der $(m \cdot n)^{te}$ Theil der Einheit sein, d. h. es ist

6 $$\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{m \cdot n}$$

Dies ist eine nothwendige Folge der Multiplication der ganzen Zahlen. Nun sind wir im Stande beliebige aus positiven Elementen zusammengesetzte Zahlen zu multipliciren. Bei unendlicher Anzahl von Elementen werden wir noch die Endlichkeit des Productes nachzuweisen haben. Ferner fragen wir, was bedeutet

7 $\frac{1}{m} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right)$. Zunächst finden wir was $\frac{1}{m} \cdot 0$ ist

$\frac{1}{m}\,(a - a)$ ist nach den Multiplicationsregeln

8 $$\frac{1}{m}\,(a - a) = \frac{1}{m}\,a - \frac{1}{m}\,a = 0$$

Nun schließen wir so: Es ist

$$m\cdot(-n) = m\,(0-n) = 0 - m\cdot n = -m\cdot n$$

Also ist

$$m\cdot(-n) = -m\cdot n. \qquad 9$$

Um die Bedeutung von $(-m)\,n$ zu finden können wir nach der Regel des Vertauschens so schließen

$$(-m)\cdot(+n) = n\cdot(-m) = -m\cdot n \qquad 10$$

Man könnte dies auch direct zeigen. Schließlich untersuchen wir $(-m)(-n)$. In Anwendung der vorigen Formeln schließen wir so: Es ist

$$(-m)(-n) = (-m)(0-n) = 0 - ((-m)\cdot n) = 0 - (-m\cdot n)$$

Statt nun die Größe $-m\cdot n$ zu subtrahiren, können wir die entgegengesetzte addiren, und erhalten

$0 - (-m\cdot n) = 0 + m\cdot n$. Also haben wir

$$(-m)(-n) = m\,n \qquad 11$$

Diese 4 Regeln folgen unmittelbar aus der Definition und sie gelten auch für $m = 1$, $n = 1$; dies gibt

$$(+1)(+1) = +1$$
$$(+1)(-1) = -1$$
$$(-1)(+1) = +1$$
$$(-1)(-1) = +1$$

Jetzt sind wir im Stande alle Zahlengrößen unseres Gebietes zu multipliciren.

Bei Zahlen mit unendlich vielen Elementen hat man zu sehen, ob das Resultat wiederum eine Zahlengröße
Das heisst man muss sehen, ob jedes Element des Resultates wiederum ein Element ist.
derselben Art ist. Dies ist aber offenbar erfüllt. Zweitens muss jedes Element im Resultate endlich oft vorkommen. Dies ist aber ebenfalls erfüllt. Denn nehmen wir irgend ein Element des Resultates $\frac{1}{m \cdot n}$, so ist dies aus den Elementen $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ entstanden; da nun letztere in endlicher Anzahl vorkommen, so wird auch $\frac{1}{m \cdot n}$ in endlicher Anzahl vorhanden sein. Dies gibt zunächst für die formelle Multiplication. Wir haben noch nachzuweisen, dass das Product zweier beliebiger endlichen Zahlen endlich ist.

Zunächst setzen wir voraus, dass die Zahlen

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

12 $$b = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

aus lauter positiven Gliedern zusammengesetzt sind. Multiplicieren wir nach den Regeln der Multiplication, so erhalten wir:

13 $$ab = \sum_{\lambda,\mu} a_\lambda \, b_\mu$$

wo λ, μ ganze aus einer unbestimmten Einheit gebildeten Zahlen bedeuten. Es handelt sich nun darum zu zeigen, dass $\sum_{\lambda,\mu} a_\lambda \, b_\mu$ endlich ist.
Greifen wir nun irgend welche aus dieser Summe

heraus und der größte Werth von ν in diesem ~~Falle~~ sei ϱ und von μ sei σ. Die Summe der herausgehobenen Glieder ist sicher nicht größer als

$$\begin{array}{l} a_1 b_1 + a_1 b_2 + \dots + a_1 b_\sigma \\ a_2 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_2 b_\sigma \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_\varrho b_1 + a_\varrho b_2 + \dots + a_\varrho b_\sigma \end{array}$$

In diesem Aggregat kommt aber jedes Glied $a_1\ a_2\ a_3 \dots a_\varrho$ mit jedem Gliede $b_1 \dots b_\sigma$ multiplicirt, es ist also nach der Multiplicationsregel gleich:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_\varrho) \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_\sigma)$$

Da nun a endlich ist, so ist die Summe von beliebig vielen der $a_1 \dots$ kleiner als g und ebenso die Summe von beliebig vielen $b_1 \dots$ kleiner als h.

Bei positiven Zahlen kann man nun nachweisen dass durch Vergrösserung eines der Factoren das Product vergrößert wird. Nehmen wir z. B.

$a.b$, $a'.b'$ wobei $a' \geq a$, $b' \geq b$ dann ist

$a'b' \geq a\,b$, denn setzen wir

$a' = a + c$

$b' = b + d$ so ist

$a'b' = ab + a\,d + bc + cd$ also

$$a'b' \geq ab.$$

Da nun

$$a_1 + \dots + a_\varrho < g \text{ und}$$
$$b_1 + \dots + b_\sigma < h \text{ so ist also}$$

$$(a_1 + \dots + a_\varrho)\cdot(b_1 + \dots b_\sigma) < g.h.$$

Es gibt also eine ganz bestimmte Größe g.h, welche immer größer ist, als die Summe von beliebig vielen Gliedern des Productes, d.h. das Product ist endlich.

Jetzt seien a, b beliebige Zahlen unseres Zahlengebietes, man wird sie immer auf die Form bringen können

$$a = a' - a''$$
$$b = b' - b''$$

wo $a' a'' b' b''$ endliche positive Zahlen sind. Multipliciren wir dies so müssen wir haben

$$a\,b = a'b' - a'b'' - a''b' + a''b''$$

Nach dem eben bewiesenen Satze sind die Producte

$$a'b',\ a'b'',\ a''b'\ a''b'' \text{ endlich}$$

also ist auch das Aggregat derselben, also auch

$$a\,b \text{ endlich}$$

Wenn wir also 2 endliche aus unendlicher Anzahl von Elementen bestehender Zahlen multipliciren, so erhalten wir wiederum eine aus den Grundeinheiten und ihren Theilen gebildete Zahl, welch einen endlichen Werth hat.

Nun haben wir bei der Addition gesehen, daß man Summen von unendlich vielen Zahlengrößen addiren kann. Wir wollen nun hier analog zeigen, daß man zwei Summen, die aus unendlicher Anzahl von beliebigen Zahlen bestehen multipliciren kann, und sobald die Summen einen endlichen Werth haben, ist auch das Product endlich.

Es seien

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \qquad 14$$
$$b = b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

wo die a's u. b's beliebige Zahlengrößen unseres Gebietes sind. Theilen wir nun jede der Summen in 2 Theile, in die positiven und negativen Glieder, so daß wir setzen

$$a = a' - a'' \qquad 14$$
$$b = b' - b''$$

wo a' a'' b' b'' positive endliche Zahlen sein mögen, die aus unendlich vielen Zahlen bestehen. Nach den Regeln der Multiplication muß formell sein

$$ab = a'b' - a'b'' - a''b' + a''b'' \qquad 15$$

Hieraus sehen wir, daß wenn wir die Richtigkeit unseres Satzes nachweisen für den Fall, wo die Summen aus lauter positiven Gliedern bestehen, daß er hiermit allgemein bewiesen wird.

Wir setzen ~~aber~~ also jetzt voraus, dass a, b nur positive Glieder enthalten und endlich sind. In diesem Falle muss es ein bestimmtes g geben, das größer ist als die Summe von beliebig vielen der Glieder von a und ebenso ~~ein~~ ein zweites h, das größer ist als die Summe von beliebig vielen Gliedern in b. Hebe ich nun aus dem Product

$a.b = \sum_{\varkappa,\mu} a_\varkappa\, b_\mu$ beliebig viele heraus und

wende den vorigen Beweis wörtlich hierauf an, so bekomme ich, daß die Summe von beliebig vielen Gliedern des Productes kleiner ist als g.h, d. h. a.b ist endlich. Dieser Satz läßt sich leicht erweitern auf beliebig viele Summen. Wenn ich z. B n Summen zu multipliciren habe, so erhalte ich das Product, in dem ist jedes beliebige Glied der 1ten Summe mit jedem beliebigen Glied der zweiten Summe und dieses mit jedem beliebigen Glied der 3ten Summe u. s. w. multiplicirt. ~~wir~~ Sind die Summen endlich, so ist auch das Product endlich. Hierbei ist es wohl zu beachten, daß der Satz darauf basirt, daß in den Summen die positiven Glieder für sich, und die negativen für sich eine endliche Summe liefern. D. h. die Reihen müssen zur Addition vorbereitet sein.

nun drängt sich ohne Weiteres die Frage, was soll ein Product von unendlich vielen Factoren bedeuten? Hier entsteht eine Schwierigkeit. Wenn ich beliebigen Summen zu multiplicieren habe, so geschieht dies, indem ich mit jedem Gliede der Summe alle Glieder der andern Summe multiplicire. Wenn ich n Zahlengrößen zu multiplicieren habe, so vollziehe ich dies, wenn ich je n Element der einzelnen Factoren multiplicire und dies addire. Wenden wir dies auf Producte von unendlich vielen Zahlengrößen an, so würden wir das Product finden, wenn wir unendlich viele Elemente miteinander multipliciren und sie dann addiren. Die Theilproducte würden aus unendlich vielen Elementen bestehen, dies ist aber ohne Sinn. Wir koennen somit die Multiplicationsgesetze nicht ohne Weiteres darauf hierauf anwenden. Diese Schwierigkeit löst man in der Analysis folgendermaßen. Hat man

$$\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \text{ in inf. zu bilden,}$$

so nehmen wir die logarithmen hiervon und setzen

$$l\alpha_1 + l\alpha_2 + l\alpha_3 + \ldots = s$$ alsdann definirt man das Product auf folgende Weise

16 $$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots = e^s$$

Diese Definition ist richtig, sie hat aber die Unbequemlichkeit, daſs sie andere Operationen als die Grundoperationen anwendet. Diese Schwierigkeit wollen wir lösen, indem wir die Begriffe der Grundoperationen anwenden.

Es sei das Product zu bilden

17 $$a' a'' a''' \ldots$$

Wir denken uns, was immer möglich ist, ~~eine~~ jede der Zahlen a' a'' ... auf die Form gebracht

18 $$1 + \alpha_1,\ 1 + \alpha_2,\ 1 + \alpha_3,\ \ldots$$

Wenn wir nun n Zahlen zu multiplicieren haben ~~haben~~ so werden wir das Product

19 $$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_3)$$ zu bilden haben.

Dieses wird aber die Form haben, daſs darin zunächst 1, dann die Summe aller $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$

dann die Summe von je 2-en der α's ... und ~~selbst~~ ~~restlend~~ schliesslich das Product aller $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ vorkommt. Ist die Anzahl der Factoren unendlich groſs, so definiren wir als das Product folgende Summe

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\ldots =$$

20 $$1 + \sum_{\lambda} \alpha_\lambda + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_\lambda \alpha_\mu + \sum_{\lambda,\mu,\nu} \alpha_\lambda \alpha_\mu \alpha_\nu + \ldots$$

wo jedes $\lambda\ \mu\ \nu$ z. B. ganze Zahlen bedeutet, die sämmtlich von einander verschieden ~~gleichartig~~ gleichzeitig sind. Diese

Definition können wir einführen, weil doch hiermit die Regel für endliche Anzahl von Factoren aufrecht erhalten wird, und die Summe einen bestimmten Begriff gibt; die Summe gibt eine wirkliche Zahl an, die man finden kann. Der Begriff dieser Zahl ist festgestellt und hat einen ganz bestimmten Sinn. Es handelt sich nun darum die Glieder zu summiren und zu sehen, wann dies möglich ist. Denken wir uns zunächst, dass die Zahlen $a, a_2 \dots$ sämmtlich positiv sind und aus positiven Elementen gebildet. Zunächst sieht man, dass wenn überhaupt die Summation möglich sein soll, dass dann $\sum_\nu a_\nu$ einen endlichen Werth haben muss. Hieraus folgt, dass jedes Element nur in endlicher Anzahl der a's und überhaupt endlich oft vorkommt. Nehmen wir irgend ein Element z. B. $\frac{1}{g}$ und suchen wie oft es in dem Aggregate 20 vorkommt. Das Element $\frac{1}{g}$ sei mit dem Nenner $m . n . p \dots s$ also $\frac{1}{g} = \frac{1}{m n p \dots s}$. Dieses Element kann, wenn es in $\sum a_\nu$ vorkommt, darin in endlicher Anzahl vorkommen. Es kann aber auch in $\sum_{\nu, \mu} a_\nu . a_\mu$ vorkommen, hierin ist es enstanden aus den Elementen, welche in a_ν u a_μ vorkommen. Da nun dieses Element im Nenner eine endliche Zahl hat, so kann es nur aus Elementen entstanden sein, welche im Nenner endliche Zahlen haben, solcher Elemente gibt es aber nur endlich viel, so weiter schliessend kommen wir ~~dann~~ dazu, daſs das Element g überhaupt in dem Aggregate nur endlich oft vorkommen kann. Daſselbe gilt von jedem anderen Elemente. Im Grunde genommen brauchen wir aber es gar nicht nachzuweisen, daſs jedes Element in dem Aggregate endlich oft vorkommt, denn die Summe 20 bedeutet doch eine ganz bestimmte Zahl, wir haben also nur nachzuweisen, daſs sie einen endlichen Werth hat. Wir setzen den Werth von $\Sigma\, \alpha_\lambda$, welchen wir als endlich voraussetzen

21 $$s = \Sigma_\lambda\, \alpha_\lambda .$$

Multiplicieren wir dies mit sich selbst, so erhalten wir
$s^2 = \Sigma_{\lambda,\mu}\; \alpha_\lambda \cdot \alpha_\mu$ wobei aber $\lambda = \mu$ sein kann. Nun kommen aber in $\Sigma_{\lambda,\mu}\; \alpha_\lambda \cdot \alpha_\mu$ diejenigen Glieder in denen $\lambda = \mu$ nicht ~~war~~ vor, nach der Definition, also haben wir

22 sicher $s^2 > \Sigma_{\lambda,\mu}\; \alpha_\lambda \cdot \alpha_\mu$ Ebenso erhalten wir leicht
$$s^3 > \sum_{\lambda,\mu,\nu} \alpha_\lambda \cdot \alpha_\mu \cdot \alpha_\nu$$
$$\cdots\cdots$$
Wir haben also

23 $$1 + \Sigma_\lambda\, \alpha_\lambda + \Sigma_{\lambda,\mu}\, \alpha_\lambda\, \alpha_\mu + \Sigma_{\lambda,\mu,\nu}\, \alpha_\lambda\, \alpha_\mu\, \alpha_\nu + \ldots < 1 + s + s^2 + s^3 + \ldots$$

Nun fassen wir zunächst den Fall ins Auge wo $\Sigma\, \alpha_\lambda < 1$ ist, dann ist also $s < 1$. Nun setzen wir
$t = 1 + s + s^2 + s^3 + \ldots$ Nehmen dies s mal, so folgt
$ts = s + s^2 + s^3 + \ldots$ daraus folgt daſs

$t = ts + 1$ oder $t(1-s) = 1$. Wir sehen hieraus daſs das $(1-s)$fache von der Summe t Eins ist, da aber $(1-s)$ endlich ist, so muſs auch t endlich sein. In diesem Falle ist das definirte Product kleiner als eine endliche Gröſse also ist selbst endlich. Zweitens sei Σa_λ endlich, aber nicht kleiner als 1. Alsdann werden wir immer einige von den a_λ herausnehmen koennen, so daſs die Summe der übrig bleibenden kleiner ist als 1. Die herausgehobenen a seien $a_1\ a_2 \ldots a_\nu$ wir theilen das Product

$(1+a_1)(1+a_2)\ldots$ in 2 Theile

$(1+a_1)\ldots(1+a_\nu)\cdot(1+a_{\nu+1})(1+a_{\nu+2}) + \ldots$

Nun ist nach der Definition

$$(1+a_{\nu+1})(1+a_{\nu+2}) + \ldots = 1 + \sum_{\lambda=\nu+1} a_\lambda + \sum_{\substack{\lambda=\nu+1 \\ \mu=\nu+2}} a_\lambda\, a_\mu + \ldots \quad 24$$

und dieses Product hat wegen

$$\sum_{\lambda=\nu+1} a_\lambda < 1,$$ einen endlichen Werth.

Wenn wir dies mit $(1+a_1)\ldots(1+a_\nu)$ multiplicieren, so wird das Resultat ebenfalls einen endlichen Werth haben. Denken wir uns nun das Aggregat in 24 mit $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_\nu)$ multiplicirt, so erhalten wir nach den Multiplicationsregeln

$(1+a_1)\ldots(1+a_\nu)(1+a_{\nu+1}) + \ldots =$

$1 + \sum_\lambda a_\lambda + \sum_{\lambda,\mu} a_\lambda \cdot a_\mu + \ldots$ was auch die Definition 26 war.

Wenn also die Zahlen $a_1, a_2 \ldots$ so beschaffen sind, daß $\sum_\lambda a_\lambda$ einen endlichen Werth hat, so hat das Aggregat 20, welches das Product vertritt einen endlichen Werth. Jetzt müssen wir noch die Richtigkeit des Satzes zeigen für den Fall wo der Rest die Reihe

$$a_1\ a_2\ a_3$$

beliebige complexe Zahlen bedeutet. Wenn man die Summe $\sum a_\lambda$ endlich sein soll, so muß die Summe der positiven und die Summe der negativen Glieder für sich einen endlichen Werth haben, alsdann wird die Summe der absoluten Beträge von a endlich sein. Statt des ursprünglichen Productes betrachten wir also folgendes

$$(1+b_1)(1+b_2)(1+b_3)\ldots\ldots$$

wo $b_\lambda = a_\lambda$ wenn a_λ positiv und gleich $-a_\lambda$ ist, wenn a_λ negativ. Wenn die Summe von a in dem obigen Sinne endlich ist, so koennen wir nach der Definition das Product gleich setzen:

(27) $$1+\sum_\lambda b_\lambda + \sum_{\lambda,\mu} b_\lambda b_\mu + \sum_{\lambda,\mu,\nu} b_\lambda b_\mu b_\nu + \ldots$$

und dieses Aggregat hat einen endlichen Werth; um nun das Product $(1+a_1)\ldots$ zu erhalten, brauchen wir nur die absoluten Beträge der einzelnen Summanden mit $+1$ oder -1 zu multipliciren, je nachdem die Anzahl der in $a_\nu\ a_\mu \ldots$ vorgekommenen negativen Factoren $a_\lambda \ldots$ gerade und gerade ist. Das dann auch dieses Aggregat einen endlichen Werth hat folgt unmittelbar. Definiren wir somit unser Product von unendlich vielen Factoren auf die obige Weise, so hat es einen ganz bestimmten Sinn, und hiernach ist der Begriff einer ganz bestimmten Zahl gegeben. Auch gilt diese Definition für endliche Anzahl von Factoren. Später werden wir Rechnungsoperationen mit solchen Producten vornehmen. Jetzt aber gehen wir zur Division über und zeigen die Möglichkeit der Division für alle Zahlen unseres Zahlengebietes. Die Definition der Division für alle Zahlen aus der für ganze Zahlen hergeleitet lautet: Man solle eine Zahl finden, welche wir mit $\frac{a}{b}$ bezeichnen, die multiplicirt mit b die Zahl a ergibt; oder in Zeichen: es soll $\frac{a}{b}$ so gefunden werden daß

$$\frac{a}{b} \cdot b = a:$$

unter a, b beliebige Zahlen verstanden werden. Wenn b eine ganze Zahl ist, so ist die Division ohne Weiteres möglich. Die Formel verlangt nämlich die Zahl zu finden, welche ver b-facht a gibt; diese Zahl erhält man offenbar, wenn man von jedem Elemente des a den b^{ten} Theil nimmt. Wenn $\overset{m}{\alpha}$ eine ganze Zahl ist und haben wir

$$\frac{a}{m} = b \text{ so ist}$$

$$a = m \cdot b$$

Wenn nun m größer als 1 ist, so ist $a < b$.
Wenn wir zwei Zahlengrößen nehmen, welche kleiner als 1 sind, so ist das Product derselben ebenfalls kleiner als 1. Wenn $b < 1$ so koennen wir c so finden, daß $b = 1 - c$ wo c eine positive Zahl ist.
Dann haben wir

$$ab = a - ac \text{ also}$$

$$a = ab + ac$$

Ist nun $a < 1$ so muss ab kleiner sein als 1.
Jetzt sollen wir zeigen, daß die unendliche Reihe

28 $$a + ag + ag^2 + \dots$$

einen endlichen Werth hat, sobald $g < 1$ ist. Zunächst wollen wir dies für den Fall zeigen, wo a, g positiv sind. Wir heben irgend eine Anzahl von den Gliedern dieser Reihe heraus, und der höchste Exponent in diesen sei r. Die Summe der herausgenommenen Glieder ist unbedingt nicht größer als

29 $$s = a + ag + ag^2 + \dots + ag^r.$$

Hieraus folgt, wenn ich dies ver g fache

$$gs + a = s + ag^{r+1} \text{ daraus}$$

$s < gs + a$ 30

nehme ich auf beiden Seiten gs weg, so haben wir sobald

$s > gs$ d. h. g kleiner als 1

$s - gs < a$ also

$(1-g)s < a$. 31

Da $1-g < 1$, so kann dies nur eine rationale Zahl sein z. B. $\frac{m}{n}$ wo $m < n$. Wir haben alsdann

$\frac{m}{n} s < a$ also auch

$m.s < na$ da nun na endlich, m ebenfalls, so ist auch s endlich und liegt unterhalb einer von der Anzahl der Glieder die wir herausgehoben haben unabhängigen Zahl. Demnach ist die Summe der beliebig herausgehobenen Glieder kleiner als eine feste Zahl, d. h. die Sume 28 ist selbst endlich. Dies gilt nun ohne Weiteres wenn a und g negativ oder positiv sind, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Zahlen auf absoluten Betrage reducirt. Um nun die Möglichkeit der Division zu zeigen, wenn a und b beliebige Zahlengrößen sind. Suchen wir nämlich $\frac{a}{b}$, so finden wir wenn b keine ganze Zahl ist, in der Zahlenreihe der ganzen Zahlen eine Zahl m, welche größer ist als b, so daß $m-1 < b$ ist. Wir koennen alsdann c so bestimmen daß

$b = m - c$ und $|c|$ soll nur an die Bedingung geknüpft sein: kleiner als m zu sein. Wir schreiben nun die Reihe $\frac{a}{m} + \frac{a}{m}\cdot\frac{c}{m} + \frac{a}{m}\cdot\frac{c^2}{m^2} + \dots$

Die Möglichkeit dieser Reihe ist gegeben, da m ganze Zahl ist und die Reihe nach dem vorigen einen endlichen Werth hat. Um nun zu zeigen, daß sie gleich ist $\frac{a}{b}$, haben wir nur zu beweisen, daß das b fache d. h. $(m-c)$ fache derselben gleich a ist. Da die Reihe endlichen Werth hat, so koennen wir sie multiplicieren und erhalten

32 $$\left.\begin{array}{l} a + \frac{a}{m}\cdot c + \frac{a}{m}\cdot\frac{c^2}{m} + \dots \\ - \frac{a}{m}\cdot c - \frac{a}{m}\cdot\frac{c^2}{m} - \dots \end{array}\right\} = a.$$

Aus dieser Betrachtung sehen wir, daß die Division unter allen Umständen möglich ist mit Ausnahme des Falles $b = 0$. In diesem Falle läßt sich das Verfahren nicht anwenden; es ist aber auch begrifflich unmöglich, durch die Null zu dividiren, denn wir koennen keine Zahlengröße finden, die mit Null multiplicirt gleich a wäre. Nun könnte man auch die Lehrsätze über das Vorzeichen zeigen, daß nämlich

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$$
$$\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$$
$$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$$
$$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$$

Am Schlusse dieser Betrachtungen, wollen wir ~~mal~~ noch einige

Sätze über die unendlichen Producte hinzufügen.
Wenn wir unendlich viele Zahlengrößen multipliciren wollen, so müssen wir sie auf die Form bringen

$1+b_1,\ 1+b_2\ \ldots$ und dann ist das Product wie wir gesehen haben zu definiren.

$$(1+b_1)(1+b_2)\ldots\ldots = 1+\sum_{\varkappa} b_{\varkappa} + \sum_{\varkappa,\mu} b_{\varkappa}\, b_{\mu} + \ldots \qquad 33$$

Bei der Addition hatten wir nun den Satz: Wenn man eine Summe von unendlich vielen Gliedern hat, die einen endlichen Werth hat in dem Sinne, daß die Summe der positiven und der negativen Glieder für sich einen endlichen Werth hat, so kann man die Glieder in Gruppen theilen, jede Gruppe hat dann einen endlichen Werth und die Summe der Gruppen ist gleich der ursprünglichen Summe. Der analoge Satz gilt auch für unendliche Producte: man kann die Factoren in Gruppen theilen, jede Gruppe für sich multipliciren, dann ist jede Gruppe endlich, und das Product aller Gruppen ist dem ursprünglichen Producte gleich, welchen Satz man ohne Weiteres aus der Definition nachweisen kann. Ferner haben wir gesehen, daß das Product endlich ist, wenn $\sum_{\varkappa} b_{\varkappa}$ endlichen Werth hat. Wir werden diesen Satz in der folgenden modificirten Form aussprechen: Wenn keiner der Factoren des Productes null ist, und die Summe $\sum b_{\varkappa}$ einen endlichen Werth hat, so ist das Product endlich und von Null verschieden. Wir wollen noch als Ergänzung den Fall betrachten wo $\sum b_\lambda = \infty$. Hierbei unterscheiden wir mehrere Fälle.

1) Sämmtliche b's sind positiv, alsdann ist das Product ∞, denn $1 + \sum b_\lambda + \dots$ ist wegen $\sum b_\lambda = \infty$ unendlich groß, und ~~dann~~ dazu kommen noch positive Glieder.

2) Einige der b's sind negativ, aber ihre Anzahl ist endlich, alsdann gilt dasselbe, ausgenommen den Fall, wo einer der Factoren Null ist.

3) Mögen die negativen b's in unendlicher Anzahl vorkommen, alsdann zeigen wir, daß das Product gleich Null ist.

Hierbei kommen wir auf eine zweite Definition der Zahlengröße Null. Früher haben wir dafür die Erklärung gehabt, daß es eine Zahl ~~gibt~~ ist, in welcher jedes ~~Zahl~~ Element sein entgegengesetztes vorfindet. Manchmal hat man aber andere Form der Null zu betrachten. Es kann nämlich in einer solchen Form vorkommen, daß man durch keine Transformation im Stande ist, die Elemente so zu theilen, daß jedem das entgegengesetzte entspricht. Wenn ich aber von einer Zahl nachgewiesen habe, daß sie positiv ist, und kleiner als jede beliebig angenommene noch so kleine positive Größe, so ist die

Zahl streng Null. Denken wir uns nämlich eine Zahl gegeben in einer Form aus der man nicht ersehen kann, ob in jedem Elemente derselben das entgegengesetzte vorkommt, von der wir wissen, dass sie positiv ist; so denken wir uns transformirt in eine Reihe von positiven Element. Nun möge das Element $\frac{1}{g_1}$ vorkommen, da nun diese Zahl $< \frac{1}{g_1}$ sein soll, so muss das Element $\frac{1}{g_1}$ auch sein entgegengesetztes finden, das nächste kleinere Element sei $\frac{1}{g_2}$, da nun die Zahl auch $< \frac{1}{g_2}$ ist, so muss auch das entgegengesetzte in $\frac{1}{g_2}$ vorkommen. Auf diese Weise fortschliessend kommen wir zu dem Resultate, dass in der Zahl begrifflich zu jedem Elemente das entgegengesetzte sich vorfindet. Eine solche Zahl ist aber die Null.

Nun betrachten wir das Product.

$$(1-b_1)(1-b_2)\ldots = 1-\Sigma b_\mu + \Sigma b_\mu b_\nu + \ldots$$

Wir zeigen das unter der Voraussetzung dass $b_1 b_2 \ldots < 1$ die Zahl $(1-b_1)$ — wenn sie nicht Null ist nothwendig positiv sein muss. Wir betrachten den Factor

$$\frac{1}{1-b_1} = 1 + \frac{b_1}{1-b_1} \text{ alsdann ist}$$

$$\Pi \frac{1}{1-b} = \Pi\left(1+\frac{b}{1-b}\right)$$ Jetzt ist $\frac{b}{1-b}$ positiv

Also habe ich

$$\Pi\left(1+\frac{b}{1-b}\right) \text{ sicher } > 1 + \Sigma \frac{b}{1-b}$$

Da nun $b<1$, also $\frac{b}{1-b} > b$ so ist $\Sigma \frac{b}{1-b} = \infty$ da ja $\Sigma b = \infty$

Also haben wir sicher

$$\Pi\left(\frac{1}{1-b}\right) > \infty$$ d. h. dies ist eine Größe, die größer ist, als jede beliebig große Zahl d. h.

$$m < \Pi\frac{1}{1-b}$$

nehme ich von dem Producte einer endlichen Anzahl von Gliedern, so kann ich immer bewirken, daß

$$m < \frac{1}{1-b_1}\cdot\frac{1}{1-b_2}\cdots\frac{1}{1-b_\nu}$$ Setzen wir nun

$$p = \Pi(1-b)$$ so ist

$$p\cdot m < \frac{1}{1-b_1}\cdot\frac{1}{1-b_2}\cdots\frac{1}{1-b_\nu}\,\Pi(1-b)$$ also

$$p\cdot m < (1-b_{\nu+1})(1-b_{\nu+2})\cdots$$

da nun die $b_{\nu+1}, b_{\nu+2}\cdots < 1$ ist, so ist

$p\,m$ jedenfalls positiv und gleichzeitig sieht man, daß es kleiner ist als 1 d. h.

$$p\,m < 1 \text{ also}$$

$$p < \frac{1}{m}.$$

Wenn also p nicht null ist, so muß es jedenfalls positiv sein. Da ich nun m beliebig groß nehmen kann, so ist p eine positive Zahl, die kleiner ist, als eine beliebig kleine positive Größe $\frac{1}{m}$. D. h. p muss streng null sein. Sind einige der b's größer als 1, so sondere ich sie und der Satz gilt dann ganz allgemein, sobald die b's von einer Stelle kleiner als 1 werden. Wenn man nun unendlich viele positive und unendlich viele

negative Glieder hat, so kann man das Product theilen.
Dieser Satz kann auch als Kriterium dienen, um die unendlichen Reihen zu untersuchen.
Wir nehmen z. B. die Reihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

von der wir nachweisen wollen, dass ihre Summe unendlich gross ist. Bilden wir das Product

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots$$

Wenn die Reihe endlich wäre, so müsste das Product einen endlichen von Null verschiedenen Werth haben. Heben wir nun aus dem Producte beliebig viele Glieder, so haben wir

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$, da aber die übrigen Factoren des Productes positiv sind, und kleiner als 1, so haben wir

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots < \frac{1}{n}$$

Demnach ist das Product eine positive Zahl, die kleiner ist als jede beliebige kleine Grösse $\frac{1}{n}$, d. h. das Product ist Null, demnach muss

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots = \infty$$

Einführung der complexen Zahlengrössen im engeren Sinne des Wortes.

Wir haben im Vorigen gezeigt, wie man zu der Einführung ganzer entgegengesetzter Zahlen und ihren genauen Theilen geführt wird; wie sich dann für alle aus den beiden entgegengesetzten Grundeinheiten +1, −1, gebildeten Zahlengrößen die Grundoperationen gestalten. Vor allem war es aber wichtig, daß für alle Zahlengrößen dieser Art dieselben Regeln des Operirens gelten, welche für die positiven ganzen Zahlen geltend sind. Haben wir nun eine gewisse Anzahl von diesen Zahlen a, b, c .... so werden wir durch die Grundoperationen geführt zu Summen, Aggregaten von Producten und Quotienten. Die Multiplication und Addition führt uns ~~nur~~ nur auf Aggregate von Producten ~~wie~~ von a, b, c ... nur auf die sogenannten ganzen Functionen von a, b, c ... Diese ganzen Functionen werden uns wiederum Zahlengrößen geben, die demselben Gebiete angehören, wie a, b, c ...

Auf diese Weise koennen wir aus gegebenen Zahlen neue Zahlen herleiten. Man kann aber auch das indirecte Verfahren einschlagen, indem man z. B. frägt, wie muß ich die Zahlen wählen, damit das Product einen vorgeschriebenen Werth hat. Dies führt uns auf die Theorie der Gleichungen. Jede umgekehrte Operation läßt sich schließlich auf die Frage bringen: Man hat eine ganze Function von a, b, c ... G(a, b, c ...), worunter man eine der Größen noch unbestimmt läßt; wie muß man nun diese unbestimmte Größe wählen, damit $g(a, b, \dots)$ einen vorgeschriebenen Werth hat. Wir beschäftigen uns nun vorzugsweise mit quadratischen Gleichungen. Es sind a, b, gegeben, wie muß man nun x wählen, damit $x^2 + ax + b = 0$. Diese Form läßt sich schließlich auf die Gleichung zurückführen $x^2 = a$. Nun fragen wir, wie muß man x annehmen, damit

$$x^2 = -1.$$

Wir sehen ohne Weiteres, daß x weder Null, noch eine positive, noch eine negative Zahlengröße sein kann. In unserem Zahlengebiete, das wir bis jetzt betrachtet haben, gibt es also keine solche Zahlengröße, die die Bedingung $x^2 = -1$ erfüllen könnte. Man muß also hier entweder neue Zahlenformen einführen, oder auch die Forderung als vollständig unmöglich ansehen. Die Unmöglichkeit der Forderung ist aber nur dadurch beschränkt, daß es auf unserem Zahlengebiete keine solche Zahlen gibt, es kann aber wohl möglich sein, durch Einführung neuer Zahlen, die Aufgabe auch in diesem Falle zu lösen. Man hat demnach, um diese Aufgabe immer lösbar zu machen, schon früher neue Zahlen eingeführt, die man imaginäre

Zahlen nannte. Analog wie man die Aufgabe $x^2 = 1$ durch $x = \sqrt{1}$ löste, hat man sich also auch hier gedacht, dass die Zahl x, welche die Gleichung

$x^2 = -1$ befriedigt, die Form hat

$$x = \sqrt{-1}.$$

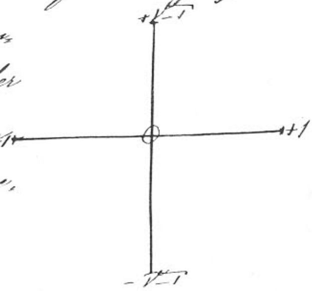
Man hat also, durch Nothwendigkeit ~~gedrungen~~ gezwungen, die Zahl $\sqrt{-1}$ eingeführt, ohne jedoch das Wesen und die reale Existenz der Zahl auf zu erklären; man hat es als Zeichen angesehen, mit dem man operirte, ohne es als wirklich existirend anzusehen. Nun machte Euler die Bemerkung, dass wenn man sich für e^x, $\sin x$, $\cos x$, ~~x~~ der Reihen denkt und statt x in e^x den Werth $x\sqrt{-1}$ setzt, und mit dem Zeichen $\sqrt{-1}$ so operirt, dass $(\sqrt{-1})^2 = -1$ ist, dass man dann die merkwürdige Relation erhält

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} . \sin x$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} . \sin x .$$

Euler erkannte die Richtigkeit der Resultate, wobei er $\sqrt{-1}$ anwandte, und machte besonders aufmerksam auf den Umstand, dass die rein arithmetisch definirten Functionen mit den rein geometrisch definirten in einem einfachen Zusammenhange stehen. Er benutzte die Regeln der Operationen mit dem Zeichen $\sqrt{-1}$ und kam immer, auf einem überraschend einfachen Wege, zu Resultaten, die man auf anderen mühsamen Wegen gefunden hatte. Auf diese Weise erkämpften sich die imaginären Größen das Recht der Existenz in der Mathematik immer mehr. Besonders war es eigentlich der Geist der Mathematik, der nur einheitliche und allgemeine Resultate verlangt, der die Nothwendigkeit der Einführung dieser Zahlengrößen in die Mathematik verlangte. So konnte man nicht den Satz aufrecht halten, daß eine algebraische Gleichung nten Grades genau n Wurzeln hat. Je mehr sich nun die Theorie der Functionen entwickelte, desto mehr sah man ein, daß man die Theorie nicht vollständig beherrschen kann, ohne Einführung der Zahlengrößen, die aus den ursprünglichen und den imaginären Einheiten zusammengesetzt sind. Erst nach Zulassung dieser complexen Zahlen für die Argumente der ~~[illegible]~~ Variablen, konnte man z. B. den allgemeinen Satz aufstellen, daß eine eindeutige analytische Funktion, wenigstens für einen Werth der ~~[illegible]~~ Variablen null und ebenso unendlich groß wird (sin x, cos x). Nun wußte man schon lange die realen positiven und negativen Zahlengrößen geometrisch zu deuten; man bemühte sich also auch die imaginären Zahlengrößen geometrisch zu deuten. Die ältesten Versuche sind richtig, und dem Wesen der imaginären Größen

vollständig entsprechend, obgleich die Herleitung der geo-
metrischen Construction derselben immer auf einem un-
klaren Principe beruhte. Man hatte z. B. die Construction
hergeleitet aus der Proportion $1 : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : -1$, worin $\sqrt{-1}$
als die ~~mittlare~~ mittlere proportionale Größe auftritt, und hat
hieraus gefolgert, daß diese Größe zwischen -1 u $+1$ liegen
muss, auf der Senkrechten, so daß man für diese Größe
und ihre entgegengesetzte die neben-
stehende Figur hatte man gelangt aber
ohne Weiteres zu dieser Construction
nach den Regeln der Addition, Subtrac-
tion u. s. w. geometrischer Strecken.



Deshalb wollen wir einiges aus die-
ser Theorie erwähnen. Wir nennen
ein Stück gerader Linie, geometrische
Strecke, wenn wir sowohl ihre Länge, als auch ihre
Richtung in's Auge fassen. Zwei geometrische Strecken
heißen gleich, wenn sie gleiche Länge und gleiche Richtung
haben. Diese Definition müßte gerechtfertigt werden, da-
durch daß man zeigt, daß wenn $a = b$, $b = c$, daß dann
auch $a = c$ ist. Haben wir eine Strecke $\alpha\beta$, welche der
Richtung $\alpha \longrightarrow \beta$ von α nach β genommen wird, so
theilt diese Strecke die Ebene in 2 Theile, die linke und

rechte Seite (Gleichnamige Seiten 2. Theil). Nehmen wir nun 4 Strecken a, b, c, d, so erklären wir die Proportion

$$a : b = c : d$$

auf die Weise, dass 1) die Längen sich so verhalten müssen und dass 2) die Strecke d an derselben Seite von c liegen muss ~~von c~~, wie b an a, (die Gleichheit der Winkel zwischen den Strecken).

Dann kann man die Addition der Strecken definiren. Soll man eine Strecke aus a zu b addiren, so ziehen wir aus α eine Strecke $\alpha\beta = a$;

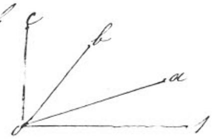
dann aus β ziehen wir $\beta\gamma = b$ und definiren $\alpha\gamma = a + b$. Damit die Richtigkeit dieser Definition klar sei, muss man zeigen zunächst, dass diese Operation von der Wahl des Punktes α unabhängig ist, und dass dann alle Gesetze des Addirens, welche für die Zahlengrößen bestehen, auch bei den Strecken gültig sind. Dies alles läßt sich aber sehr einfach zeigen. Auch sieht man, dass diese Definition mit derjenigen übereinstimmt, welche die Mechanik für die Addition der Kräfte oder Geschwindigkeiten gibt.

Aus der Addition folgt ohne Weiteres die Subtraction, als die Addition der entgegengesetzten Strecken.

Dann folgt die Definition der Multiplication zweier Strecken $oc = oa \cdot ob$ aus der Proportion

$$oc : oa = ob : 1$$

das Product soll aus dem Multiplicandus so gebildet werden, wie der Multiplicator aus 1. Um dies geometrisch auszuführen, denken wir uns aus 0 3 Strecken 01, $0a$, $0b$ gezeichnet und construiren nun oc, so daß der Winkel $aoc = 10b$ und machen ihn so groß, daß der Länge nach $oc : oa = ob : o1$ sei.

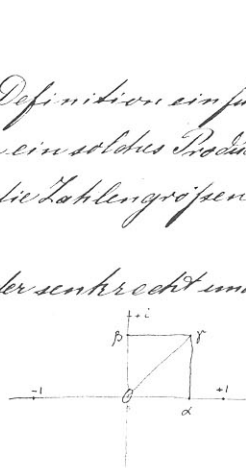


Alsdann definiren wir oc als das Product von oa und ob

$$oc = oa \cdot ob.$$

Man kann aber mit Recht diese Definition einführen, wenn man nur zeigt, daß für ein solches Product alle Gesetze des Multiplicirens für die Zahlengrößen bestehen.

Denken wir uns nun 2 auf einander senkrecht und bezeichnen die Einheiten der einen mit $+1$, -1, die der andern mit $+i$, $-i$;



Die Strecke $o\gamma$ koennen wir darstel.

len als die Summe von $o\alpha$ u. $o\beta$; $o\gamma = o\alpha + o\beta$. Auf diese Weise werden wir jede aus den Einheiten $+1, -1, +i, -i$ zusammengesetzten Grössen geometrisch darstellen koennen durch Punkte der Ebene und die Gesetze der Grundoperationen werden auch veranschaulicht. Nun kann man fragen, was bedeutet die Einheit $+i$, welche wir geometrisch als die Senkrechte dargestellt haben und erhalten leicht die Antwort, dass $i = \sqrt{-1}$, $-i = -\sqrt{-1}$. Man koennte auch umgekehrt fragen, ob man die Grösse $\sqrt{-1}$ geometrisch zeichnen koennte nach den obigen Methoden, und würde die ganz reale Antwort erhalten, dass geometrisch $\sqrt{-1} = Oi = i$ ist. Hieraus zieht man die volle Berechtigung der Einführung dieser Grösse in die Mathematik, auch ist hiermit die Realität derselben nachgewiesen auf einem geometrischen Wege. Die rein arithmetische Definition der complexen Grössen, als auch ihre arithmetische Interpretation verdanken wir Gauss. Gauss wurde bei der Theorie der biquadratischen Reste genöthigt, Zahlen von der Form $a + b\sqrt{-1}$ einzuführen, statt der bis ~~jetzt~~ zu jener Zeit in der Zahlengrösse theorie üblichen ganzen Zahlen. Die arithmetische Interpretation der imaginären Zahlen gibt nun Gauss folgendermassen. Man denke sich eine unendliche

Reihe von Dingen welche wir uns als Punkte einer Geraden veranschaulichen koennen und zwar nehmen wir eine Reihe aequidistanter Punkte. Wenn man sich in diesem Gebiete orientiren will, so nehme man als Ausgangspunkt einen beliebigen Punkt z. B. a. Dieses hat nun zwei benachbarte, die wir mit b u b' bezeichnen. Nun bezeichnen wir den Uebergang von a nach b, den wir einen Schritt nennen wollen mit +1. Wenn man nun von dem Punkte a zu einem beliebigen gelangen will, so müssen wir von a zu dem benachbarten b, dann von diesem zu dem benachbarten c u. s. w. gelangen. Das Durchgehen von a nach b bezeichnen wir als einen Schritt, und den von a nach b' als den entgegengesetzten. Durch diese Feststellung ist die Folge der Punkte definirt. Einen Uebergang zum folgenden nennen wir positiv, zum vorhergehenden negativ. Auf diese Weise haben wir die Bedeutung der ganzen positiven und negativen Zahlen festgestellt. Wir koennen uns nun eine Folge von Punktreihen denken. Zur Veranschaulichung denken wir uns in der ersten Linie einen Punkt a fixirt, ziehen durch diesen eine Gerade, wählen auf derselben eine Reihe aequidistanter Punkte und ziehen durch dieselben zu der

1ten parallelen Linien, auf denen wir wiederum aequidistante Punkte wählen. Auf diese Weise erhalten wir ein Netz von Punkten, die die ganze Ebene erfüllen. Um sich nun in diesem Gebiete zu orientiren, gehen wir von einem festen Punkte aus. Wir erhalten zunächst benachbarte Linien. Auf jeder Linie müssen wir nun die Punkte fixiren, indem wir auf ihnen feste Punkte annehmen. Dies koennen wir erreichen, indem wir z. B. auf jeder der parallelen Linien, denjenigen Punkt als Ausgangspunkt nehmen, der durch die alle parallelen scheidenden Gerade bestimmt wird, welche durch a geht. Nach dieser Feststellung koennen wir von jedem Punkte 4 Schritte machen. Bezeichnen wir einen Schritt auf den parallelen Linien mit +1, den andern mit −1, den Schritt von der einen parallelen zur andern mit +i und den entgegengesetzten mit −i, so koennen wir jeden Schritt von a aus zu einem beliebigen Punkte der Ebene darstellen durch die Schritte

$$+1, -1, +i, -i.$$

Wir koennen nun diese Schritte rein algebraisch auffassen. Denken wir uns eine unendliche Reihe von Dingen, sodass jedes 2 benachbarte hat; diese Reihe denken wir uns wiederholt, sodass jede Reihe 2 benachbarte

Reihen hat, so haben wir die Möglichkeit von einem Ding zu vier anderen zu gelangen. Bezeichnen wir den Uebergang von einem Dinge zum andern derselben Reihe mit +1, −1, und zum anderen einer anderen Reihe mit $+i, -i$, so haben wir eine klare Vorstellung von Zahlen, die aus 4 Einheiten gebildet sind. Auch sehen wir hieraus die Notwendigkeit der i neuen Einheiten.

Nun handelt es sich darum die Gesetze der Grundoperationen für diese Zahlen aufzustellen, so daß die für ganze Zahlen bestehenden Grundgesetze festgehalten werden. Daß die Addition und Subtraction dieser neuen Zahlen möglich ist, folgt ohne Weiteres aus den ersten Sätzen über das Addiren und Subtrahiren. Es ist aber zu untersuchen, wie sich die Multiplicationsregeln auf diese neue Zahlen erweitern lassen.

Gauss verfährt folgendermaßen. Es seien die 4 Einheiten in der Folge

$$+1, +i, -1, -i, \text{ oder allgemein}$$

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3.$$

Dann hat jede Einheit eine benachbarte, welche wir die adjungirte nennen wollen, so daß ε_1 die adjungirte Einheit zu ε_0 ist, und ε_1 hat ε_2 als die adjungirte Einheit u. s. w. Wir haben alsdann folgende Anordnung der

Einheiten

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{array}$$

Denken wir uns unter α eine beliebige complexe Zahl, ein Aggregat von den Einheiten.

$\alpha = (\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$. Zu dieser Zahl koennen wir die adjungirte Zahl finden, indem wir an die Stelle der Einheiten $\varepsilon_0\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3$ ihre adjungirten setzen, sodass wir erhalten:

$$\alpha_1 = (\varepsilon_3\, \varepsilon_0\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2);$$

auf diese Weise erhalten wir folgende Zusammenstellung der complexen Zahlen:

$$\begin{aligned} \alpha &= (\varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_0\, \varepsilon_1) \\ \alpha_1 &= (\varepsilon_3\, \varepsilon_0\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2) \\ \alpha_2 &= (\varepsilon_0\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3) \\ \alpha_3 &= (\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_0) \\ \alpha_4 &= (\varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_0\, \varepsilon_1) = \alpha. \end{aligned}$$

Nun schliesst Gauss folgendermassen. Wenn a, b ganze positive Zahlen, Vielfache einer Einheit sind, so ist a das a fache von der Einheit und a b das a fache von b.

Es ist somit das Product ab so gebildet aus dem Multiplicandus, wie der Multiplicator aus der Einheit. Diese Definition kann man auf complexe Zahlen sofort übertragen. Eine complexe Zahl a mit einer andern b zu multipliciren heisst eine Zahl zu finden, die aus dem Multiplicandus und den adjungirten Zahlen so gebildet ist, wie der Multiplicator aus der positiven Einheit und ihren adjungirten gebildet ist. Natürlich müssen hierbei die Grundgesetze des Multiplicirens für die aus 2 Einheiten gebildeten Zahlen bestehen z. B. Summe von solchen Zahlen wird mit einer Summe multiplicirt, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem der andern Summe multiplicirt. Nun ergeben sich leicht aus der Definition der Multiplication folgende Gesetze für die Multiplication der Einheiten

$$\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_1 \qquad \varepsilon_1\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \qquad \varepsilon_1\varepsilon_3 = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_2 = \varepsilon_2 \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_3 = \varepsilon_3 \qquad \varepsilon_1\varepsilon_3 = \varepsilon_0$$

welches die einfachsten sind, die sich überhaupt ergeben können.

Aus diesen Definitionen können wir alle Gesetze herleiten. Man kann auch die genauen Theile einführen; geometrisch ist dies ohne weiteres klar, denn man kann

z. B den Schritt $\varepsilon_0 = ab$ in beliebig viele gleiche Theile theilen, welche die genauen Theile des Schrittes ab repräsentiren werden. Theilt man den Schritt in n gleiche Theile, so wird jeder neue Schritt die Eigenschaft haben, dass n solche Schritte den ursprünglichen Schritt ergeben.

Das Resultat der bisherigen Untersuchung ist also: Man muss in die Arithmetik einführen Grössen, welche aus 4 Einheiten gebildet sind, und ihren genauen Theilen. Bilden wir nun aus diesen Elementen $\varepsilon_0\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ und ihren Theilen Zahlengrössen, so können wir für diese complexen Zahlen die Additions und Subtractionsgesetze herleiten. Um noch die Multiplicationsgesetze für diese Zahlen zu finden, müssen wir die Gesetze für die Multiplication der Elemente überhaupt feststellen. Was heisst $\frac{\varepsilon}{m}\cdot\frac{\varepsilon'}{n}$ wo ε u ε' wieder 4 Einheiten bedeuten mögen. Setzen wir $\frac{\varepsilon}{m}\cdot\frac{\varepsilon'}{n} = x$. nach den allgemeinen Multiplicationsgesetzen erhalten wir indem wir das x ver m fachen

$$m x = m\cdot\frac{\varepsilon}{m}\cdot\frac{\varepsilon'}{n} = \left(m\cdot\frac{\varepsilon}{m}\right)\cdot\frac{\varepsilon'}{n} =$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{m}+\frac{\varepsilon}{m}+\dots(m\ \text{mal})\right)\frac{\varepsilon'}{n} = \varepsilon\cdot\frac{\varepsilon'}{n}$$ Also

$$m x = \varepsilon\cdot\frac{\varepsilon'}{n}$$ Dieses ver n facht gibt

$$n(m x) = n.\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon'}{n} = \varepsilon.\left(n\cdot\frac{\varepsilon'}{n}\right) = \varepsilon\left(\frac{\varepsilon'}{n}+\frac{\varepsilon'}{n}+\dots(n)\right) =$$

$$= \varepsilon\cdot\varepsilon'$$ also da

$$n(m\,x) = (n \cdot m)\,x$$

$(n \cdot m)\,x = \varepsilon\,\varepsilon'$ folglich

$$x = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon'}{n \cdot m}$$

also $\quad \frac{\varepsilon}{m} \cdot \frac{\varepsilon'}{n} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon'}{m \cdot n}$

Da nun die Definition für die Grundeinheiten festgestellt sind, so sind hiermit alle Gesetze des Multiplicirens der Elemente gegeben, und nun koennen wir alle Zahlengrössen unseres Gebietes mit einander multipliciren, indem wir jede derselben in ihre Elemente auflösen und dann die Elemente miteinander multipliciren. Zunächst wäre nun zu zeigen, dass alle Gesetze des Rechnens aufrecht erhalten werden; besonders ist aber das Rechnen mit unendlich vielen solchen Grössen in's Auge zu fassen. Bevor wir aber dazu übergehen, wollen wir noch einige allgemeine Bemerkungen vorausschicken. Die Gauss'schen Definitionen setzen eigentlich nichts voraus, was die Grundeinheiten sind und sie reichen vollständig aus. Die Adjunction der Elemente und die übrigen Definitionen scheinen aber willkürlich zu sein. Dies ist aber berechtigt, da hierdurch der Zweck erfüllt wird und diese Definitionen schliessen sich an die geometrische Darstellung an. Es drängt sich zunächst die Frage, lassen sie die Gaussischen Definitionen für die Mul-

tiplication der Einheiten als nothwendig begründen?
Man kann diese Frage leicht entscheiden, indem man von dem Begriffe der Multiplication ausgeht. Es seien ε_λ ε_μ zwei beliebige unserer Einheiten, so ist zunächst klar, dass das Product $\varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu$ eine Zahlengröße sein muss, die sich auf unserem Gebiete der Zahlen wiederum vorfindet. Bezeichnen wir mit a b c d .. abstracte aus einer unbestimmten Einheit gebildete Zahlen und mit $a\varepsilon_0$, $a\varepsilon_1$ .... dasjenige was aus den Zahlen wird, wenn man an die Stelle der unbenannten Einheit resp. der Einheiten $\varepsilon_0 \varepsilon_1$ ... setzt, so muss ganz allgemein sein

$$\varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu = a\varepsilon_0 + b\varepsilon_1 + c\varepsilon_2 + d\varepsilon_3$$

Also speciell

$$\varepsilon_1 \varepsilon_1 = a_1 \varepsilon_0 + b_1 \varepsilon_1 + c_1 \varepsilon_2 + d_1 \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = a_2 \varepsilon_0 + b_2 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 + d_2 \varepsilon \varepsilon_3$$

. . . .

wobei die a, b, c .. noch ganz willkürlich sein können. Nun ist die Frage, wie muss ich a_1 b_1 ... a_2 b_2 ... wählen, damit die Multiplicationsgesetze für ganze Zahlen auch hier bestehen? Zunächst kann man die Bedingung der Vertauschbarkeit der Factoren bei der Multiplication aufstellen. Diese gilt aber, wenn sie für die Elemente gilt.

Bilden wir nun

$\varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ und

$\varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1$ und setzen fest, daß

$\varepsilon_1 \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1$ sein soll, so bekommen wir unter den Zahlen $a_1\, a_2 \ldots$ ... Relationen. Auf diese Weise erkennen wir, daß die Anzahl der willkürlich anzu~~?~~nehmenden Größen a b. .. sehr beschränkt ist. Fügt man hierzu noch andere Bedingungen hinzu, wie z. B. daß die Multiplicationsgesetze sich am einfachsten gestalten sollen, so gelangt man zu einer solchen Wahl ~~die~~ der $\varepsilon_0\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3$ daß die Multiplication der Elemente sich identisch mit der Gaussischen ergibt.

Hieran kann man noch eine interessante Frage knüpfen. Kann man beliebig viele Einheiten in die Arithmetik einführen, sodaß die Gesetze für die complexen Zahlen dieselben bleiben, wie bei 4 Einheiten? Zunächst kann man die Gaussischen Definitionen der Adjunction der Elemente auf ~~?~~ mehrere $\varepsilon_0\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4\, \varepsilon_5 \ldots$ übertragen, und auch die Definition der Multiplication der complexen Zahlengrößen festhalten. Es ergibt sich als Resultat der Untersuchung, daß es wirklich möglich ist neue Einheiten einzuführen mit Beibehaltung der Gesetze der 4 Grundoperationen. Nach Einführung dieser neuen complexen Zahlen ~~würde~~

würde man vielleicht noch nicht gelöste Fragen der Algebra lösen koennen. So würde man z. B. den Charakter solcher transcendenten Gleichungen kennen lernen, die für keinen Werth der Vorzahlen im Gebiete der complexen Zahlen aus 4 Einheiten null werden, d. h. welche keine Wurzeln haben.

Diese Speculation hat zuerst Gauss aufgeworfen, indem er durch die 3 fache Mannigfaltigkeit der Raumgrößen darauf geführt wurde. Diesen Gegenstand hat Weierstraß in den Seminarübungen durchgenommen (Siehe meine Ausarbeitung der Notizen aus den Seminarübungen).

Das vollständige Resultat der Untersuchung ist folgendes. Es ist ~~nöthig~~ möglich neue Zahlengrößen in die Arithmetik einzuführen, die aus mehr als 4 Grundeinheiten gebildet sind; alsdann müßte der Satz der Algebra, daß wenn $a\,x = 0$ und a von 0 verschieden ist, $x = 0$ sein muß, modificirt werden, indem es in dem erweiterten Gebiete der Zahlen solche Zahlengrößen gibt, die miteinander multiplicirt null geben, ohne daß eine derselben null ist. Auf diese Weise müßte die ganze Algebra modificirt werden. Ferner zeigt es sich, daß bei Annahme von 6 Einheiten die Quadrat~~wurz~~wurzeln nicht immer möglich ~~ist~~ sind, so daß man 8 Einheiten einführen muss. Unter diesen werden je 2 entgegengesetzte sein müßen.

Bezeichnen wir die in keiner Beziehung in Bezug auf die Addition stehenden Einheiten als die Haupteinheiten so ergibt sich, dass bei Beibehaltung der Grundgesetze der Arithmetik, Zahlen aus mehr als 2 Haupteinheiten für die Analysis nicht brauchbar sind. Nehmen wir allgemein 2r Haupteinheiten, so würde der Satz über die Anzahl der Wurzel ~~ohne~~ einer algebraischen Gleichung so lauten: Jede Gleichung $n$ten Grades hat genau n^r Wurzeln. Es wäre also eine ganz andere Algebra aufzustellen.

Jetzt kehren wir zu der Begründung der Rechnungsregeln für complexe Zahlen zurück. Denken wir uns α, β Zahlen, die aus der Einheit $\varepsilon_0 = +1$ gebildet sind, oder auch ihre entgegengesetzte, so läßt sich jede Zahlengröße unseres Gebietes auf die Form bringen.

$$a = \alpha + \beta i$$

wobei βi nichts weiter bedeutet, als dasjenige was aus β wird, wo an die Stelle des Elementes ε_0 das Element $+i$ tritt. Eine zweite Zahl sei

$$b = \alpha' + \beta' i$$

Sollen wir nun ab bilden, so geschieht dies nach den allgemeinen Regeln, indem man jedes Element von a mit jedem von b multiplicirt, und dann die gleichen

Elemente vereinigt. Dies erreichen wir aber auch indem wir

$(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i)$ so ausführen,

daß wir jeden Summanden des einen Factors mit jedem des anderen multipliciren, daraus folgt:

$\alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i$, also

$ab = \alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i$

Wobei $(\alpha\beta' + \beta\alpha')i$ bedeutet, daß an die Stelle von $+1, -1$, in $(\alpha\beta' + \beta\alpha')$ resp $+i, -i$ treten soll.

Dann koennen wir ohne Weiteres zeigen, daß

$$ab = b.a$$

$$(ab)c = (ac)b = a(bc)$$

$(a \pm b)c = ac \pm bc$ ist, durch wirkliches Ausführen der Multiplication. Auch kann man leicht zeigen; daß wenn $ab = 0$, dies nur dann möglich ist, wenn einer der Factoren Null ist. Zunächst ist es klar, daß wenn

$a = \alpha + \beta i = 0$ sein soll, dies nur dann möglich, wenn $\alpha = 0, \beta = 0$. Denn man kann durch keine Umformung die Größe so transformiren, daß sich die Elemente i gegen die Elemente 1 wegheben. Nehmen wir nun an, daß das Product $a.b = 0$ so erhalten wir

$$\alpha\alpha' - \beta\beta' = 0$$

$\alpha\beta' + \beta\alpha' = 0$ und hieraus

$$(\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' + \beta\alpha')^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) = 0$$

Nun sind $\alpha, \beta, \alpha' \beta'$ gewöhnliche Zahlen, die aus der Einheit +1, −1, gebildet ~~werden~~ sind, dasselbe gilt also auch von $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2$. Nun gilt für gewöhnliche Zahlen mit einer Haupteinheit der Grundsatz, daß das Product ~~wieder~~ zweier solchen Zahlen ~~und~~ nur dann Null sein kann, wenn es einer der Factoren ist. Es muß somit einer der Factoren z. B. $\alpha'^2 + \beta'^2 = 0$, dies ist aber auf keine andere Weise erfüllbar, als wenn

$$\alpha' = 0$$

$$\beta' = 0$$

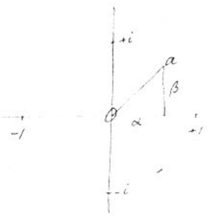
Wenn also $a \cdot b = 0$ so muß z. B. $b = 0$ sein. Daraus folgt dann: wenn $a \cdot b = a' \cdot b$ es muss $a = a'$, denn aus $ab = a'b$ folgt $ab - a'b - (a - a')b = 0$ wenn also b nicht Null ist, so muss $a - a' = 0$ oder $a = a'$.

Sätze über die Endlichkeit der unendlichen Reihen und Producte von complexen Größen.

Wenn wir uns die complexe Zahl a auf die Form gebracht denken

$a = \alpha + \beta i$ wo α β Zahlen sind, die aus der positiven oder negativen Einheit und ihren Theilen gebildet sind, so nennen wir α u β die Coordinaten der complexen Zahl ~~$\alpha + \beta i$ was mit der Definition~~

Die Zahl absolut genommen $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ nennen wir den absoluten Betrag der complexen Zahl $\alpha+\beta i$; was mit der Definition des absoluten Betrages für Zahlen mit # den Einheiten $+1$, -1, übereinstimmt. Diese Größen haben auch bei der Construction geometrische Bedeutung:



α β sind die Coordinaten und der absolute Betrag ist die Länge oa.

Hilfsätze

I Der absolute Betrag der Summe zweier complexen Größen ist nie größer als die Summe der absoluten Beträge der beiden Zahlen, und der absolute Betrag der Differenz zweier complexen Zahlen ist nie kleiner als die Differenz der absoluten Beträge der beiden Zahlen, diese Differenz dem absoluten Werthe nach genommen.

Es seien 2 complexe Zahlen

$$a = \alpha+\beta i \qquad 1$$
$$b = \alpha'+\beta' i$$

Wir haben dann

$$a+b = (\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')i \qquad 2$$

Bezeichnen wir die absoluten Beträge von a, b, $a+b$ respective mit ρ, μ, ν so haben wir

$$\nu^2 = (\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2 \qquad 2$$

$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2,$

$\mu^2 = \alpha'^2 + \beta'^2$

Nun folgt

3 $$\nu^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\alpha\alpha' + 2\beta\beta'$$

Ferner ist ~~also~~ aber

$$(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2 = (\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2) - (\alpha\beta'-\beta\alpha')^2 \text{ d.h.}$$

$$(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2 \leq \lambda^2 \mu^2 \text{ oder}$$

4 $$|\alpha\alpha'+\beta\beta'| \leq \lambda . \mu, \text{ wobei}$$

$|\alpha\alpha'+\beta\beta'|$ den absoluten Betrag von $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ bezeichnen soll. Mit Rücksicht auf 3 erhalten wir $\nu^2 \leq \lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu$ oder

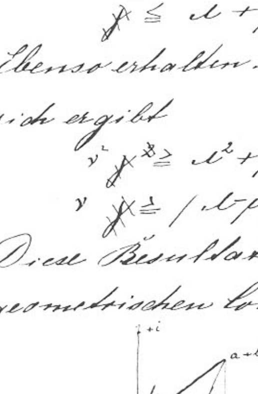
5 $$\nu \leq \lambda + \mu$$

Ebenso erhalten wir für die Differenz $a - b$, wobei sich ergibt

$$\nu^2 \geq \lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu \text{ oder}$$

6 $$\nu \geq |\lambda-\mu|$$

Diese Resultate kann man ohne Weiteres aus der geometrischen Construction herleiten nach den Sätzen



daß in jedem ebenen Dreiecke die Summe zweier Seiten nie kleiner als die 3te und die Differenz nie größer

Der erste Theil des Satzes läßt sich ohne Weiteres auf beliebig viele Grössen a, b, c... erweitern. Es ist stets

$$|a+b+c+\dots| \leq |a| + |b| + |c| + \dots$$

natürlich muss die Anzahl der Grössen endlich sein.

II Das Product von complexen Grössen hat einen absoluten Betrag, der gleich ist dem Producte der absoluten Beträge der Grössen, und der absolute Betrag des Quotienden ist gleich dem Quotienten der [illegible] Beträge. Es ist nämlich

$$ab = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)i \text{ also}$$

$$|ab|^2 = (\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) = |a| \cdot |b|.$$

Ebenso folgt sehr einfach

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Eine complexe Zahl ist endlich, wenn sowohl die erste als ~~an~~ auch die zweite Coordinate derselben einen endlichen Werth hat. Wenn wir eine Reihe von Grössen a haben $\Sigma a = \Sigma(\alpha + \beta i)$ so muss wenn Σa endlich sein soll, sowohl $\Sigma \alpha$ als auch $\Sigma \beta$ endlich sein.

1. Satz. Wenn eine unendliche Reihe von complexen Grössen so beschaffen ist, dass die Summe von beliebig vielen derselben ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine unveraenderliche positive Grösse g, so hat die Reihe einen endlichen Werth.

Die unendliche Reihe der Grössen sei:

[Reihe] $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$, — und sie sei so beschaffen, daß $|\Sigma'\alpha|$, die Summe von beliebig vielen der α, absolut genommen kleiner ist als g. Denken wir uns in unserer Reihe die Größe in der Form $\alpha + \beta i$ und heben zunächst diejenigen heraus in denen die α's positiv sind; diese seien

$$\alpha_1 + \beta_1 i,\ \alpha_2 + \beta_2 i, \dots$$

Nun liegt der absolute Betrag der Summe von beliebig vielen derselben unterhalb einer Grenze g, bezeichnen wir nun diesen mit $|\Sigma' a| = |\Sigma'(\alpha + \beta i)|$ so haben wir

$$|\Sigma'(\alpha+\beta i)| = \sqrt{(\Sigma'\alpha)^2 + (\Sigma'\beta)^2} < g$$

Also auch $\sqrt{(\Sigma'\alpha)^2} = \Sigma'\alpha < g$ d. h. die Summe von beliebig vielen der positiven α liegt unterhalb einer festen Grenze g. Heben wir nun diejenigen in denen die α's negativ sind, so haben wir für die Summe von beliebig vielen der α absolut genommen auch die Gleichung $\Sigma'\alpha_1 < g$. Dasselbe gilt für die β. Wenn also die Reihe die Eigenschaft hat, daß die Summe von beliebig vielen der a, die Summe ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine feste Grenze g, so hat die Reihe die Eigenschaft, daß die Summe der ersten Coordinaten $\Sigma\alpha$ und die Summe der zweiten

Coordinaten $\Sigma\,\beta$ endlich sind, das heisst $\Sigma\,\alpha$ ist selbst endlich. Dieser Satz, den wir früher für positive und negative Zahlen bewiesen haben, gilt in dieser Fassung ganz allgemein.

2. Satz. Wenn eine Reihe von complexen Grössen endlich ist in dem Sinne, daß die Summe der positiven Coordinaten α für sich, und die der negativen ebenfalls endlich ist, und die β's dieselbe Eigenschaft haben, so hat die Reihe der absoluten Beträge auch einen endlichen Werth.

Es seien die Größen

$$\alpha_1+\beta_1\, i,\ \alpha_2+\beta_2\, i,\ \alpha_3+\beta_3\, i,\ \ldots\ldots$$

Die absoluten Beträge sind dann

$$\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2},\ \sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2},\ \sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2},\ \ldots\ldots$$

Nun wollen wir mit $\alpha'\beta'$ die absoluten Beträge von α, β, bezeichnen, sodaß wenn α positiv ist, $\alpha'=\alpha$, wenn α negativ, $\alpha'=-\alpha$

Dann haben wir

$$\alpha_1^2+\beta_1^2 \leqq (\alpha_1'+\beta_1')^2 \text{ oder}$$
$$\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2} \leqq \alpha_1'+\beta_1'$$

Nach der Voraussetzung ist nun die Summe der positiven α endlich, und die Summe der negativen ebenfalls endlich, also ist auch $\Sigma\,\alpha_1'$ endlich

Daßelbe gilt für $\Sigma\,\beta_1'$ nun ist aber

$$\Sigma\,|\alpha+\beta i| = \Sigma\,\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leqq \Sigma\,(\alpha'+\beta')$$

Da nun $\sum(\alpha'_r+\beta'_r)$ endlich ist, so ist auch

$$\sum\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \text{ vom endlichen Werthe}$$

Dieser Satz läßt sich umkehren und lautet dann:

<u>3. Satz.</u> Wenn wir von einer Reihe complexer Größen wissen, daß die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder endlich ist, so ist auch die Summe der complexen Größen endlich, und zwar ist die Summe der pos. α und ng. für sich ~~fertode~~ endlich, und ebenfalls die Summe der pos. β u. ng β für sich.

Die Größen seien

$\alpha_1+\beta_1 i,\ \alpha_2+\beta_2 i, \ldots$ und es sei

$\sum\sqrt{\alpha^2+\beta}$ endlich. Bezeichnen wir wiederum mit

$\alpha'=|\alpha|$ so haben wir sicher

$\alpha'\leqq\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ daraus geht hervor daß

$\sum\alpha'$ einen endlichen Werth hat, folglich wird ~~sind~~ auch $\sum\alpha$ endlich sein, und zwar so, daß die Summe der Positiven α für sich und die der negativen für sich endlich ist. Da nun dieselbe Schlußfolgerung in Bezug auf β gilt, so hat die Reihe einen endlichen Werth in dem festgestellten Sinne.

<u>Anmerkung.</u> Die Definition der Endlichkeit ~~ist~~ von $\sum(\alpha+\beta i)$ ist so zu verstehen, daß immer $\sum\alpha$ und $\sum\beta$ endlich sind in dem früher

festgestellten Sinne, d. h. daß die positiven Glieder für sich und die negativen für sich in jeder Reihe einen endlichen Werth hat.

<u>Hilfsatz.</u> Haben wir eine unendliche Reihe von positiven Zahlen $R = \sum r$, welche eine endliche Summe liefert, so ist es stets möglich eine endliche Anzahl von Gliedern aus der Reihe abzusondern, so daß der Rest der Glieder eine Summe liefert, deren Werth unterhalb einer beliebig klein angenommenen Größe δ liegt, oder was dasselbe ist, daß die Differenz zwischen der ganzen Summe und der Summe der abgesonderten Größen kleiner ist als δ.

Es seien die r's gebildet aus $+1$ und den genauen Theilen von $+1$. Wir denken uns die $\sum r$ so gebildet daß die gleichen Elemente vereinigt sind, was doch möglich ist, da $\sum r$ endlichen Werth hat. Nehme ich nun δ willkürlich an, so kann ich stets ein Element $\frac{1}{n} < \delta$ finden, welches da wir hier $\delta < R$ voraussetzen koennen, in R enthalten ist. Wegen der Endlichkeit von R folgt, daß dieses Element nur endlich oft in R enthalten sein kann, so daß ich durch Vervielfachen dieses Elementes zu einer Zahl komme, die größer ist als $R = \sum r$.

Dasjenige Vielfache, welches noch in R enthalten ist sei $\frac{m}{n}$; wir koennen dann R so transformiren, dass wir setzen

$$R = \frac{m}{n} + \varepsilon$$

$$\text{wo } \varepsilon \leqq \frac{1}{n}$$

Es muss nach dem Begriffe der ~~Endhestlichkeit~~ Endlichkeit möglich sein, das R so umzuwandeln, dass $\frac{m}{n}$ darin wirklich vorkommt: nach dieser Umwandlung bleiben noch unendlich viele Elemente unberührt. Wir theilen das R in 2 Theile

$$R = \Sigma\, \alpha' + \Sigma\, \alpha''$$

~~so~~ wo das in $\Sigma\, \alpha'$ diejenigen Glieder darstellen soll, welche das Element $\frac{1}{n}$ enthalten; $\Sigma\, \alpha''$ dagegen die unendlich vielen noch unberührten.

Da nun $\Sigma\, \alpha' = \frac{m}{n} + \varepsilon'$, wo ε' eine näher nicht bekannte positive Grösse bedeutet, und

$$R = \frac{m}{n} + \varepsilon = \frac{m}{n} + \varepsilon' + \Sigma\, \alpha'' \text{ so ist}$$

$$\varepsilon' + \Sigma\, \alpha'' = \varepsilon \text{ oder}$$

$$\varepsilon' + \Sigma\, \alpha'' \leqq \frac{1}{n} \text{ also auch}$$

$$\Sigma\, \alpha'' \leqq \frac{1}{n}$$

Gehen wir nun zu der ursprünglichen Reihe $\overset{\Sigma r}{\Sigma\, \chi}$ zurück, so sehen wir dass die Elemente welche in $\Sigma\, \alpha'$ vorkommen, in endlicher Anzahl der $\overset{r}{\chi}$ vorkommen.

werden; wir koennen also stets bewirken daß

$\Sigma r' \quad \sum \gamma' \geqq \sum \alpha'$ und

$\Sigma r'' \quad \sum \gamma'' \leqq \sum \alpha''$ also haben wir

$\Sigma r'' \quad \sum \gamma'' \leqq \frac{1}{n}$, da aber $\frac{1}{n} < \delta$ so ist sicher

$\Sigma r'' \quad \sum \gamma'' < \delta$

Man kann also stets aus einer unendlichen Reihe mit einem endlichen Werthe eine endliche Anzahl ~~der~~ von Gliedern $\overset{\Sigma r'}{\sum} \gamma^{\times}$ so abzusondern, daß die Summe der übrigen $\overset{\Sigma r''}{\sum} \gamma^{*} < \delta$ oder

$\cancel{\sum \gamma - \sum \gamma^{\times}} < \delta$ $\Sigma r - \Sigma r' < \delta$ was zu beweisen war.

Dieser Satz gilt auch für die Reihen mit positiven und negativen Gliedern, wenn nur die Reihe endlich ist in dem bekannten Sinne.

Es sei nämlich

$$\sum \alpha = \sum \alpha_1 + \sum \alpha_2 \quad \sum \alpha_1 \text{ positiv } \sum \alpha_2 \text{ neg. Glied}$$

Nun ~~kommen~~ könen wir nach dem eben bewiesenen Satze

$\sum \alpha_1$ so theilen, daß

$\sum \alpha_1 = \sum \alpha_1' + \sum \alpha_1''$ und $\sum \alpha_1'' < \frac{\delta}{}$ ebenso

$\sum \alpha_2 = \sum \alpha_2' + \sum \alpha_2''$ wo $|\sum \alpha_2''| < \frac{\delta}{}$

und hieraus $\sum \alpha = \sum \alpha_1 + \sum \alpha_2 = \sum \alpha_1' + \sum \alpha_2' + \sum \alpha_1'' + \sum \alpha_2''$

Nun ist $|\sum \alpha_1'' + \sum \alpha_2''| < \delta$ Wir koennen also setzen

$\sum \alpha = \sum \alpha' + \varepsilon$ wo

$|\varepsilon| < \delta$.

man kann also aus einer Reihe von positiven und negativen Gliedern eine endliche Anzahl von Gliedern so absondern, daß der absolute Betrag des Restes kleiner ist als δ.

<u>Allgemeiner Satz</u>. Wenn wir eine Reihe von complexen Zahlen haben, deren Summe

$\Sigma(\alpha + \beta i)$ einen endlichen Werth hat, so kann man aus der Reihe stets eine endliche Anzahl von Gliedern so absondern daß:

1, Die Summe der abgesonderten Glieder von der Summe der ganzen Reihe sich um eine Größe unterscheidet, deren absoluter Betrag kleiner ist, als eine beliebig angenommene Größe δ.

2, daß dasselbe gilt, wenn man zu der Summe der abgesonderten Glieder beliebig viele der fortgelassenen addirt und

3) daß die Summe von beliebig vielen der fortgelassenen Glieder ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist als δ.

Da wir die Endlichkeit der Reihe in dem ~~fort~~ festgesetzten Sinne nehmen, so haben wir

$$\Sigma(\alpha+\beta i) = \Sigma\alpha + \Sigma\beta i, \text{ wo } \Sigma\alpha \text{ u } \Sigma\beta$$

endlich sind, so daß die positiven und negativen Glieder für sich endliche Summe liefern. Nun kann ich bewirken nach dem Hilfsatze dass.

$$\Sigma\, \alpha = \Sigma\, \alpha' + \varepsilon \qquad |\varepsilon| < \frac{\delta}{2}$$

$$\Sigma\, \beta = \Sigma\, \beta' + \varepsilon_1 \qquad |\varepsilon_1| < \frac{\delta}{2} \text{ ist.}$$

Hierbei ist aber zu bemerken, dass $\alpha' \beta'$ immer diejenigen der Coordinaten sein müssen, welche gleichzeitig in $\alpha + \beta i$ vorkommen. Dass es immer möglich ist die obigen Gleichungen zu befriedigen folgt durch folgende Ueberlegung. Scheiden wir aus $\Sigma\, \alpha$, $\Sigma\, \alpha'$, so dass $|\Sigma\, \alpha''| < \frac{\delta}{2}$ und die ~~dazugehörig~~ dazu gehörigen β mögen sein $\Sigma\, \beta''$. Angenommen dass $|\Sigma\, \beta''|$ nicht kleiner als $\frac{\delta}{2}$ wäre, so scheiden wir hieraus noch einige der β'' dass schliesslich $|\Sigma'\, \beta''| < \frac{\delta}{2}$ sein wird. Die den β'' in $\Sigma\, \beta''$ entsprechenden α'' werden um so mehr die Bedingung erfüllen dass $|\Sigma'\, \alpha''| < \frac{\delta}{2}$.

Verstehen wir unter $\begin{matrix}\Sigma\, \alpha' \\ \Sigma\, \beta'\end{matrix}$, diejenigen ausgeschiedenen Glieder aus $\begin{matrix}\Sigma\, \alpha \\ \Sigma\, \beta\end{matrix}$, die zusammengehören und die bewirken dass resp. $\begin{matrix}|\Sigma\, \alpha''| < \frac{\delta}{2} \\ |\Sigma\, \beta''| < \frac{\delta}{2}\end{matrix}$ ist, so koennen wir setzen:

$$\Sigma\, \alpha = \Sigma\, \alpha' + \Sigma\, \alpha'' = \Sigma\, \alpha' + \varepsilon \qquad |\varepsilon| < \frac{\delta}{2}$$

$$\Sigma\, \beta = \Sigma\, \beta' + \Sigma\, \beta'' = \Sigma\, \beta' + \varepsilon_1 \qquad |\varepsilon_1| < \frac{\delta}{2}$$

Da nun $\Sigma\, \alpha$ u $\Sigma\, \beta$ als auch $\Sigma\, \alpha'$ $\Sigma\, \beta'$ der Voraussetzung gemäss endlich sind, so haben wir

$$\Sigma\, \alpha + \Sigma\, \beta i = \Sigma\, (\alpha + \beta i) = \Sigma\, \alpha' + \Sigma\, \beta' i + \varepsilon + \varepsilon_1 i$$

oder $\Sigma(\alpha+\beta i) = \Sigma(\alpha'+\beta' i) + (\varepsilon+\varepsilon_1 i)$

Nun wissen daß

$$|\varepsilon+\varepsilon_1 i| \leqq |\varepsilon| + |\varepsilon_1| \text{ also}$$
$$|\varepsilon+\varepsilon_1 i| < \delta$$

Also koennen wir aus einer Reihe von complexen Größen deren Summe in dem festgestellten Sinne endlichen Werth hat, stets eine endliche Anzahl von Gliedern herausheben, daß die Differenz zwischen der ganzen Summe, und der Summe der ausgeschiedenen Glieder dem absoluten Betrage nach kleiner ist, als eine beliebig kleine positive Zahl δ. Um den zweiten Theil unseres Satzes nachzuweisen, denken wir uns, daß wir die ursprüngliche Summe s so theilen daß s' von endlicher Anzahl von Gliedern, und s'', so daß $s = s' + s''$ wobei $|s''| < \frac{1}{2}\delta$

Nehmen wir nun beliebig viele aus s'' heraus, so daß wir setzen $s'' = s_1'' + s_2''$, und haben $|s_2''| < \frac{1}{2}\delta$.

Dies koennen wir immer bewirken denn $|s''| < \frac{1}{2}\delta$ also s'' eine Reihe vom endlichen Werthe ist. Wir koennen alsdann schreiben $s = s' + s_1'' + s_2''$ folglich ist

$$|s - (s' + s_1'')| = |s_2''| < \delta.$$

Daß man schließlich aus der Reihe s'' beliebig viele so herausheben kann, daß

$$s'' = s_1'' + s_2'' \text{ und } |s_2''| < \delta \text{ sei, folgt unmittelbar.}$$

<u>Satz</u>, Es sei $\Sigma\, a$ eine Summe von complexen Grössen mit einem endlichen Werthe, wir wollen zeigen, dass auch für die unendliche Reihe der Satz gilt, dass der absolute Betrag der Summe $|\Sigma\, a|$ nie grösser sein kann, als die Summe der absoluten Beträge $\Sigma\,|a|$ d. h.

$$|\Sigma\, a| \leqq \Sigma\,|a|.$$

Bezeichnen wir mit r den absoluten Betrag von a und theilen $\Sigma\, a$ in 2 Theile, von denen der erste aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht

$$\Sigma\, a = \Sigma\, a' + \varrho \quad \text{wobei} \quad |\varrho| < \delta$$

Zunächst ist sicher dass

$\Sigma\, r > \Sigma\, r'$. Da nun $\Sigma\, a'$ aus endlicher Anzahl von Gliedern besteht, so ist

$\Sigma\, r' \geqq |\Sigma\, a'|$ also ist auch aus $\Sigma r' < \Sigma r$.

$$|\Sigma\, a - \varrho| = |\Sigma\, a'| \leqq \cancel{\Sigma\, r' < \Sigma\, r}$$

Ferner ist $|\Sigma\, a - \varrho| = |\Sigma\, a + (-\varrho)| \leqq |\Sigma\, a| + |-\varrho| = |\Sigma\, a| + |\varrho|$

Also ist $|\Sigma\, a - \varrho| \leqq |\Sigma\, a| + |\varrho|$ Daraus folgt

$|\Sigma a| + |\varrho| < \Sigma\, r$ oder also

$|\Sigma a| < \Sigma\, r$. d. h der absolute Betrag der Summe der Glieder einer unendlichen Reihe ist nie grösser, als die Summe der absoluten Beträge der Glieder der Reihe. Die obigen Eigenschaften der unendlichen Reihen, die in dem allgemeinen Satze enthalten sind,

~~man~~ wendet man auch als Definition der Convergenz der Reihen an. Weil wir aber von einem andern Princip der Endlichkeit der Summen ausgegangen sind, so mussten wir diese Eigenschaften nachweisen.

Nun gelten für solche unendliche Reihen von complexen Grössen genau dieselben Sätze, die wir früher für Reihen aus positiven und negativen Gliedern nachgewiesen haben. Zunächst gilt der Satz, dass man die Reihe beliebig in Gruppen theilen kann, und dann hat jede Gruppe einen endlichen Werth, und die Summe der Gruppen ist gleich der ursprünglichen Summe. Wenn man ferner ein und dieselbe Reihe auf doppelte Art in Gruppen theilt, also setzt $\sum a = \sum b$

$\sum a = \sum c$, so ist dann

$\sum b = \sum c$.

Alle diese Sätze ~~beweisen~~ lassen sich leicht, mittelst der schon entwickelten Principien nachweisen. Auch gelten hier die Gesetze des Multiplicirens. Hatten wir 2 Reihen zu multipliciren, so haben wir gezeigt, dass das Product endlich ist. Bei positiven und negativen realen Zahlen haben wir gesetzt $\sum a = \sum a' + \sum a''$

$\sum b = \sum b' + \sum b''$ wo die a' b' sämmtlich positiv und $\sum a'' \sum b''$ negativ. Dann hatten wir

$\Sigma a \cdot \Sigma b = \Sigma a' \Sigma b' + \Sigma a'' \Sigma b' + \Sigma a' \cdot \Sigma b'' + \Sigma a'' \Sigma b'' =$

$\Sigma a' \Sigma b' + \Sigma(-a'') \cdot \Sigma b' + \Sigma a' \Sigma(-b'') + \Sigma(a'') \cdot \Sigma(-b'')$

wodurch die Multiplication auf lauter positive Reihen zurückgeführt wird. Hat man complexe Zahlenreihen

$$\Sigma a = \Sigma \alpha + \Sigma \beta i$$
$$\Sigma b = \Sigma \alpha' + \Sigma \beta' i$$

zu multipliciren, so denken wir uns die Rechten nach den Gesetzen des Multiplicirens multiplicirt und erhalten

$$\Sigma \alpha \Sigma \alpha' - \Sigma \beta \Sigma \beta' + i\{\Sigma \alpha \Sigma \beta' + \Sigma \beta \Sigma \alpha'\}$$ und

dies hat einen endlichen Werth nach der Definition der Multiplication (sieht) zieht man aber ohne Weiteres die Uebereinstimmung. $\Sigma a \Sigma b = \Sigma \alpha \Sigma \alpha - \Sigma \beta \Sigma \beta' + i\{\Sigma \alpha \Sigma \beta +$
$\Sigma \beta \Sigma \alpha'\}$.

Schliesslich bleibt noch die Multiplication der Producte mit unendlich vielen Factoren zu begründen

Haben wir das Product Πa, so bringen wir jedes a auf die Form $a = 1 + b$ und definiren dann:

$$\Pi(1 + b_\lambda) = 1 + \Sigma_\lambda b_\lambda + \Sigma_{\lambda\mu} b_\lambda b_\mu + \Sigma_{\lambda,\mu,\nu} b_\lambda b_\mu b_\nu \dots$$

wobei die λ, μ, ν in derselben Summe nie einander gleich sein sollen. Diese Definition stimmt auch mit derjenigen für endliche Anzahl von Factoren überein. Nun wollen wir zeigen, dass wenn Σb_λ in dem festgesetzten Sinne endlich ist, dass dann auch das Product einen endlichen

Werth hat. Bezeichnen wir nun mit B den absoluten Betrag von b und betrachten.

$$\Pi(1+B_\lambda) = 1 + \sum_\lambda B_\lambda + \sum_{\lambda,\mu} B_\lambda B_\mu + \ldots\ldots$$

Ist nun $\sum_\lambda B_\lambda$ endlich, so hat dieses Product einen endlichen Werth. Da nun der Voraussetzung nach $\sum b_\lambda$ einen endlichen Werth hat, so hat auch $\sum B_\lambda$ einen endlichen Werth, folglich ist unter der Voraussetzung das letzte Product endlich. d. h. die Reihe

$$1 + \sum B_\lambda + \sum B_\lambda B_\mu + \sum B_\lambda B_\mu B_\nu + \ldots\ldots$$

hat einen endlichen Werth; nun ist jedes Glied in dieser Reihe gleich dem absoluten Betrage von dem entsprechenden Gliede in der Reihe

$$1 + \sum b_\lambda + \sum b_\lambda b_\mu b_\nu + \ldots$$

Da nun die Summe der absoluten Beträge der letzteren Reihe endlich ist, # und das Product der Gruppen gleich dem ursprünglichen Producte.

<u>Satz</u> Man kann aus der unendlichen Reihe der Factoren des Productes von unendlich vielen Factoren eine endliche Anzahl von Factoren so absondern, daß die Differenz zwischen dem ursprünglichen Producte und dem Producte der ausgeschiedenen Factoren, ihrem ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist, als eine beliebig klein genommene positive Größe.

so ist auch die Reihe $1 + \sum b_\lambda + \sum b_\lambda b_\mu b_\nu + \ldots$ oder was dasselbe ist $\Pi(1+b_\lambda) = \Pi a_\lambda$ endlich. Nun gelten auch die Sätze, dass man das Product beliebig in Gruppen von Factoren theilen kann, dass dann das Product jeder Gruppe endlich ist,

Erinnern wir uns zunächst daran, wie wir die Endlichkeit des Productes $\prod(1+a_\lambda)$ nachgewiesen haben. Wir haben nämlich das Product zunächst betrachtet

$$\prod(1+a_\lambda) = 1+\sum a_\lambda + \sum a_\lambda a_\mu + \ldots$$

wo $\sum a_\lambda < 1$ war, was uns dann zu dem allgemeinen Satze ohne Weiteres führte. Daßelbe machen wir hier. Betrachten wir das Product von unendlich vielen der complexen Größen

$\prod(1+b_\lambda)$ so sondern wir es in 2 Theile

$\prod(1+b_\lambda) = \prod(1+b'_\lambda)\prod(1+b''_\lambda)$ und es möge für $\prod(1+b''_\lambda)$ die Bedingung erfüllt sein, daß

$|\sum b''_\lambda| < 1$ ist. Nun haben wir

$$\prod(1+b''_\lambda) = 1+\sum_\lambda b''_\lambda + \sum_{\lambda\mu} b''_\lambda b''_\mu + \ldots \text{ und}$$

$$\prod(1+\beta''_\lambda) = 1+\sum \beta''_\lambda + \sum \beta''_\lambda \beta''_\mu + \ldots$$

wo $\beta''_\lambda = |b''_\lambda|$ ist.

Nun ist

$$|1+\sum_\lambda b''_\lambda + \sum b''_\lambda b''_\mu + \ldots| \leqq 1+\sum \beta''_\lambda + \sum \beta''_\lambda \beta''_\mu + \ldots$$

oder

$$|\prod(1+b''_\lambda)| \leqq \prod(1+\beta''_\lambda) \leqq 1+\sum \beta''_\lambda + \sum \beta''_\lambda \beta''_\mu + \ldots$$

Setzen wir nun $\sum \beta''_\lambda = c'' < 1$ und

$d = \sum b''_\lambda + \sum b''_\lambda b''_\mu + \ldots$ so haben wir

$|d| < c'' + c''^2 + c''^3 + \ldots = \frac{c''}{1-c''}$ also

$$|d| < \frac{c''}{1-c''}$$

Dann haben wir aber ferner, wenn wir kurz die Producte bezeichnen

$$\Pi(1+b_\lambda) = P$$
$$\Pi(1+b'_\lambda) = P'$$
$$\Pi(1+B'_\lambda) = Q' \ldots.$$

$\Pi(1+b_\lambda) = P = P'(1+d)$. Daraus geht hervor

$$P - P' = P'd.$$

Wenn ich nun die Absonderung so mache, dass

$\frac{c''}{1-c''} < \delta$ so ist auch

$|d| < \delta$ und

$|P'| < \Pi(1+B''_\lambda) = Q'.$

Wir haben alsdann

$$|P - P'| = |P'd| = |P'|\,|d|$$
$$< Q'\delta,$$
$$|P - P'| < Q'\delta.$$

Nun ist Q' eine endliche Grösse, δ willkürlich, ich kann somit das δ immer so wählen, dass

$Q'\delta < \varepsilon$ wo ε eine beliebige positive kleine Grösse bedeutet. Wir haben somit

$|P - P'| < \varepsilon$ was zu beweisen war.

Hiermit haben wir nicht nur unseren Satz nachgewiesen, sondern auch die Methode gezeigt, nach der man diese Absonderung machen soll.

man muss $\Pi(1+b_\alpha)$ so theilen, dass $\Sigma\, \beta_\alpha'' < c''$ ~~zu~~ und
$\frac{c''}{1-c''} < \delta$ sein muss.

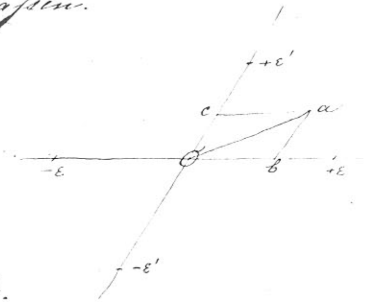
Zusätze zur geometrischen Darstellung complexer Größen.

Die jetzt gebräuchliche Repräsentation complexer Größen mittelst der Methode der Coordinaten, ist nicht eine nothwendige, wohl aber zweckmäßige. Bei der rein arithmetischen Untersuchung war es ganz gleichgültig, was die 4 Einheiten

$$\varepsilon_0\, \varepsilon_1\;\; \varepsilon_2\, \varepsilon_3$$

bedeuten, dasselbe koennen wir bei der geometrischen Repräsentation in's Auge fassen.

Wir construiren $O\varepsilon$, $O\varepsilon'$, wodurch sich auch $-\varepsilon, -\varepsilon'$ ergibt. Nehmen wir irgend einen Punkt a, und sollen nun seine Lage bestimmen, so kann dies nach der Methode des Addirens geometrischer Strecken b, c, geschehen.



Wir wollen nun der Einfachheit halber mit einzelnen Buchstaben gleichzeitig die entsprechenden Strecken bezeichnen
$a = \overline{oa}$, $b = \overline{ob}$ ect.

Nun nehmen wir das Verhältniss

$\frac{b}{\varepsilon} = \alpha$,

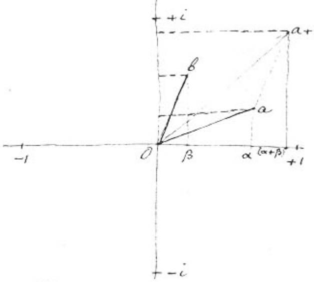
$\cancel{\frac{\varepsilon}{\varepsilon}} \frac{c}{\varepsilon'} = \beta$, dann ist

$b = \alpha\varepsilon$, $c = \beta\varepsilon'$ und $a = \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon'$, d. h. die Grössen α, β, welche ich bei dieser Wahl der Haupteinheiten als Coordinaten der complexen Grösse $\alpha\varepsilon + \beta\varepsilon'$ bezeichnet habe, sind Coordinaten des Punktes a. Es brauchen hierbei die Strecken $\varepsilon\, \varepsilon'$ nicht mit demselben Maassstabe ~~genommen~~ gemessen werden. Die Zweckmässigkeit des jetzt gebräuchlichen orthogonalen Axensystems mit denselben Einheiten beruht darauf, dass man nicht nur Addition und Subtraction, sondern auch Multiplication und Division geometrisch repräsentiren kann. Wir wählen also zur geometrischen Darstellung complexer Grössen Punkte, deren Lage gegen 2 orthogonale Axen durch die complexen Grössen definirt werden. Wir sagen alsdann, jede complexe Grösse wird repräsentirt durch einen Punkt (eigentlich durch eine Strecke von dem Nullpunkte nach dem betreffenden Punkte). Jede complexe Grösse ist die Ortsbestimmung eines Punktes in der Ebene in Bezug auf 2 willkürlich gewählte orthogonale Coordinatenaxen. Man kann die Sache auch so auffassen: die Gesammtheit der complexen Grössen wird bestimmt durch zweifach unendlich viele Paare α, β. Jeder Grösse a entspricht ein Punkt der Ebene

~~und~~ umgekehrt. Hierbei ist wohl zu bemerken, daß nicht der Punkt die Größe selbst ist, sondern er kann nur in sofern als Repräsentant der Größe aufgefaßt werden, daß durch ihn die algebraische Größe (und umgekehrt) bestimmt wird. Wenn ich nun 2 Größen habe

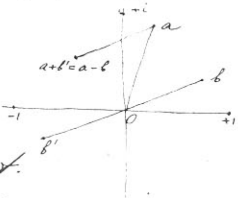
$$a = \alpha + \alpha' i$$
$$\cancel{a = \alpha + \alpha' i}$$
$$b = \beta + \beta' i \quad \text{so ist}$$
$$a + b = \alpha + \beta + (\alpha' + \beta') i.$$

Hierin ist auch die Repräsentation der Summe $a + b$ gegeben. Man construire die Punkte a, b, ziehe $\overline{oa}$, $\overline{ob}$ und vollende oab zum Parallellogramm, dann ist die Diagonale gleich der Summe von a, b. Kürzer gesagt, man addire zu der Strecke $\overline{oa}$, die Strecke $\overline{ob}$, so wird der Endpunkt den Punkt $a+b$ repräsentiren.



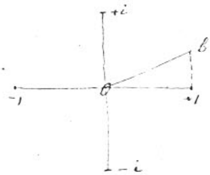
Ebenso erhält man leicht $a - b = (\alpha - \beta) + (\alpha' - \beta') i$.

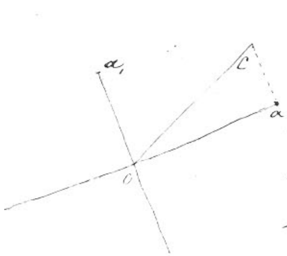
Wenn wir einen Punkt b haben, der die complexe Größe b repräsentiren soll, so wird die entgegengesetzte Größe $b' = -b$ auf folgende Weise repräsentirt.



Man verlängere bo und mache $|ob'| = |ob|$. Um nun $a - b$ zu finden, hat man nur $a - b = a + b'$ zu construiren.

Die multiplication können wir auch aus der Formel herleiten, wir wollen aber die geometrische Construction hierfür auf einem anderen Wege herleiten.
Hier können wir doch die Einheit beliebig wählen. Nehmen wir außer ~~des~~ des ursprünglichen rechtwinkeligen Axensystems ein anderes, und setzen fest, daß oa, oa_1 die beiden neuen Haupteinheiten sein sollen.





Wählen wir in dem ursprünglichen System einen Punkt b aus, so können wir in dem neuen System einen Punkt c so bestimmen, daß er in Bezug auf oa, oa_1 dieselben Coordinaten hat, wie b in Bezug auf $o1$, oi. Es wird also der Punkt c gegen a, a_1 so liegen wie b gegen $+1$, $+i$, so daß die Figuren $1ob$, aoc einander ähnlich sind.

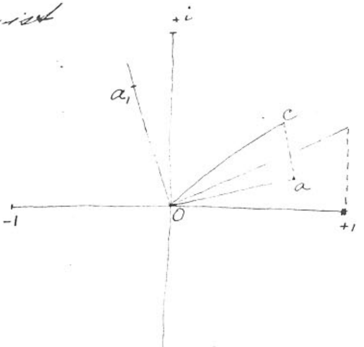
Dieses vorausgesetzt, erinnern wir uns an die Gaussische Definition. Zu jeder complexen Größe a gibt es 3 adjungirte a_1 a_2 a_3. Wenn $a.b$ gebildet werden soll, so sollen wir eine Zahl finden, die aus a und den 3 adjungirten so entsteht, wie b aus den 4 Einheiten entstanden ist. Es sei $b = \beta + \beta' i$, die Zahlen $\beta\ \beta'$ zeigen, wie b aus den Einheiten entstanden ist; wenn z. B. β und β' positiv sind, so enstand b aus $+1, +i$. Nach der Gaussischen Definition ist also

$$ab = \beta . a + \beta' a_1$$

Nun ist die Frage, wie wir zu a, a_1 finden. Es sei

$$a = \alpha + \alpha' i, \text{ dann ist}$$

$$a_1 = -\alpha' + \alpha i$$



Geometrisch wird also der Punkt a die adjungirte Zahl zu a ~~darstellen~~ darstellen, wenn $oa_1 \perp oa$.

Also haben wir

$$ab = \beta(\alpha + \alpha' i) + \beta'(-\alpha' + \alpha i)$$

$$= \alpha\beta - \alpha'\beta' + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i = c$$

Hierbei ist zu bemerken, dass oa_1 ebenso gegen oi liegt, wie oa gegen $o1$. Wenn wir also $a.b$ zu bilden haben, so ziehen wir oa_1 senkrecht auf oa und haben in Beziehung auf oa, oa_1 einen Punkt c zu finden, der gegen sie ebenso liegt wie b gegen $o1$, oi. Hieraus folgt, dass man

$\angle\, c\, o\, a = \angle\, b\, o\, 1$ machen muss und der Laenge nach:

$$c : a = b : 1$$

Auf diese Weise kann man die Gesetze des Dividirens, Potenzirens u. s. w. geometrisch darstellen. Bei dieser geometrischen Repräsentation der complexen Grössen, wollen wir künftig stehen bleiben und werden dies anwenden, nicht als ob wir geometrische Beweise für arithmetische Sätze liefern wollten, sondern um die Veranschaulichung wegen ~~zeigen~~. Wir werden einen Werth der complexen Größe kurzweg einen Punkt nennen. Wenn wir ~~ohne~~ eine positive oder negative reelle Zahlen nehmen, so sagt man, die Gesammtheit der Werthe ist eine einfache stetige Mannigfaltigkeit. Wenn man den Verein zweier Größen α α' nimmt, so befindet man sich in einer 2fachen Mannigfaltigkeit. Um sich hierin zu orientiren, muß man ein Gebilde hierin haben, daß jedem Punkte eine Combination der Werthe α, α' entspreche. Ebenso kann man in arithmetischen Linie von einer 3, 4 … fachen Mannigfaltigkeit sprechen.

Schließlich bemerken wir noch, daß die Bezeichnung real imaginär eigentlich keineswegs passend ist. Man hat die Bezeichnung eingeführt, positive, directe, negative, inverse, complexe, laterale Größen. Man konnte das Wort lineare und complexe Größen anwenden. Eine Größe a nennen wir real, wenn die zweite Coordinate in $a = \alpha + \beta i$, $\beta = 0$ ist, und imaginär wenn $\alpha = a$.

II Theorie der Functionen.

1 Einleitende Begriffe.

Wie wir schon am Anfange erwähnten, wollen wir um unsern Zweck zu erreichen, die ~~Einheit~~ Einsicht in die analytischen Functionen zu erlangen, nicht aus der Definition der analytischen Function ausgehen, sondern den Charakter derselben allmählich kennen lernen. Fangen wir mit denjenigen Functionen an, die uns die Grundoperationen liefern. Nehmen wir irgend welche Größen a, b, c... so koennen wir aus ihnen uns herleiten, indem wir auf sie die Addition, Subtraction, Multiplication, Division anwenden. Hierbei kann jede beliebige Operation beliebig oft angewandt werden (nur endlich oft). Denken wir uns die Größen $a, b, c, \ldots$ als veraenderlich, so ist das Resultat der Rechnung ein Ausdruck, den wir eine rationale Function von $a, b, c \ldots$ nennen. Nun hindert uns nichts, einige der Größen $a, b, c, \ldots$ als constant, andere als Variable zu betrachten. Um diesen Unterschied der Veraenderlichkeit und Constanz auszudrücken, bezeichnen wir im Folgenden die veraenderlichen Größen mit $x\ y\ z \ldots$ die constanten mit a, b, c u. s. w., dann sprechen wir von rationalen Functionen von $x\ y\ z \ldots$ Veraenderliche Größen werden also ihrem Begriffe nach solche Größen sein, die verschiedene Werthe annehmen koennen. Hierbei unterscheiden wir unbeschränkt veränderliche Größen, die die ganze complexe Ebene erfüllen, und beschraenkt veränderliche, deren absoluter Betrag eine bestimmte Grenze nicht überschreitet.

Denken wir uns also aus veraenderlichen und constanten Größen durch die Grundoperationen neue Größen hergeleitet, so kann man das Resultat auf die Form bringen, daß schließlich entweder keine oder nur eine Division auszuführen ist. Wir betrachten ~~uns~~ nun zunächst diejenigen Ausdrücke, welche nur durch Addition, Subtraction, Multiplication hergeleitet werden. Auf diese Weise erhalten wir die sogenannten ganzen (rationalen) Functionen, welche sich ~~von~~ als Aggregate von Größen darstellen, in denen nur Producte von Constanten und Veraenderlichen Größen vorkommen.

Kann man nicht alle Divisionen ~~[illegible]~~ eliminiren, so hat man mit gebrochenen (rationalen) Functionen zu thun und es wird sich zeigen, daß wir jede rationale, gebrochene Function auf die Form eines Bruches bringen ~~kann~~ können, dessen Zähler ebensowie der Nenner ganze Functionen sind.

Wir bemerken hierbei, daß wenn wir von Functionen von $x\ y\ z$ ... sprechen, wir uns nach dem Zusammenhange dieser Grössen, die Functionen unterscheiden, ohne Rücksicht auf den Zusammenhang der Constanten. Lassen wir dann die Beschränkung fallen, dass jede Operation endlich oft angewandt werden kann, so kommen wir auf den weiteren Begriff einer Function, wie wir es im Folgenden sehen werden.

Ganze rationale Functionen einer und mehrerer Veränderlichen.

Betrachten wir eine ganze Function ~~einiger Grössen~~ einer variablen so lässt sie sich darstellen in der Form $\sum a_\lambda x^\lambda$, wo λ wo λ nur positive Zahlen (mit null) darstellen soll. (Vorläufig wollen wir mit den Zahlen $\lambda\ \mu\ \nu$ ..., wenn sie als Exponenten vorkommen, ganze positive Zahlen bezeichnen.) Die höchste Zahl für λ in $\sum a_\lambda x^\lambda$ nennen wir den Grad der ganzen Function. Die 1te Frage ist nun, koennen 2 solche Functionen für beliebige Werthe der Variablen identisch dem Werthe nach sein, ohne dass sie in den Coefficienten übereinstimmen. Diese Frage beantwortet uns folgender Satz: Wenn 2 ganze Functionen n^{ten} Grades für $(n+1)$ Werthe der ~~Vorzahlen~~ variablen übereinstimmen, so sind sie indentisch gleich.

Die beiden Functionen seien:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$$

und sie mögen für $(n+1)$ Werthe von x, dieselben grössen Glieder darstellen, dann behaupte ich, muss sein

$$a_0 = b_0, \; a_1 = b_1 \; \dots \; a_n = b_n.$$

Dieser Satz wird bewiesen, wenn wir zeigen, dass ihre Differenz identisch verschwindet. Dazu wenden wir folgenden Lehrsatz. Eine ganze Function n^{ten} Grades

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots c_n x^n \; ~~(wo\ c_n \gtrless 0)~~ \; (wo\ c_n \gtrless 0)$$

kann höchstens für n Werth der Variablen x verschwinden. Angenommen, sie wird für $x = x_1$ gleich null, sodass wir haben $0 = c_0 + c_1 x_1 + \dots c_n x_1^n$, dann ist

$$f(x) = c_n (x^n - x_1^n) + c_{n-1} (x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \dots c_1 (x - x_1).$$

Nun ist allgemein für ganzes positives n

$$x^n - x_1^n = (x - x_1)(x^{n-1} + x_1 x^{n-2} \dots + x_1^{n-1}).$$

Wir bekommen also das Resultat

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x, x_1) \text{ wobei } f_1(x, x_1)$$

in Bezug auf x vom $(n-1)^{ten}$ Grade ist und der Coefficient der höchsten Potenz von x ist c_n.

Nehmen wir nun an, es verschwinde weiter

$f(x)$ für $x = x_2$, so bekommen wir ebenso

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) f_2(x, x_1, x_2) \text{ wo } f_2(x, x_1, x_2)$$

vom $(n-2)^{ten}$ Grade ist. Fahren wir so fort, so gelangen wir zu der Formel

$$f\binom{x}{x} = (x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_{n})\,f_n(x, x_1, x_2 \ldots x_n)$$

wo $f_n(x \ldots)$ vom 0^{ten} Grade ist und der Coefficient der höchsten Potenz von x ist c_n. Daraus folgt daß $f_n(x, x_1 \ldots x_n) = c_n$ ist, also haben wir $f\binom{x}{x} = c_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$.

Wenn also eine ganze Function n^{ten} Grades für n Werthe $x = x_1, \ldots x_n$ verschwindet, so muß sie die obige Formel haben. Offenbar kann sie für ein von $x_1 \ldots x_n$ verschiedenes x nicht mehr verschwinden.

Daraus geht ohne Weiteres der Satz hervor: Wenn eine Function (ganze) n^{ten} Grades für $(n+1)$ verschiedene Werthe der Variablen verschwindet, so muß sie identisch null sein.

Denn setzen wir voraus die Function $f\binom{x}{x}$ verschwinde noch für $x = x_{n+1}$, also $f(x_{n+1}) = 0$, wobei x_{n+1} verschieden ist von $x_1, \ldots x_n$, so kann dies nur dadurch geschehen, daß

$c_n = 0$ ist. Es muß also

$$f\binom{x}{x} = c_{n-1}\,x^{n-1} + c_{n-2}\,x^{n-2} + \cdots + c_0$$

Auf dieselbe Weise schließend bekommen wir

$$c_{n-1} = 0,\; c_{n-2} = 0, \ldots\; c_1 = 0$$

Nun kehren wir zum Beweise unseres 1^{ten} Satzes zurück.

Wenn $a_0 + a_1 x + \ldots = b_0 + b_1 x + \ldots$

für $(n+1)$ Werthe der Variablen gleiche Größen darstellen, so muß ihre Differenz für $(n+1)$ Werthe verschwinden.

Nun ist die Differenz eine ganze Function n ten Grades, sie muss also identisch verschwinden, das heisst, die Coeffizienten in derselben sind sämmtlich Null,

oder $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1 \ldots a_n = b_n$,

was zu beweisen war.

Lehrsatz Eine Function n ten Grades ist vollständig bestimmt, sobald man für $(n+1)$ verschiedene Werthe der Variablen x ihre Werthe kennt und umgekehrt, man kann stets eine ganze Function bilden, die für vorgeschriebene Werthe von x, vorgeschriebene Werthe ~~für~~ y bekommt.

Um den Satz nachzuweisen, sei

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

und für $(n+1)$ Werthe der Variablen ~~Vorzahlen~~ $x = x_1, x_2 \ldots x_{n+1}$ möge sie die Werthe $y_1\, y_2 \ldots y_{n+1}$ ergeben.

Ich bilde die Function

$$\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{n+1})}$$

welche die Eigenschaft hat für $x = x_1$ gleich 1 zu werden und für alle anderen Werthe $x_2 \ldots x_{n+1}$ zu verschwinden, die Function $\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{n+1})}\, y_1$

wird für $x = x_1$ den Werth y_1 bekommen, sonst verschwindet sie. Bilden ~~Nehmen~~ wir das Aggregat

$$\frac{(x-x_2)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n+1})}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{n+1})}y_2$$
$$+\cdots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_n)}y_{n+1},$$

so hat dies die verlangte Eigenschaft für $x=x_1, x_2 \dots x_{n+1}$, die vorgeschriebenen Werthe $y_1 \dots y_{n+1}$ zu geben.
Nun gibt es nur eine solche Function n^{ten} Grades. Denn gäbe es noch eine ~~weitere~~ zweite, so müßte sie für $(n+1)$ Werthe von x mit dieser übereinstimmen, da sie aber vom n^{ten} Grade sein soll, so muß sie mit dieser identisch sein. Hiermit sind beide Theile unseres Satzes bewiesen. Wir wollen nun untersuchen, wie sich diese Sätze auf Functionen von mehreren Veraenderlichen erweitern lassen. Eine ganze Function von $x\,y\,z\dots$ ist in Bezug auf jede der Variablen von einem bestimmten Grade. Man führt aber hierbei den Begriff der Dimension ein, welche die Summe der Exponenten der höchsten Potenzen jeder Variablen ist. Die Schwierigkeit, welche sich bei Functionen mehrerer Veraenderlichen darbietet, liegt in der Unbestimmtheit der Anordnung der Glieder der Function. Haben wir z. B. eine Function von 2 Veraenderlichen, x, y in Bezug auf x vom n^{ten}, in Bezug auf y vom p^{ten} Grade, und denken uns die Function geordnet nach Potenzen von x u. y, so bekommen wir $(n+1)(p+1)$ Coeffizienten. Ordne ich

nach der Dimension r, so habe ich $\frac{(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2}$ Coefficienten.
Die erste Frage, welche sich nun bei den Functionen mehrerer Veränderlichen darbietet, ist die, für wie viele Werthesysteme $x\,y\,z$ .. muss ich den Werth der Function kennen, um sie vollständig zu bestimmen? Dies wollen wir für Functionen von 2 Veränderlichen $x\,y$ untersuchen; wobei wir den Grad der Function in Bezug auf x mit n, in Bezug auf y mit p bezeichnen. Die gegebene Function sei $F(xy)$, dann haben wir den Satz:

Wenn wir $(n+1)$ Werthe für $x_1 = x_1\; x_2 \dots x_{n+1}$ und

$$(p+1) \text{ Werthe für } y_1 = y_1\; y_2 \dots y_{p+1}$$

festsetzen und für jede Combination dieser Werthe den Werth der Function $F(xy)$ kennen, so ist die Function vollständig bestimmt. Zunächst wollen wir nachweisen, daß wenn

$$F(x_2\, y_\beta) = F_1(x_2\, y_\beta)$$

(wo $x_2\, y_\beta$ alle Werthepaare $x_1 y_1$ ... bedeuten, dann notwendig $F(xy) = F_1(xy)$ sein muss für alle beliebigen Werthepaare xy.

Der Beweis kommt darauf hinaus, daß wenn die Differenz für alle diese Combinationen verschwindet, daß dann die Coefficienten gleich null sein müßen.

Setzen wir $F(xy) - F_1(xy) = G(xy)$

So koennen wir $G(xy)$ in der Form darstellen

$$G(xy) = G_0(x) + G_1(x)y + \dots + G_p(x)y^p.$$

wo $G_0\ G_1 \dots$ ganze Functionen von x von nicht höherem als dem $n$ten Grade sind.

Der Annahme nach ist

$$G_0(x_\alpha) + G_1(x_\alpha)y_\beta + G_p(x_\alpha)y_\beta^p = 0$$

nehme ich für x_α einen bestimmten Werth z. B. x_1 an, so wird diese Gleichung bestehen für $(p+1)$ Werthe von y, was nur dann möglich ist, wenn

$$G_0(x_1) = 0,\ G_1(x_1) = 0 \dots G_p(x_1) = 0.$$

dasselbe gilt für $x_2 - x_2 \dots$ also allgemein muss

$$G_0(x_\alpha) = 0,\ G_1(x_\alpha) = 0 \dots G_p(x_\alpha) = 0,\ (\alpha = 1, \dots n+1).$$

Nun sind die G's höchstens vom $n$ten Grade, die obigen Gleichungen können somit nur dann bestehen wenn

$$G_0 \equiv 0,\ G_1 \equiv 0 \dots$$

Es muss also

$$F(xy) - F_1(xy) \equiv 0 \text{ d. h.}$$

$$F(xy) = F_1(xy)$$

Nun muss umgekehrt nachgewiesen werden, dass man $F(xy)$ stets so bestimmen kann, dass sie für beliebige Combinationen von

$$x_1\ x_2 \dots x_{n+1}$$

$$y_1\ y_2 \dots y_{p+1}$$

gegebene Werthe bekommt. $z_{1,1}\ z_{1,2} \dots$
$z_{2,1}\ z_{2,2} \dots$

Man koennte dafür eine Formel aufstellen, wir wollen aber einen andern Weg einschlagen. Es sei die zu bestimmende Function $F(xy) = F_0(x) + F_1(x)y + \dots + F_p(x)y^p$.
und es soll $F(x_\alpha y_\beta) = z_{\alpha,\beta}$ sein.
Zunächst als Function von y betrachtet, kann sie so bestimmt werden, daß sie für $x = x_\alpha$ und $y = y_1\, y_2 \dots y_{p+1}$ die vorgeschriebenen Werthe erhält. Nach dem Vorigen kann ich eine solche Function bestimmen und sie ist

$$F(x_\alpha, y) = \frac{(y-y_2)\cdots(y-y_{p+1})}{(y_1-y_2)\cdots(y_1-y_{p+1})} z_{\alpha,1} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_p)}{(y_{p+1}-y_1)(y_{p+1}-y_2)\cdots(y_{p+1}-y_p)} z_{\alpha,p+1}$$

Darauf kann ich nach Potenzen von y ordnen.
Jedenfalls wird $F(xy)$ die Form haben müßen

$$F(xy) = \frac{f(x)}{f(x_1)} F(x_1 y) + \frac{f(x)}{f(x_2)} F(x_2 y) + \dots$$

$$+ \frac{f(x)}{f(x_{n+1})} F(x_{n+1}, y)$$

und nun bestimmt sich die Function $f(x)$ dadurch, daß man die Bedingungen einführt daß

$$F(x_\alpha y_\beta) = z_{\alpha\beta} \text{ sein soll.}$$

Es ergibt sich dann für $F(xy)$ durch eine einfache Ueberlegung die Formel

$$F(xy) = \left\{ \frac{(x-x_2)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n+1})} z_{1,1} + \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_{n+1})} z_{2,1} + \dots\right.$$

$$\ldots + \cdots \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_n)} Z_{n+1,1} \Big\} \Big\{ \frac{(y-y_2)\cdots(y-y_{p+1})}{(y_1-y_2)\cdots(y_1-y_{p+1})} \Big\}$$

$$+ \Big\{ \frac{(x-x_2)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n+1})} Z_{1,2} + \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_{n+1})} Z_{2,2} + \cdots$$

$$+ \cdots \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_n)} Z_{n+1,2} \Big\} \cdot \frac{(y-y_1)\cdots(y-y_{p+1})}{(y_2-y_1)\cdots(y_2-y_{p+1})}$$

$$+ \quad \cdots\cdots\cdots$$

$$\Big\{ \frac{(x-x_2)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n+1})} Z_{1,p+1} + \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_n)} Z_{n+1,p+1} \Big\} \cdot \frac{(y-y_1)\cdots(y-y_p)}{(y_{p+1}-y_1)\cdots(y_{p+1}-y_p)}$$

Offenbar koennen wir dieses Verfahren auf Functionen von beliebig vielen Variablen ausdehnen, durch Zurückführung auf den vorangehenden Fall.

Theorie der Theilbarkeit ganzer Functionen.

Die Nothwendigkeit dieser Untersuchung ergibt sich aus folgender Betrachtung. Nehmen wir eine rationale Function, so koennen wir sie stets auf die Form bringen $\frac{G(xy\ldots)}{G_1(xy\ldots)}$ wo G G_1 ganze Functionen von $x\,y\,z\,\ldots$ sind. Diese Function braucht nicht in der einfachsten Form zu erscheinen. Die einfachste Form wird sie dann haben, wenn es keine ganze Function von $x\,y\,z\,\ldots$ gibt die gleichzeitig im Divisor und Dividendus ohne Rest aufgeht. Um also die rationalen Functionen in ihren einfach-

sten Formen darzustellen müssen wir eine Methode be-
~~nü~~sitzen, nach der wir entscheiden koennen, ob 2 Functionen
einen gemeinsamen Theiler haben.

<u>Definition</u>. Eine ganze Function F ist durch eine an-
dere ganze Function G theilbar, wenn es eine 3te der-
selben Art gibt, so daß $F = G \cdot H$ ist.

2 ganze Functionen haben einen gemeinsamen Thei-
ler, wenn es eine 3te ganze Function gibt, durch welche
sowohl die 1te als auch die 2te theilbar ist. Diese Defini-
tion läßt sich auf beliebig viele Functionen anwenden.
Die Sätze welche sich nun hier darbieten sind:

1, Wenn F u G gegeben sind und die haben überhaupt
einen gemeinschaftlichen Theiler, so gibt es einen größten
gemeinschaftlichen Theiler H, so daß jeder Theiler von F ~~H~~ und G
der von H verschieden ist, auch ein Theiler von H ist.

2/ Es seien F und G ganze Function und dann H der-
selben Art, und es soll F u H keinen gemeinsamen
Theiler haben, wenn nun das Product F.G durch H
theilbar ist, so muß G durch H theibar sein. Dieser
Satz wird uns dann zur Lösung der Aufgabe führen.

3) Wenn $F\ F_1 \ldots$ (ganze Function) gegeben sind, so gibt
es stets eine Function die durch alle $F_1\ F_1 \ldots$ theilbar ist
$(F.\,F_1.\,F_2\ \ldots)$. Es handelt sich nun darum eine Function

von möglichst niedrigem Grade zu finden, die durch sämtliche F, F_1 ... theilbar ist, aus der alle andern durch Multiplication hervorgehen.

4) Jede ganze Function ist entweder unzerlegbar, oder sie läßt sich nur auf eine einzige Weise in Factoren derselben Art zerlegen.

Alle diese Sätze zeigen wir zunächst für eine Variable, und wenden dann zur Verallgemeinerung derselben den Schluß von n auf $(n+1)$ an.

Wir verstehen also bei den nächsten Untersuchungen unter $F, G, H\ K$ ganze Functionen von einer Variablen x.

Wie untersucht man nun, ob F durch G theilbar ist, so daß $F = G.H$. Wenn G den Grad μ u. H den Grad ν hat, so muß der Grad von F gleich sein

$$\cancel{\lambda + \mu + \nu}. \quad \lambda = \mu + \nu.$$

Wenn also F durch G theilbar sein soll, so darf der Grad von G nicht höher sein, als der von F. Um diese Untersuchung fortzuführen, beweisen wir einen Hifsatz:

Wenn wir 2 Function F, G haben, resp. vom λ u. μ Grade, so gibt es stets eine ganze Function von x vom $\lambda-\mu^{ten}$ Grade H, so daß

$$F - G.H = K$$ ist, und K vom niedrigeren als dem μ^{ten} Grade ist.

Es sei $F = a_0 x^{\lambda} + a_1 x^{\lambda-1} + \dots + a_{\lambda}$

$$G = b_0 x^{\mu} + b_1 x^{\mu-1} + \dots + b_{\mu}$$ und wir setzen

$$H = c_0 x^{\lambda-\mu} + c_1 x^{\lambda-\mu-1} + \dots + c_{\lambda-\mu}$$

wo die c's vorläufig noch unbestimmt sind.

Bilden wir ~~nun~~ $F - G.H$, so haben wir: $F - G.H = (a_0 - b_0 c_0) x^{\lambda} + (a_1 - b_0 c_1 - b_1 c_0) x^{\lambda-1}$

$$+ (a_2 - b_0 c_2 - b_1 c_1 - b_2 c_0) x^{\lambda-2} + \dots$$

$$+ (a_{\mu} - b_0 c_{\mu} - b_1 c_{\mu-1} \dots - b_{\mu} c_0) x^{\mu} + d_0 x^{\mu-1} + d_1 x^{\mu-1} + \dots$$

wo die $d_0 d_1 \dots$ ganze Functionen von $a, b, c \dots$ sind.

Nun soll $F - G H = K$ vom Grade $\mu - 1$ sein, es müssen demnach die Coefficienten von

$x^{\lambda} \dots x^{\mu}$ verschwinden.

Das heißt, es muß sein

$$b_0 c_0 = a_0$$

$$b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1$$

$$b_0 c_{\mu} + b_1 c_{\mu-1} \dots b_{\mu} c_0 = a_{\mu}$$

Durch diese Gleichungen bestimmen sich die c's ohne alle Zweideutigkeit und sie haben alle den Nenner b_0.

Durch diese Forderung bestimmen sich die c's auf eine Weise.

Wenn wir die Grade der Functionen neben den Buchstaben schreiben, so können wir H immer so bestimmen,

daß $F_{\lambda} - G_{\mu} H_{\lambda-\mu} = K_{\mu-1}$

Nun können wir leicht die Bedingung der Theil~~bar~~keit der Function F durch G leicht finden.

Die Bedingung der Theilbarkeit war, daß

$F_\nu = G_\mu \cdot \bar{H}$ sein soll. Nun haben wir

$F_\nu - G_\mu \cdot H_{\nu-\mu} = K_{\mu-1}$ und daraus

$G_\mu (\bar{H} - H_{\nu-\mu}) = K_{\mu-1}$.

Wäre nun $\bar{H}$ verschieden von $H_{\nu-\mu}$, so koennte diese Gleichung nicht bestehen wegen der Grade.

Es muß $\bar{H} = H_{\nu-\mu}$, daraus folgt weiter, daß im Falle, daß F_ν durch G_μ theilbar sein soll, $K_{\mu-1} = 0$.

Hiermit haben wir die Untersuchung der Theilbarkeit von F durch G zurückgeführt auf die Bedingung $K = 0$.

Dieses Verfahren läßt sich mittelst eines kleinen Kunstgriffes sofort auf ganze Functionen von beliebig vielen Veraenderlichen übertragen. Denken wir uns $F = G.H$ wo F, G, H ganze Functionen von beliebig vielen Variablen sein mögen. Wenn ich jetzt statt $x\,y\,z\,\ldots$ neue Variablen einführe mittelst der Gleichungen

$$x = \alpha u + \alpha' v + \alpha'' w + \ldots$$

$$y = \beta u + \beta' v + \beta'' w + \ldots$$

$$z = \gamma u + \gamma' v + \gamma''' w + \ldots$$

wo $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots$ Constante sind, die man auch als ganze Zahlen~~größen~~ wählen kann, so verwandelt sich F, G, H in die Function von $u\,v\,w$, die wir resp. mit $f\,g\,h$ bezeichnen, dann is auch $f = gh$.

Wenn F durch G theilbar ist, als Functionen von x y z.. betrachtet, so ist auch f durch g theilbar, beide als Functionen von u v w.. betrachtet. Dies gilt auch umgekehrt, wenn die Linearfunction für x y z.. so bestimmt sind, daß man auch umgekehrt u, v, w.. durch x y z.. ausdrücken kann, wozu die Bedingung erfüllt werden muss, daß:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' & \cdots \\ \beta & \beta' & \beta'' & \cdots \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \cdots \\ \cdots & & & \end{vmatrix} \lessgtr 0$$

Diese Bedingung können wir aber auf unendlich viele Arten befriedigen. Alsdann verwandelt sich f, g, h in F, G, H. Statt der Functionen F, G, H. kann man f, g, h. untersuchen.

Nun behaupte ich, diese Substitutionscoefficienten α β γ.. kann man so wählen, daß der Coefficient der höchsten Potenz in f g. von u eine Constante ist. Es sei F von der λ^{ten} und G von der μ^{ten} Dimension

$$F = (x y z ..)_\lambda + (x y z ..)_{\lambda-1} + \cdots$$

$$G = (x y z ..)_\mu + (x y z ..)_{\mu-1} + \cdots$$

Nun machen wir die obige Substitution und suchen das Glied in f mit der höchsten Potenz von u auf. Nun sieht man zunächst, daß sich F und G verwandeln resp. in

$f(u, v, w \dots) = (u\, v\, w \dots)_\mu + \dots$

$g(u, v, w \dots) = (u, v, \dots)'_\mu + \dots$ oder genauer geschrieben

$f(u, v, \dots) = u^\mu (\alpha \beta \gamma \dots)_\mu + \dots$

$g(u, v \dots) = u^\mu (\alpha \beta \dots)_\mu + \dots$

und $f(u, 0, 0 \dots) = u^\mu (\alpha \beta \gamma \dots)_\mu + \dots$, $g(u, 0 \dots) = u^\mu (\alpha\, \beta \gamma \dots)'_\mu + \dots$

Ich brauche also $\alpha \beta \gamma \dots$ ~~und~~ nur so zu wählen dass

$$(\alpha \beta \gamma \dots)_\mu \gtrless 0$$

$(\alpha \beta \gamma \dots)'_\mu \gtrless 0$ was immer möglich ist.

Die Coefficienten $\alpha \beta \gamma \dots \alpha' \beta' \gamma' \dots$ sind also nur so zu wählen, dass die 3 Bedingungen erfüllen.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' & \dots \\ \beta & \beta' & \beta'' & \dots \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \gtrless 0$$

$$(\alpha \beta \gamma \dots)_\mu \gtrless 0$$

$$(\alpha \beta \gamma \dots)'_\mu \gtrless 0.$$

Wenn wir jetzt g ordnen nach u so ist $g(u, v, w \dots) = G_0 u^\mu + G_1 u^{\mu-1} + \dots$ wo G_0 eine Constante ist, da ja $G(u, \dots)$ nur von der μten Dimension ist, und für $v = w = \dots = 0$ ist

$$G_0 = (\alpha \beta \gamma \dots)'_\mu$$

Ebenso ist

$$f(u, v, w \dots) = F_0 u^\mu + F_1 u^{\mu-1} \dots$$

$$F_0 = (\alpha \beta \gamma \dots)_\mu$$

Nun untersuchen wir, ob f durch g theilbar ist. Wir bestimmen nun eine Function h so, daß

$$f - g\cdot h = k, \text{ wo } k \text{ in Bezug auf } u \text{ vom}$$

niedrigeren als dem μ^{ten} Grade ist.

Zur Bestimmung der Coefficienten in h ergeben sich Gleichungen, wie bei einer Variablen, nämlich

$$a_0 = b_0\, c_0$$

$$a_1 = b_0\, c_1 + b_1\, c_0$$

Nun sind hier $a_1\, b_1\, a_2\, b_2 \ldots$ Functionen von $u, v, w \ldots$

$F_1\, G_1\, F_2\, G_2 \ldots$ und speciel

$$a_0 = F_0$$

$$b_0 = G_0 \text{ Constanten.}$$

Aus den obigen Gleichungen bekomme ich

$c_0\, c_1 \ldots$ als ganze Functionen von $u, v, w \ldots$

da ja die sämtlichen c's nur den Nenner b_0 = constant haben. Wenn ich also f u. g habe, so kann ich eine ganze Function von $u, v, w \ldots$ bestimmen h vom $(\lambda - \mu)^{ten}$ Grade in Bezug auf u, so daß k in Bezug auf u vom niedrigeren, als dem μ^{ten} Grade ist. Soll nun f durch g theilbar sein, so muß es ein h geben, wofür

$$f = g\cdot h \text{ da wir aber auch haben}$$

$$f = gh + k$$

so folgt daraus, daß

$$g(\bar{h}-h) = k.$$

Es muss nun $\bar{h} - h = 0$ sein, denn wäre $\bar{h} - h \gtrless 0$, so wäre eine in Bezug auf u ganze Function μ^{ten} Grades wenigstens, gleich einer vom niedrigeren Grade als μ. Daraus folgt ferner, dass

$$k \equiv 0 \text{ sein muss.}$$

Die Theilbarkeit von F durch G ist zurückgeführt auf die Untersuchung von f, g, wofür sich die Bedingung ergibt dass $k \equiv 0$.

Wir haben also für alle ganze Functionen ein Kriterium gefunden, nach welchem man entscheiden kann, ob eine Function durch eine andere theilbar ist.

Die nächste ~~Function~~ Frage ist nun, wann haben 2 Functionen einen gemeinschaftlichen Theiler, und wenn ~~wir~~ sie einen haben, wie findet man den grössten gemeinschaftlichen Theiler.

Es seien F und F_1 die gegebenen Functionen, zunächst von einer Variablen. Wir koennen dann stets eine Function G_1 finden, dass man hat

$$F = G_1 F_1 + F_2 \text{ wo } F_2 \text{ vom niedrigeren Grade}$$

ist als F_1. Ist nun $F_2 \equiv 0$ so ist der Theiler F_1.

Allgemein schliessen wir, wenn F und F_1 einen Theiler gemein haben, so hat auch

$$F - G_1 F_1 \text{ also auch } F_2 \text{ denselben Theiler und}$$

der größte gemeinsame Theiler von F und F_1 ist auch der größte Theiler von F_2. Umgekehrt jeder größte Theiler von F_1, F_2 ist der größte gemeinsame Theiler von F. Ergäbe sich $F_2 \equiv 0$ so ist der größte gemeinsame Theiler von F u F_1, F_1. Ist F_2 eine von x unabhängige Constante, so haben die Functionen F u. F_1 keinen Theiler gemein. Ist nun F_2 weder null noch eine Constante, so gehen wir weiter und bilden die Gleichung

$$F_1 = G_2 F_2 + F_3$$

Der größte gemeinsame Theiler von F_1 u. F_2 ist auch der größte Theiler von F_3; und der größte Theiler von F_2 u. F_3 ist der größte gemeinsame Theiler von F_1 u. F_2; also auch von F und F_1. Ergäbe sich F_3 identisch gleich null, so wäre der größte gemeinsame Theiler von F_2 u F_3, F_2 selbst, also der größte gemeinsame Theiler von F u F_1 ist F_2. Ist F_3 weder null noch eine Constante, so verfahren wir so weiter und setzen

$$F_2 = G_2 F_3 + F_4$$

Da nun die Grade der Functionen F_1 F_2 F_3 ... stets abnehmen, so kommen wir schließlich zu einem F_{k+1}, das von x unabhängig ist.

Wir erhalten dann folgenden Algorithmen

$$\cancel{F = G_1 F_1 + F_2}$$

$$F = G_1 F_1 + F_2$$
$$F_1 = G_2 F_2 + F_3$$
$$F_2 = G_3 F_3 + F_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_{k-1} = G_k F_k + F_{k+1}$$

und nun schliessen wir so; der grösste gemeinsame Theiler von F u F_1 ist auch der grösste Theiler von F_1 u F_2, also auch von F_3 u F_2 u.s.w. Der grösste gemeinsame Theiler von F u F_1 ist auch der grösste gemeinsame Theiler von F_{k-1} u F_k, also auch von F_k u. F_{k+1}. Wenn F_{k+1} nicht null ist, so haben die Functionen F u. F_1 keinen gemeinschaftlichen Theiler, da ja F_k u. F_{k+1} keinen haben. Ist aber $F_{k+1} \equiv 0$ so haben die Functionen F u F_1 einen Theiler, da ja F_k u $F_{k+1} = 0$ einen haben. Nun sieht man auch, dass in diesem Falle, der grösste gemeinschaftliche Theiler von F u F_1 F_k ist, denn jeder Theiler von F u. F_1 ist auch ein Theiler von F_1 u F_2 .. und schliesslich ein Theiler von F_k u F_{k+1}, also F_k ist ein Theiler von F u. F_1 der alle Theiler von F u F_1 als Theiler enthält, d. h. F_k ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von F u. F_1. Complicirter ist dies bei Functionen von mehreren Veraenderlichen, was wir alsbald zeigen werden. Zunächst wollen wir aber den 2ten Satz (Seite 146) nachweisen. Es sei F u. G ganze Functionen von x, und ebenfalls H, so dass F durch H nicht theilbar ist. Ist nun FG durch H theilbar, so muss G durch H theilbar sein.

Denken wir uns das Gleichungssystem (Seite 155) mit G multiplicirt, so bekommen wir

$$G\cdot F = G\cdot G_1 F_1 + G F_2$$
$$G F_1 = G\cdot G_2 F_2 + G F_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G F_{k-1} = G\cdot G_k F_k + G F_{k+1}$$

Der Annahme nach soll FG durch H theilbar sein. Wenn wir in dem obigen unter F_1 H verstehen, so muss $G.F$ durch F_1 H theilbar sein. Ebenso

$$G F_2, G F_3 \ldots G F_{k+1} \text{ durch } H = F_1$$

theilbar, d. h. $G F_{k+1} = G' H$ oder

$$G = G' \frac{H}{F_{k+1}}$$ d. h. G muss durch $H = F_1$ theilbar sein, was zu beweisen war.

Dieser Satz führt uns zu der Lösung folgender Aufgabe. Es sind F u. F_1 gegeben, man soll alle Functionen finden, die sowohl durch F als auch durch F_1 theilbar sind und unter diesen die vom möglichst niedrigem Grade zu finden.

Wenn ~~nun~~ die Function

$$F = a_0 x^{\mu} + a_1 x^{\mu-1} + \ldots + a_\mu \quad (a_0 \ldots \text{ Functionen von } y z)$$

nehmen wir zunächst an F u. F_1 haben keinen gemeinschaftlichen Theiler, so haben wir, wenn wir die Function, die sowohl durch F als auch durch F_1 theilbar sein soll mit G bezeichnen $G = F \cdot H$.

Nun soll G auch durch F_1 theilbar sein, also muss $F \cdot H$ durch F_1 theilbar sein, d. h. $H = F_1 \cdot K$. Wir haben somit alle Functionen G in der Formel $G = F \cdot F_1 \cdot K$

Die Function $F \cdot F_1$ ist eine vom niedrigsten Grade mit der Eigenschaft.

Ferner mögen F u. F_1 den größten gemeinsamen Theiler g haben

$$F = f \cdot g$$
$$F_1 = f_1 \cdot g,$$

wobei f u. f_1 keinen Theiler mehr gemein haben.

Nun muss sein $G = F \cdot H = f \cdot g \, H$.

Nun soll G auch durch $F_1 = f_1 \cdot g$ theilbar sein. Es ist aber

$$\frac{G}{F_1} = \frac{f \, H}{f_1}$$ da nun f durch f_1 nicht theilbar ist, so muss H durch f_1 theilbar sein, also ist

$$G = g \cdot f \cdot f_1 \cdot K$$ und hierbei ist

$g \cdot f \cdot f_1$ die niedrigste Function, welche sowohl durch F, als auch durch F_1 theilbar ist. Alle andern kann man aus ihr herleiten durch Multiplication mit ganzen Functionen K.

Auf diese Weise kann man weiter verfahren und erhält bei 3 Functionen F, F_1, F_2 folgende Rechnung.

Zunächst bilden wir eine Function, die sowohl durch F, als auch durch F_1 theilbar ist, eine solche ist aber nach dem Vorigen:

$$g \cdot f \cdot f_1 \cdot K.$$

Nun möge diese Function mit F_2 den größten Theiler g_1 gemein haben, so dass wir haben: $g f \cdot f_1 = g_1 f_2$

$F_2 = g_1 f_3$ nun soll

$\frac{G}{F_2} = \frac{f_2}{f_3} \cdot K$ durch F_2 theilbar sein, also muss K durch f_3 theilbar sein und wir haben

$G = g \cdot f \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot K$. und die niedrigste Function dieser Art ist $g \cdot f \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ Auf diese Weise weiter schließend gelangen wir zu dem Satze: Es gibt stets eine ganze Function, vom möglichst niedrigen Grade, die durch gegebene Functionen theilbar ist

Diese Sätze lassen sich auf ganze Functionen von mehreren Veraenderlichen ausdehnen, und dies wollen wir nun untersuchen.

<u>Hilfsatz</u>: Es sei F eine ganze Function von beliebig vielen Variablen $x\ y\ z \dots$ und sie sei in Bezug auf x vom λ^{ten} Grade; ferner G eine ganze Function von den Variablen $y\ z \dots$ (mit Ausnahme von x allein).

Wenn nun die Function

$$F = a_0 x^\lambda + a_1 x^{\lambda-1} \dots + a_\lambda \ (a_0 \dots \text{ Functionen}$$

$$\text{von } y\ z \dots)$$

für $\lambda+1$ specielle Werthe von x durch G theilbar ist, so sind die Coefficienten $\alpha_2\, \alpha_1 \dots \alpha_\lambda$ durch G theilbar, d. h. die Function F ist dann für beliebiges x durch G theilbar. Um dies nachzuweisen, wenden wir die Formel an:

$$F(x\, y\, z \dots) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_{\lambda+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_{\lambda+1})}\, F(x_1, y, z \dots)$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_{\lambda+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_{\lambda+1})}\, F(x_2, y, z \dots)$$
$$+ \dots\dots\dots$$

wo die $x_1\, x_2 \dots$ die gegebenen $(\lambda+1)$ Werthe von x sind. Nun ist der Annahme nach $F(x\, y\, z \dots)$ für die $(\lambda+1)$ Werthe von x durch G theilbar, das heißt die Functionen

$$F(x_1, y\, z \dots)$$
$$F(x_2, y, z \dots)$$
$$F(x_3, y, z \dots)$$
$$\dots\dots$$
$$F(x_{\lambda+1}, y\, z \dots)$$

sind durch G theilbar.

Denken wir uns nun die obige Formel nach Potenzen von x geordnet, so erhalten wir

$$F(x\, y\, z \dots) = (c_1 x^\lambda + c_1' x^{\lambda-1} + \dots)\, F(x_1\, y\, z \dots) + \dots$$
$$= x^\lambda \{ c_1 F(x_1\, y\, z \dots) + c_2 F(x_2\, y\, z \dots) + \dots \} + \dots$$

Jeder Coefficient ist durch G theilbar, d. h. die Function selbst ist für beliebige Werthe von x durch G theilbar, ~~d. h. die Functionen~~ was zu beweisen war. —

Satz: Es seien 2 Functionen von beliebig vielen Variablen

$$F(x y z \ldots) = a_0 x^\lambda + a_1 x^{\lambda-1} + \ldots a_\lambda$$

$$G(x y z \ldots) = b_0 x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + \ldots b_\mu$$

wo die $a_0\ a_1 \ldots b_0\ b_1$ ganze Functionen von den übrigen Variablen $y\ z \ldots$ sind, und es sei F durch G theilbar, beide als Functionen von x betrachtet. Haben nun die $b_0\ b_1 \ldots b_\mu$ keinen gemeinschaftlichen Theiler, so ist auch $F(x y z \ldots)$ durch $G(x y z \ldots)$ theilbar, beide als Functionen von $x y z \ldots$ betrachtet. Da $F(x y \ldots)$ durch G theilbar ~~sind~~ beide als Functionen von x betrachtet, so läßt sich F auf die Form bringen.

$$F(x y z \ldots) = G(x y z \ldots) \cdot H(x y z \ldots)$$

wo $H(x y z \ldots)$ in Bezug auf x ganz, in Bezug auf die übrigen Variablen rational ist. Wir koennen nun, wenn wir den Satz 3 (Seite 146) für 1, 2, 3 ... Variablen als bewiesen ansehen, $H(x y z)$ auf die Form bringen:

$$H(x y z \ldots) = \frac{N_1}{N}\, x^{\lambda-\mu} + \frac{N_2}{N}\, x^{\lambda-\mu-1} + \ldots$$

so daß es keinen Theiler gibt, durch den all $N\ N_1 \ldots$ theilbar wären. Es ist nun zu zeigen, daß N eine Constante, von ~~x~~ $y\ z \ldots$ unabhängige Größe ist. Wäre N eine wirkliche Function von $y, z \ldots$, so wäre sie entweder unzerlegbar, oder zerlegbar in andere ganze Functionen von $y\ z \ldots$ Zunächst nehmen wir, N sei unzerlegbar, d. h. läßt sich nicht darstellen als Product zweier oder mehreren ganzen Functionen

Setze ich

$$N \cdot F = G \cdot H_1, \quad H_1 = N_1 x^{\lambda-\mu} + N_2 x^{\lambda-\mu-1} + \dots$$

nun koennen wir dem x unendlich viele Werthe beilegen $x_1, x_2 \dots$, so dafs die Function H_1 nicht durch N theilbar ist; denn wäre es möglich $(\lambda-\mu+1)$ Werthe fur x zu finden, für welche die Function H_1 durch N theilbar wäre, so müfsten alle Coefficienten $N_1, N_2 \dots$ durch N theilbar sein, was nicht der Fall ist. Unter der Voraussetzung ist also N relativ prim gegen H_1. Wir schliefsen nun so: $G H_1$ is durch N theilbar, da ja

$F = \frac{G \cdot H_1}{N}$, da nun H_1 gegen N relativ prime ist, so müfste G durch N theilbar sein, dies müfste für beliebig viele x gelten, also müfsten die Coefficienten von $G = b_0 x^\mu + \dots$ durch N theibar sein, was nach der Voraussetzung nicht der Fall ist. Da aber $\frac{G \cdot H_1}{N}$ einer ganzen Function von $x\,y\,z \dots$ sein soll, so mufs N eine Constante sein.

Zweitens sei N zerlegbar, als dann mufs es sich in unzerlegbare Factoren zerlegen lassen. Nehme ich nun einen dieser Factoren, so komme ich durch die Wiederholung der obigen Schlüfse zu dem Resultate, dass der betrachtete Factor von N eine Constante sein mufs, da dies für jeden Factor von N gilt, so ist N selbst eine Constante.

Wir sehen also hieraus, daß wenn

$F = a_0 x^{\alpha} + \ldots$

$G = b_0 x^{\mu} + \ldots$ als Functionen von x betrachtet, die Eigenschaft haben, daß F durch G theilbar ist, und haben nicht sämtliche $b_0 \ldots b_\mu$ einen gemeinschaftlichen Factor, so ist auch F durch G theilbar, wenn man beide Functionen, als Functionen von sämmtlichen Variablen $x\, y\, z \ldots$ ansieht.

Nun gehen wir zum Beweise, daß wenn die obigen Sätze für $(n-1)$ Variablen gelten, daß sie dann auch für n Variablen gelten. Da wir alle späteren Sätze hergeleitet haben aus der Methode des größten gemeinsamen Theilers, so werden wir hierbei nur diese Aufgabe lösen und alle anderen Sätze ergeben sich als Folgerungen davon.

Wir haben früher bewiesen, daß wenn wir 2 Functionen von $x\, y\, z \ldots$ haben, so können wir sie stets als Functionen von $u, v, w \ldots$ so darstellen, daß der Coefficient von u in der höchsten Potenz eine Constante von Null verschieden sein wird. Es seien F u F_1 2 Functionen mit n Variablen mit der Eigenschaft, daß der Coefficient von x zur höchsten Potenz constant sind. Es sei

$F = a_0 x^{\alpha} + a_1 x^{\alpha-1} + \ldots + a_\alpha$

$F_1 = b_0 x^{\mu} + b_1 x^{\mu-1} + \ldots + b_\mu$, wo $a_0\, b_0$ Constanten sind und die übrigen Coefficienten Functionen von den übrigen $(n-1)$ Variablen $y, z \ldots$ sind. Betrachten wir F u F_1 als Functionen von x, indem wir den $y, z \ldots$ bestimmte Werthe beilegen und wenden den

Algorithmus an: $$\begin{aligned} F &= g_1 F_1 + F_2 \\ F_1 &= g_2 F_2 + F_3 \\ &\cdots\cdots \\ F_{k-1} &= g_k F_k + F_{k+1} \end{aligned}$$

D. h. ich bestimme zunächst G_1 vom Grade $\nu-\mu$, so dass $F - G_1 F_1$ vom niedrigeren als dem μ^{ten} Grade ist u. s. w. Man kommt schliesslich auf ~~die~~ eine Function F_{k+1} die von x unabhängig ist. Ist dieses Glied $F_{k+1} = 0$ so ist F_k der grösste gemeinsame Theiler von F und F_1 als Functionen von x betrachtet.

In unserem Falle sind die F's und G's ganze Functionen von x, in $y\, z \ldots$ rational.

Es sei F_{k+1} von x unabhängig aber auch nicht null, so wird F_{k+1} eine rationale Function sein von $y\, z \ldots$

Wir koennen nun die Rechnung so anstellen, dass die F's ganze Functionen von $x\, y\, z \ldots$ sind. Denken wir uns nämlich, dass der gemeinschaftliche Nenner von F_1 u F_2 gleich h ist, den wir nach der Voraussetzung finden können, da diese Functionen nur von $(n-1)$ Variablen abhängen, so können wir setzen:

$h \cdot F = h G_1 \cdot F_1 + \overline{F}_2$ wo $\overline{F}_2$ eine ganze Function ist von sämmtlichen Variablen. Nun setze ich

$$h F_1 = G_2 \cdot \overline{F}_2 + h F_3 \text{ und dann}$$

$$h h_1 F_1 = h_1 G_2 \overline{F}_2 + \overline{F}_3 \text{ und ebenfalls}$$

$$h h_1 h_2 \overline{F}_2 = h_2 G_3 \overline{F}_3 + \overline{F}_4 \text{ und zuletzt}$$

$$h_1 h_1 h_2 \ldots h_{k-1} \overline{F}_{k-1} = G_k \overline{F}_k + \overline{F}_{k+1}$$

Wenn nun F u. F_1 einen Theiler haben, so muss dieser auch ein Theiler sein von F_1 u F_2, also auch von $\bar{F}_3 . \bar{F}_2$ u. schliesslich von $\bar{F}_k$ u $\bar{F}_{k+1}$. Ist nun $\bar{F}_{k+1}$ nicht null so haben $\bar{F}_k$ $\bar{F}_{k+1}$ keinen gemeinsamen Theiler.
Wenn $F_{k+1} = 0$, so ist F_k der grösste gemeinsame Theiler von F u F_1. Setzen wir nun

$$F_k = \frac{c_0 x^{\sigma} + c_1 x^{\sigma-1} + \ldots + c_{\sigma}}{c}$$

wo die c's ganze Function von $y\, z\, ..$ sind.
Als Functionen von x betrachtet sind F u. F_1 durch F_k theilbar, also müssen sie auch durch den Zähler von F_k, $= \bar{F}_k$ theilbar sein, d.h.:

$\frac{F}{\bar{F}_k}$ u $\frac{F_1}{\bar{F}_k}$ sind als Functionen von x ganze Functionen von x. Nun koennen wir von F u F_1 voraussetzen, dass in ihnen die Coefficienten $a_0\, a_1 \ldots$, u $b_0\, b_1 \ldots$ keinen gemeinsamen Theiler haben, was dadurch erfüllt ist, dass a_0 eine Constante u. b_0 eine Constante ist. Unter dieser Voraussetzung sind F u F_1 durch $\bar{F}_k$ theilbar, als Functionen von allen Variablen $x\, y\, z ..$ betrachtet. Wenn wir also alle Coefficienten von F u F_1 von dem grössten gemeinsamen Theiler befreien, so finden wir den grössten gemeinsamen Theiler von F u. F_1, als Functionen von x allein betrachtet. Ist nun $\bar{F}_{k+1}$ nicht null, so haben sie keinen Theiler, ist aber $\bar{F}_{k+1} = 0$ bringen wir $\bar{F}_k$ auf die Form

$\bar{F}_k = \frac{c_2 x^6 + \dots}{c}$ und dann ist $\bar{F}_k$ der größte gemeinsame Theiler von F u. F_1. Dass man die Coefficienten der F u. F_1 von ihren größten gemeinsamen Theilern befreit, hat auf die Operation keinen Einfluss. Denn es sei

$$F = g_1 \cdot f.$$

$$F_1 = g_2 f_1 \text{ wo } g_1 \text{ u. } g_2 \text{ von den } y\, z \dots \text{ abhaengen.}$$

Wenn wir jetzt einen gemeinsamen Theiler von F u. F_1 suchen, so untersuchen wir, ob er x enthält oder nicht; im 1ten Falle muss der gemeinsame Theiler von F u. F_1 auch ein Theiler von f u. f_1 sein; im 2ten Falle von g_1 u. g_2, da ja die f u. f_1 so bestimmt werden konnen, dass sie keinen grössten von x unabhängigen Theiler haben. Man suche also den g. g. Theiler von g_1 u. g_2, und dann von f u. f_1, alsdann ist das Product derselben; der größte gemeinsame Theiler von F u. F_1.

Bei den übrigen Sätzen wiederholen sich die Schlüsse, so dass man sich auf diesen Satz stützend, alle anderen Sätze über die Theilbarkeit ganzer Functionen nachweisen kann.

<u>Satz.</u> Rationale Functionen von $x\, y\, z \dots$ lassen sich stets darstellen als Quotient zweier ganzer Functionen von $x\, y\, z \dots$ die keinen gemeinsamen Theiler haben. Um diesen Satz nachzuweisen, braucht man nur den

kleinsten gemeinsamen Nenner aller Glieder aufzusuchen.

Satz. Es sei $F(x y z \ldots)$ eine beliebige ganze Function von $x\, y\, z \ldots$, so wird sie entweder zerlegbar sein oder nicht in unzerlegbare Factoren.

Nehmen wir an, sie sei zerlegbar in die Factoren

$$F = F_1 \cdot F_2 \ldots F_m .$$

Man denke sich F auf irgend eine andere Weise zerlegt in unzerlegbare Factoren

$$F = G_1 G_2 \ldots G_n .$$ Alsdann behaupte ich, dass wenn $F_1 \ldots, G_1 \ldots$ unzerlegbar sind so muss

$$F_1 = c_1 G_1$$
$$F_2 = c_2 G_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$F_m = c_m G_m$$ sein. (In der Zahlentheorie sind die c's gleich ± 1.) Ich nehme F_1 willkürlich heraus, so ist $G_1 \ldots G_n$ durch F_1 theilbar, da ja F es ist. Vergleiche ich nun F_1 mit G_1, so haben F_1 u G_1 einen Theiler oder auch nicht, im 1ten Falle muss F_1 der Theiler von F_1 u G_1 sein, da ja F_1 nicht mehr zerlegbar ist; dies gilt auch umgekehrt, so dass wir haben $F_1 = c_1 G_1$. Haben aber F_1 u G_1 keinen Theiler gemein, so muss

$G_2 \ldots G_n$ durch F theilbar sein.

Daraus folgt dass F_1 mit G_2 einen Theiler gemein hat oder nicht; im 1ten Falle muss

$F_1 = c_1 G_2$ in 2^{ten} muss

$G_3 \ldots G_n$ theilbar sein durch F_1 und so weiter schliessend, sieht man dass man nothwendig zu einem G gelangen muss, welches sich von F_1 nur um eine multiplicative Constante unterscheidet. Alsdann lasse ich in dem Producte F_1 u G_1 fort und verfahre auf dieselbe Weise mit $F_2 \ldots F_m$ $G_2 \ldots G_n$ (wenn $c_1 G_1 = F_1$ ist)
Hieraus folgt der Satz, den wir, wenn wir von den Constanten $c_1 \ldots$ abstrahiren:

"Jede ganze Function von $x\, y\, z \ldots$ kann nur auf eine einzige Weise in unzerlegbare Factoren zerlegt werden.
Dies sind die allgemeinsten Sätze über ganze und rationale Functionen.

Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen der Variablen fortschreiten.

(Gewöhnliche Potenzreihen)

Wenn wir das Princip verfolgen, welches uns bei den Operationen mit Zahlengrössen zur Erweiterung der Begriffe diente, d. h. das Princip der Definition der Operationen, dass sie auch auf unendlich viele Grössen passen, so kommen wir durch Erweiterung des Begriffes einer ganzen u. rationalen Function auf unendliche Reihen.
So wie ~~die~~ ~~die~~ wir die ganzen Functionen als Summe von einer

endlichen Anzahl von ganzen positiven Potenzen, jede Potenz mit einer Constanten multiplicirt, definirt haben, so definiren wir eine gewöhnliche (ganze) Potenzreihe, als Summe von unendlich vielen Gliedern, von denen jedes eine ganze positive Potenz der Variablen ist, multiplicirt mit einer Constante. Die nächste Untersuchung hierbei wird natürlich die sein, ob überhaupt solche Summen Sinn haben, endliche Größen darstellen, und wenn sie Sinn haben, wann dies der Fall ist. Dies muss, wenn uns die Reihe eine Function definiren soll, nicht für einen speciellen Werth der Variablen gelten, sondern für alle Werthe, die einem bestimmten Bereiche angehören.

Indem wir die Bezeichnungen beibehalten, die wir bei ganzen Functionen hatten, betrachten wir die unendliche Reihe

$$\sum a_\mu x^\mu \quad (\mu = 0, 1 \dots \infty) \text{ oder kurz}$$
$$\sum_{0\mu}^{\infty} a_\mu x^\mu$$

Für einen Werth von x nämlich $x = 0$ hat diese Reihe einen Sinn, da sie dann gleich a_0 ist.

I <u>Hauptsatz</u>. Wenn man für x einen Werth finden kann x_0, für welchen alle Glieder der Reihe endlich bleiben, dass heisst für welchen jedes Glied $a_\mu x^\mu$ dem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine endliche positive Größe g,

$|a_\mu x_0^\mu| < g$, wie groß man auch das μ nehmen will, so hat die Reihe $\sum_{0\mu}^{\infty} a_\mu x^\mu$ für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag kleiner ist als der von x_0, einen endlichen Werth. Bezeichnen wir die absoluten Beträge von a_μ, x, x_0 resp mit A_μ, ξ_0, ξ, so haben wir der Voraussetzung gemäß

$A_\mu \cdot \xi_0^\mu < g$. Ferner ist

$|a_\mu x^\mu| = A_\mu \xi^\mu$. Nun ist aber

$A_\mu < \frac{g}{\xi_0^\mu}$ also auch

$A_\mu \xi^\mu < g \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^\mu$ nun hat die Reihe

$\sum_{\mu=0}^{\infty} g\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^\mu$ einen endlichen Werth, da ja $\xi < \xi_0$ also $\frac{\xi}{\xi_0} < 1$ ist.

Also haben wir $\sum A_\mu \xi^\mu < \sum g\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^\mu$, d. h.

$\sum A_\mu \cdot \xi^\mu = \sum |a_\mu x^\mu|$ hat einen endlichen Werth.

Nun aber wissen wir, daß wenn die Summe der absoluten Beträge der Glieder einer unendlichen Reihe endlich ist, daß dann die Reihe $\sum a_\mu x^\mu$ selbst convergent ist.

Nun lassen sich die Sätze über unendliche Summen hierauf anwenden, besonders diejenigen erwähnen wir, hier, nach denen es erlaubt ist eine Reihe mit der obigen Eigenschaft beliebig in Gruppen zu theilen. Auch wollen wir hier speciell den Satz nachweisen, daß es möglich ist, von einer solchen convergirenden Reihe eine endliche

Anzahl von Gliedern so abzusondern, dass der absolute Betrag der Summe der übrigen Glieder kleiner ist, als eine beliebig gewählte, positive Grösse δ. Wir setzen

$$\sum_{0\mu}^{\infty} a_\mu x^\mu = \sum_{0\mu}^{n-1} a_\mu x^\mu + \sum_{n-1\mu}^{\infty} a_\mu x^\mu.$$

Es ist aber $|a_\mu x^\mu| < g\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^\mu$, da nun

$|\sum a_\mu x^\mu| \leqq \sum |a_\mu x^\mu|$ ist, so haben wir

$$\left|\sum_n^\infty a_\mu x^\mu\right| < \sum_{n\mu}^\infty g\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^\mu < g\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^n \left\{1 + \frac{\xi}{\xi_0} + \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 + \dots\right\}$$

Also ist

$$\left|\sum_{n\mu}^\infty a_\mu x^\mu\right| < g\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^n \frac{1}{1-\frac{\xi}{\xi_0}}$$

da nun $\frac{\xi}{\xi_0} < 1$ so kann man stets das n so gross wählen, dass $g\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^n \frac{1}{1-\frac{\xi}{\xi_0}} < \delta$ ist, da ja $\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^n$ beliebig klein gemacht werden kann. Es ist also möglich aus einer in dem obigen Sinne convergirenden Reihe $\sum_0^\infty a_\mu x^\mu$ eine endliche Anzahl von Gliedern so abzusondern dass

$$\left|\sum_0^\infty a_\mu x^\mu - \sum_n^\infty a_\mu x^\mu\right| < \delta \text{ ist.}$$

<u>Begriff des Convergenzbezirkes</u>. Wir sagen von einer unendlichen Reihe mit endlicher Summe, sie sei convergent. Die Gesammtheit der Werthe für welche die Reihe einen endlichen Werth hat, nennen wir Convergenzbezirk oder Convergenzbereich der Reihe, (eigentlich der Variablen, für welche die Reihe endlich ist).

Es können hierbei 3 Fälle eintreten:

1, die Reihe ist nur für $x = 0$ endlich, dann stellt sie keine eigentliche Function vor, sodaß wir den Fall auslaßen.
2, Es ist auch möglich, daß die Reihe convergent ist, wie groß ich auch die Variable x nehme.
3, Es kann die Reihe für bestimmte Werthe des x convergent sein.
Zunächst haben wir das Corollar: Wenn eine Reihe einen endlichen Werth hat für einen bestimmten Werth von x, so wird sie auch endlich bleiben für jedes x dessen absoluter Betrag kleiner ist als der von dem bestimmten x.
Oder anders gesagt: Wenn für $x = x_0$ die Glieder der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ die Eigenschaft haben, daß $|a_\nu x^\nu| < g$, so wird es auch der Fall sein für alle x, deren absoluter Betrag kleiner ist als x_0.
Ehe wir zu der weiteren Untersuchung übergehen zeigen wir an speciellen Beispielen, daß alle 3 obigen Fälle vorkommen können. Nehme ich zunächst die Reihe

$$1 \cdot x + 1 \cdot 2 x^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 x^3 + \dots 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \nu x^\nu + \dots$$

so sehen wir zunächst daß die Glieder der Reihe stets wachsen; denn für den Quotient zweier aufeinander folgender erhalte ich $(\nu + 1) x$.
Wie klein ich auch x annehme, so werde ich doch

$(\lambda+1)x$ so groß machen koennen, wie ich will. Es gibt also keinen von Null verschiedenen Werth für x, für welchen sämmtliche Glieder endlich wären. Die Reihe hat also nur für $x=0$ einen Sinn. Als zweites Beispiel nehmen wir die Reihe

$$\frac{1}{1}+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots\frac{x^\lambda}{1\cdot 2\cdots\lambda}+\cdots$$

Setze ich für $x=x_0$ so bekomme ich als Quotient für 2 aufeinander folgende

$$\frac{x_0}{\lambda+1}$$

Wie groß ich auch x_0 annehme, werden alle Glieder bis zum λ^{ten} endlich sein, nun kann ich, das $\lambda+1$ so groß nehmen, daß $\frac{x_0}{\lambda+1}<1$ ist, es werden also alle Glieder von dem λ^{ten} an abnehmen, also ebenfalls endlich ist. Die obige Reihe convergirt somit für jedes beliebiges x. Schließlich ist die Bedingung der Convergenz der Reihe $1+x+x^2+x^3+\ldots$ daß $x<1$ sein muss. Diese 3 Beispiele zeigen uns die Möglichkeit aller obigen 3 Fälle, die bei den Reihen vorkommen können. Wenn wir den ersten Fall ausschließen, so sehen wir, daß der Convergenzbezirk einer Reihe sich über die ganze Ebene erstrecken kann, oder auch nur einen Theil der Ebene ausmacht. Wir beschäftigen uns nun mit der Bestimmung des wahren Convergenzbezirkes einer unendlichen Reihe, die als gewöhnlichen Potenzreihe gegeben ist.

Hilfsatz. Denken wir uns im Gebiete der reellen Größen, eine Veraenderliche x' auf irgend eine Weise definirt, so daß sie nur positive Werthe (die auch keine stetige Folge zu bilden brauchen, wie z. B. die rationalen Brüche) ergibt, die nicht größer sind als g, so läßt sich nachweisen daß es eine positive Zahl a gibt, so daß ~~ist~~ nie $x' > a$, daß es aber wie nahe ich auch a_1 an a, $a_1 < a$ wähle, zwischen a_1 u. a noch Werthe von x' gibt, welche in dem Intervalle von a_1 und a enthalten sind. Wir sagen dann a ist die obere Grenze von x'. Dieses a kann auch zu den Werthen von x' gehören oder nicht.

Es sei also x' eine auf beliebige Weise definirte Zahl x', die nie größer werden kann als g und nehmen eine beliebige positive ganze Zahl α, und betrachten die Variable $\alpha x'$, so hat sie auch die Eigenschaft, nicht beliebig groß werden zu können. Wir betrachten nun die Reihe der Zahlen 1, 2, 3 .. so gibt es unter diesen eine Zahl, die größer ist als jeder Werth von $\alpha' x$. Es muß auch eine erste Zahl geben, die größer ist, als jeder Werth von $\alpha' x$, diese erste Zahl bezeichnen wir mit $b+1$, so daß wir haben

$\alpha x' < b+1$. Diese Zahl b kann auch null sein. In der Reihe der Zahlen 0, 1, 2 … muss es eine kleinste Zahl b geben, für welche die Bedingung

1 $x\, x' < b+1$ erfüllt wird. Zu jeder positiven ganzen Zahl a gibt es eine ganz bestimmte auf diese Weise definirte Zahl b. Wenn also ~~x~~ x' auf irgendeine Weise definirt wird, so werden wir gezwungen jede positive ganze Zahl a der obigen Bedingung gemäss mit einer andern ganzen positiven Zahl b in Verbindung zu setzen. Haben wir nun die Zahlen a u b so gewählt, so erhalten wir für jeden Werth von x'

2 $$x' < \frac{b+1}{a}.$$

In dem Intervalle $\frac{b}{a} \ldots \frac{b+1}{a}$ muss es aber wenigstens einen Werth von x' geben, denn gäbe es keinen so würde das heissen, dass jeder Werth von x' kleiner ist als $\frac{b}{a}$, oder $a\,x' < b$, es wäre also schon b diejenige Zahl, für welche die obige Bedingung erfüllt wird; es soll aber erst $b+1$ die erste Zahl sein, für welche stets $a\,x' < b+1$.

Wir nehmen ~~nur~~ nun für a die Potenzen von α, α^γ, $\gamma = 0, 1, \ldots$; zu jedem α^γ gehört dann eine bestimmte Zahl b, die wir entsprechend mit b_γ bezeichnen.

Wir haben dann jedes

$$x' < \frac{b_\gamma + 1}{\alpha^\gamma}.$$ In dem Intervalle

$\frac{b_\gamma}{a^\delta} \dots \frac{b_\gamma+1}{a^\delta}$ gibt es aber sicher wenigstens einen Werth 3
von x'. Auf diese Weise erhalten wir eine Reihe von Brüchen $\frac{b_\gamma}{a^\gamma} \dots$ Betrachten wir nun 2 aufeinander folgende
$\frac{b_{\gamma+1}}{a^{\delta+1}}, \frac{b_\gamma}{a^\delta}$ und bringen $\frac{b_\gamma}{a^\delta}$ auf den Nenner $a^{\gamma+1}$, so dass ich habe $\frac{a b_\gamma}{a^{\gamma+1}}$

Nun weiss ich, dass in dem Intervalle

$\left(\frac{b_\gamma}{a^\delta} \dots \frac{b_\gamma+1}{a^\delta}\right)$ es sicher Werthe von x gibt, d. h.

in dem Intervalle

$\left(\frac{a b_\gamma}{a^{\delta+1}} \dots \frac{a b_\gamma + a}{a^{\delta+1}}\right)$ gibt es Werthe von x' 4

für welche $x' \geq \frac{a b_\gamma}{a^{\delta+1}}$. Nun aber ist jedes $x' < \frac{b_{\delta+1}+1}{a^{\delta+1}}$. 5

Also folgt, dass es sicher sein muss

$\frac{b_{\gamma+1}+1}{a^{\delta+1}} > \frac{a b_\gamma}{a^{\delta+1}}$, oder

$b_{\gamma+1}+1 > a b_\gamma$. 5

Nun ist aber stets $\frac{b_\gamma+1}{a^\delta} = \frac{a b_\gamma + a}{a^{\delta+1}} > x'$ oder

$x' < \frac{a b_\gamma + a}{a^{\delta+1}}$, ferner ist sicher 6

$x' \geq \frac{b_{\gamma+1}}{a^{\delta+1}}$ Also folgt wegen 6

$a b_\gamma + a > b_{\gamma+1}$. Wir haben also die beiden 7

Ungleichungen $b_{\gamma+1} + 1 > a b_\gamma$

$a b_\gamma + a > b_{\gamma+1}$; aus der 1ten folgt zunächst,
da a u b stets ganze Zahlen sind, $b_{\gamma+1} \geq a b_\gamma$ 8

setzen wir $b_{\gamma+1} = a b_\gamma + c_{\gamma+1}$, so muss, wegen 9

$b_{\gamma+1} < a b_\gamma + a$, $c_{\gamma+1}$ nur die Werthe 0, 1, 2 ...
... $(a-1)$ annehmen koennen. Durch die Definition sind

die Zahlen b_0 b_1 ... vollständig bestimmt, und hieraus folgt die ganz bestimmte Zahlenreihe

c_0 c_1 ....; aus 9 folgt nun

10 $$\frac{b_{\gamma+1}}{a^{\gamma+1}} = \frac{b_\gamma}{a^\gamma} + \frac{c_{\gamma+1}}{a^{\gamma+1}}.$$ Legen wir dem b_γ die Werthe $b_0 b_1$ ... $b_{\gamma+1}$ bei, so erhalten wir

$$\frac{b_1}{a} = b_0 + \frac{c_1}{a},$$
$$\cancel{\frac{b_2}{a^2}} = \cancel{\frac{b_1}{a}} + \frac{c_2}{a^2}$$
$$\frac{b_3}{a^3} = \cancel{\frac{b_2}{a^2}} + \frac{c_3}{a^3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{b_\gamma}{a^\gamma} = \frac{b_{\gamma-1}}{a^{\gamma-1}} + \frac{c_\gamma}{a^\gamma}$$
$$\frac{b_{\gamma+1}}{a^{\gamma+1}} = \frac{b_\gamma}{a^\gamma} + \frac{c_{\gamma+1}}{a^{\gamma+1}}$$ und durch Addition folgt

11 $$\frac{b_{\gamma+1}}{a^{\gamma+1}} = b_0 + \frac{c_1}{a} + \frac{c_2}{a^2} + \frac{c_3}{a^3} + \ldots + \frac{c_{\gamma+1}}{a^{\gamma+1}}$$

Auch sieht man aus dem obigen, daß man die Zahlenreihe c_γ in's Unendliche fortsetzen kann. Nun betrachten wir die Zahlengröße welche wir durch die obige Gleichung definiren.

12 $$g = b_0 + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+1}}{a^{\mu+1}}$$

Diese Zahl g ist eine ganz bestimmte, denn die Reihe convergirt, da wir ja haben

$$\sum_0^\infty \frac{c_{\mu+1}}{a^{\mu+1}} < \sum_0^\infty \frac{1}{a^\mu}$$

Von dieser Größe g zeigen wir, daß sie die obere Grenze ist. Dazu muss bewiesen werden, daß es keinen Werth von x, der größer wäre als g (gibt), und daß wenn ich $g' < g$ beliebig nahe an g nehme, daß es dann noch Werthe von x gibt, für welche $x' > g'$ ist. Um das erstere nachzuweisen, reicht es aus zu zeigen, daß wenn ich zu g eine beliebige (kleine) Größe δ addire, daß dann stets $g+\delta > x'$.

Wir haben nun

$$g \geqq b_0 + \frac{c_1}{a} + \frac{c_2}{a^2} + \cdots \frac{c_{\gamma+1}}{a^{\gamma+1}},$$ wo das untere Zeichen dann 13

gilt, wenn die übrigen c's null sind.

Daraus folgt.

$$g + \frac{1}{a^{\gamma+1}} \geqq b_0 + \frac{c_1}{a} + \frac{c_2}{a^2} + \cdots + \frac{c_{\gamma+1}+1}{a^{\gamma+1}}$$ und wegen 11 ist $g + \frac{1}{a^{\gamma+1}} \geqq \frac{b_{\gamma+1}+1}{a^{\gamma+1}}$. Nun ist nach der Definition 14

der Zahlen b_γ; $\frac{b_{\gamma+1}+1}{a^{\gamma+1}}$ stets größer als x' also ist ~~weiter~~ sicher

$$g + \frac{1}{a^{\gamma+1}} > x'.$$ Nun kann ich $\frac{1}{a^{\gamma+1}}$ beliebig klein annehmen, also hat g die Eigenschaft daß: wenn ich dazu eine beliebige, kleine Größe δ addire, so ist die Summe stets größer als x'. D.h. x' kann nie größer werden als g. Nun ist noch zu zeigen, daß wenn ich $g' < g$ beliebig annehme, daß es dann stets Werthe von x' gibt, die in dem Intervalle von $g' \ldots g$ vorkommen. Nehme ich g' beliebig an, so kann ich aus der Reihe für $g = b_0 + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+1}}{a^{\mu+1}}$ stets ~~Werthe~~ so viele Glieder herausheben, sodaß der Rest beliebig kleine Summe hat; nehmen wir g' beliebig an, so können wir immer m so wählen, daß

$$b_0 + \frac{c_1}{a} + \frac{c_2}{a^2} + \cdots + \frac{c_{m+1}}{a^{m+1}} = \frac{b_{m+1}}{a^{m+1}} > g';$$ nun wissen wir aber daß es stets Werthe von x' gibt, für welche $x' > \frac{b_{m+1}}{a^{m+1}}$,

also auch $x' > g'$. Demnach ist die Zahl g wirklich eine Grenze nach der Definition derselben, sie ist die obere Grenze von x'.

Wenn x' so definirt ist, dass es beliebig grosse Werthe annehmen kann, dann sagen wir seine obere Grenze ist ∞; das ist nämlich klar, dass die Variable x' nie grösser werden kann als ∞ und dass wenn ich eine Zahl g beliebig gross annehme, dass es dann stets x' gibt, für welches $x' > g$. Wir können somit ganz allgemein sagen: jede positive veränderliche Grösse hat stets eine ganz bestimmte Grenze.

<u>Corollar</u>: Jede reelle Grösse x', die als Veraenderliche angesehen wird, hat stets eine untere und eine obere Grenze; d. h. dass es stets zwei Grössen g_1, g_2 gibt, so dass die Veränderliche x' nur solche Werthe annehmen kann, die in dem Intervalle $g_1 \ldots g_2$ liegen, und wenn ich g' in diesem Intervalle beliebig nahe an g_1 (resp. an g_2) annehme, dass dann stets Werthe von x' gibt, für welche resp. $x' < g_1'$, ($x' > g'$) ist.

Es sei α irgend einer der unendlich vielen Werthen, welche x' annehmen kann und sondern aus $x' - \alpha$, alle diejenigen Werthe, für welche $x' - \alpha$ positiv ist; dann gibt es da $x' - \alpha$ positiv ist, nach dem vorigen stets eine Grenze β_2, so dass $x' - \alpha \leqq \beta_2$ und wenn ich $\beta_2' < \beta_2$ annehme, stets Werthe gibt, für welche $x' - \alpha > \beta_2'$. Wenn ich nun setze

$g_2' = \alpha + \beta_2$, so habe ich

$x' \leqq g_2$ und wenn ich g_2' beliebig wähle $< g_2$, so gibt es $x' > g_2'$. Also ist g_2 die obere Grenze von x'. Um die untere Grenze zu finden, betrachte ich $\alpha - x'$ u. sondere ich alle diejenigen Werthe, für welche $\alpha - x'$ positiv ist. Für $\alpha - x'$ gibt es dann eine obere Grenze, so dass

$$\alpha - x' \leqq \beta_1 \text{ u.}$$

$$\alpha - x' < \beta_1', \text{ dann setzen wir}$$

$$g_1 = \alpha - \beta_1 \text{ und}$$

$$g_1' = \alpha - \beta_1' \text{ so haben wir}$$

$$x' \geqq g_1 \text{ und } < g_1'.$$

Also ist g_1 die untere, g_2 die obere Grenze von x'.

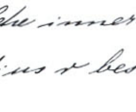
Wir koennen also allgemein den Satz aussprechen: Für jede reelle, beliebig definirte veraenderliche Größe x' gibt es stets eine untere und eine obere Grenze. Was die Grenzen selbst anbetrifft, so koennen hier 4 Fälle eintreten.

1) Obere Grenze endlich, untere Grenze endlich;
2) " " " " $+\infty$; " " " " endlich;
3) " " " " endlich; " " " " $-\infty$;
4 " " " " $+\infty$; " " " " $-\infty$.

Hiermit haben wir einen rein arithmetischen Begriff der Grenze gegeben, und die Existenz derselben auf rein arithmetischem Wege nachgewiesen. — Nun kehren wir zu den Reihen zurück. Wir haben angenommen, dass es positive Werthe von x gibt, x_0, so dass $|a_\lambda|\, x_0^\lambda$ endlich ist für jedes λ. Diese Größe x_0 ist definirt, sie hat also eine obere Grenze. Ist die obere Grenze ∞, dann haben wir den Satz, dass

$\sum a_\lambda x^\lambda$ für jedes x einen endlichen Werth hat. Wenn die obere Grenze von x_0 eine endliche Größe r ist, dann gibt es in der Nähe von r noch Werthe r' so dass $r' < x_0 < r$ ist. Dann sind alle Glieder der Reihe endlich für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag kleiner ist als r und für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag größer ist als r, hat die Summe keinen endlichen Werth; was unmittelbar klar ist.

Es gibt also für jede Reihe $\sum a_\lambda x^\lambda$ eine bestimmte Größe r, so dass die Reihe für jedes x, wofür $|x| < r$ sicher convergirt. Alle Werthe nun für x, welche diese Eigenschaft haben, dass $|x| < r$, werden geometrisch repraesentirt als Punkte der complexen Zahlenebene, welche innerhalb eines, um den Nullpunkt mit dem Radius r beschriebenen Kreises liegen.



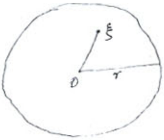
Diesen Kreis nennen wir den Convergenz=Kreis der Reihe.

Bis jetzt haben wir x in der Umgebung von Null angenommen, wir können aber auch dass x in der Umgebung eines Punktes

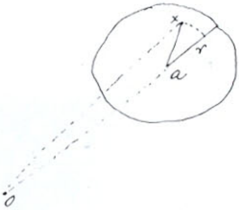
a nehmen und dann die Reihen $\sum a_\mu (x-a)^\mu$ untersuchen.
Setzen wir $x - a = \xi$, so haben wir die Reihe

$$\sum a_\mu (x-a)^\mu = \sum a_\mu \xi^\mu$$

Die letzte Reihe von ξ hat einen Convergenzkreis um den Nullpunkt. Jedem Punkte ξ entspricht ein Punkt x



und dem Kreise um 0 entspricht ein Punkt um a, und es ist klar, dass für alle Punkte innerhalb des Kreises um a, $|x-a| < r$ ist.



Wir wollen später für solche Functionen, die für die Umgebung einer Stelle a definirt werden, die Bezeichnung einführen $G(x|a)$.

Diese Betrachtungen erweitern wir nun auf Functionen mehrerer Variablen $x\, y\, z \ldots$ Es sei

$$G(x y z \ldots) = \sum_{\mu\mu'\nu\ldots} x^\mu y^{\mu'} z^\nu$$

<u>Lehrsatz</u> Wenn man ein System von Werthen von $x\, y\, z \ldots$ gleich $\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0 \ldots$ findet, wo $\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0$ positive Zahlen bedeuten mögen, so dass jedes Glied der Reihe dem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine positive endliche Zahl g,

$A_{\mu,\mu',\nu,\ldots}\, \xi_0^\mu\, \eta_0^{\mu'}\, \zeta_0^\nu \ldots < g$, so ist die Reihe 1

$\sum a_{\mu\mu'\nu\ldots}\, x^\mu y^{\mu'} z^\nu$ convergirend für alle Werthsysteme $x\, y\, z$ für welche $|x| < \xi_0$ $|y| < \eta_0$ $|z| < \zeta_0 \ldots$ ist. 2

Aus 1 haben wir zunächst

$$A_{\lambda\mu\nu\ldots}\xi_0^{\lambda}\eta_0^{\mu}\zeta_0^{\nu}\ldots < g; \text{ also}$$

3 $$A_{\lambda\mu\nu\ldots}\xi^{\lambda}\eta^{\mu}\zeta^{\nu} < g\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{\lambda}\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\mu}\left(\frac{\zeta}{\zeta_0}\right)^{\nu}\ldots$$

Nun setzen wir der Kürze wegen

4 $$\frac{\xi}{\xi_0} = u, \frac{\eta}{\eta_0} = v, \frac{\zeta}{\zeta_0} = w \ldots$$

so ist der Voraussetzung gemäss $u < 1, v < 1, w < 1,$ also haben wir

5 $$\frac{1}{1-u} = \sum_{\lambda} u^{\lambda}$$
$$\frac{1}{1-v} = \sum_{\lambda} v^{\lambda}$$
$$\frac{1}{1-w} = \sum_{\lambda} w^{\lambda}$$

. . . .

Wenn wir nun eine endliche Anzahl von unendlichen Reihen mit endlichem Werthe zu multiplicieren haben, so verfahren wir nach den allgemeinen Regeln, indem wir mit jedem Gliede der einen Reihe alle Glieder der anderen multiplicieren. Das Product hat dann einen endlichen Werth. Wir erhalten aber

$$\sum_{\lambda} u^{\lambda} \sum_{\mu} v^{\mu} \cdot \sum_{\nu} w^{\nu} = \sum_{\lambda,\mu,\nu} u^{\lambda} v^{\mu} w^{\nu} = \frac{1}{1-u} \cdot \frac{1}{1-v} \cdot \frac{1}{1-w} \ldots \quad 6$$

Unter der Voraussetzung hat die Summe der absoluten Beträge der Glieder der Reihe einen endlichen Werth, also convergirt die Reihe

$$\sum a_{\lambda\mu\nu}\, x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} \ldots$$

für alle Werthsysteme von $x, y, z \ldots$ deren absoluten Beträge kleiner sind als resp. $\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0 \ldots$

Wenn nun dies der Fall ist für

$x_0\; y_0\; z_0 \dots$ so findet dies um so mehr für

alle Werthsysteme von $x\; y\; z$ für welche

$$|x| < |x_0|,\; |y| < |y_0|,\; |z| < |z_0| \dots$$

Die Größen $x_0\; y_0\; z_0 \dots$ haben obere Grenzen, die wir mit $r_x,\; r_y,\; r_z \dots$ bezeichnen wollen. Beschreiben wir nun in verschiedenen Ebenen, die die Werthe von $x\; y\; z \dots$ enthalten sollen, um die Nullpunkte Kreise mit den Radien $r_x,\; r_y \dots$, so ist die Reihe

$\sum_{\lambda,\mu,\nu..} a_{\lambda\mu\nu..}\, x^\lambda y^\mu z^\nu \dots$ convergent für alle Wertsysteme von $x\; y\; z \dots$, welche innerhalb der entsprechenden Convergenzkreise liegen. Bei den Potenzreihen von mehreren Veränderlichen kann aber wohl der Fall eintreten, daß man den Radius des Convergenzkreises der einen Variablen vergrößert, indem man gleichzeitig den der andern verkleinert. Wir müssen also hier eine andere Definition der Grenze des Convergenzbereiches (des Kreises) geben. Dazu gelangen wir durch folgende Betrachtungen.

Wenn ich eine Variable definire, so gibt es Stellen für welche sie definirt ist, Stellen für welche sie nicht definirt ist und Stellen die an der Grenze liegen. Bei einer Variablen sagen wir, sie liegt im Convergenzkreise, wenn es möglich ist, um den entsprechenden Punkt, wenn auch noch so kleinen Kreis zu beschreiben, so dass innerhalb dieses Kreises alle Punkte noch dem Convergenzbereiche angehören; + An der Grenze liegt sie dann, wenn innerhalb des kleinen Kreises es Punkte gibt, die dem Convergenzbereiche angehören und auch solche die ausserhalb des Convergenzbereiches liegen. Um das Analoge für mehrere Variablen zu entwickeln, bezeichnen wir die Variablen mit $x_1, x_2 \dots x_n$, so dass hierdurch die Reihenfolge mit bestimmt ist. Wenn man nun sagt $a_1, a_2 \dots$ ist ein Werthsystem von $x_1, x_2 \dots$, so soll das heissen, $x_1 = a_1, x_2 = a_2 \dots$

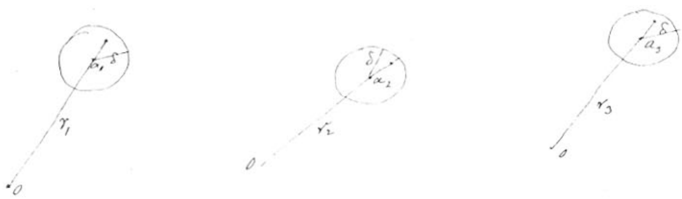
Betrachten wir nun alle Werthsysteme für welche

$$|x_1 - a_1| < \delta, \; |x_2 - a_2| < \delta, \; |x_3 - a_3| < \delta \dots$$

so sagen wir die Werthsysteme von $x_1, x_2 \dots$ liegen in der Umgebung von $a_1, a_2 \dots$ Die Gesammtheit der Stellen $x_1, x_2 \dots$ welche obiger Bedingung genügen, ist also die Umgebung von $a_1, a_2 \dots$ Geometrisch stellt nun ein Kreis um den Punkt a_1 mit dem Radius δ die Umgebung von a_1 u.s.w. Dieses vorausgesetzt können wir nun sagen, das Werthsystem $x_1, x_2 \dots$ liege innerhalb des Convergenzkreises, wenn nicht nur das Werthsystem innerhalb des C. Kreises liegt, sondern auch, wenn es sich

+ liegt ausserhalb, wenn in einem hinreichend (?) kleinen um den entspreche[...] Punkt beschriebenen Kreise es keine Werthe gibt, die dem Convergenzbere[...] [g]ehören.

Umgebungen der Stelle $a_1\, a_2 \ldots$ angeben lassen, für welche die Convergenz besteht. Das muss natürlich für jedes $a_1\, a_2 \ldots$ gelten.
: Die Stelle $a_1\, a_2 \ldots$ liegt ~~innerhalb~~ ausserhalb des Convergenzbereiches, wenn nicht nur $a_1\, a_2$ ausserhalb des C. bereiches liegt, sondern es sich auch eine Umgebung der Stellen $a_1 \ldots$ angeben lässt, für welche die Reihe nicht mehr convergirt. Die Stelle liegt an der Grenze, wenn es sich eine Umgebung derselben angeben lässt, für welche die Reihe theils divergent, theils convergent ist.
Daraus geht ohne Weiteres folgendes hervor: Es möge $a_1, a_2 \ldots$ eine Stelle sein innerhalb des C. bereiches.

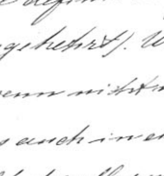


und bezeichnen $r_1, r_2 \ldots$ die absoluten Beträge von $a_1, a_2 \ldots$ alsdann kann ich die $r_1, r_2 \ldots$ noch vergrössern, und für die vergrösserten Werthe, wird die Reihe convergiren. Wenn ich also das allgemeine Glied einer Potenzreihe betrachte $a_{\lambda\mu\nu}\; x_1^{\lambda} x_2^{\mu} x_3^{\nu} \ldots$ und wenn

$|a_{\lambda\mu\nu\ldots}|\; r_1^{\lambda} r_2^{\mu} r_3^{\nu} \ldots$ endlich bleibt für jedes $\lambda, \mu, \nu, \ldots$

so kann ich die r's noch vergrössern und die Convergenz muss bestehen. Wenn demnach $a_1\, a_2 \ldots$ innerhalb des

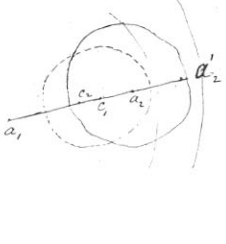
Convergenzkreises liegen soll, so setze ich für $a_{\lambda\mu\nu}\cdots$ $x_1, x_2 \ldots$ die absoluten Beträge; alsdann muss nicht nur jedes Glied $A_{\lambda\mu\nu}\, r_1^{\lambda} r_2^{\mu} \ldots$ endlich bleiben, sondern es muss auch dann noch der Fall sein, wenn ich sämtliche r's vergrössere. Wenn dagegen $a_1, a_2 \ldots$ an der Grenze liegt, so kann man nicht alle r's vergrößern. Möglicherweise wird aber die Convergenz noch dann aufrecht erhalten, wenn man einige r's vergrößert, andere aber verkleinert. Angenommen es sei x so definirt, dass wenn a ein bestimmter Werth von x ist, auch alle Werthe in einer gewissen Umgebung von a zu den Werthen von x gehört; dann nennen wir die Umgebung ein Continuum. Es seien x aller Werthe der x Ebene, x' seien die definirten Größen, die zu denen von x gehören (nicht umgekehrt). Wir sagen dann a gehöre zu dem Gebiete x', wenn nicht nur a ein Werth von x' ist, sondern es auch in einer gewissen Umgebung Werthe von x gibt, die alle zu denen von x' gehören. Wenn ich bei einer Veränderlichen irgend eine Stelle a_1 habe, in dem Gebiete von x', so kann ich um a_1 eine Umgebung definiren, die so beschaffen ist, dass jeder Werth davon, zu den Werthen von x' gehört. Dann nehme ich innerhalb dieser Umgebung einen Punkt a_2 willkürlich an, dann gibt es eine Umgebung um a_2.



Innerhalb dieser Umgebung wähle ich a_3 u.s.w. Von allen Punkten $a_1\, a_2\, a_3$, zu denen ich auf diese Weise gelangen kann, sagen wir, dass ~~wir~~ sie mit a_1 continuirlich zusammenhängen. Wenn wir von jedem Werthe von x' zu jedem andern auf diese Weise gelangen koennen, so sagen wir das Bereich der Werthe x' bildet ein Continuum. Wenn der Uebergang von jedem Punkte x' zu jedem andern auf obige continuirliche Weise nicht möglich ist, so erhalten wir 2, 3, ... Continua, z. B. 2 getrennt liegende Kreise u. s. w.

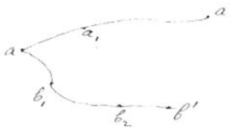
Satz. Wenn a continuirlich zusammenhängt mit a' u. dann auch mit b', so haengt auch a' continuirlich mit b' zusammen.

Um dies nachzuweisen, müssen wir zeigen, dass wenn man von a nach a_2 continuirlich gelangen kann, dass man dann auch durch Vermittelung anderer Punkte von a_2 nach a gelangen kann. Es seien die beiden Punkte a_1 u. a_2; dann hat a_2 eine gewisse Umgebung. Wenn ich c_1 innerhalb dieser Umgebung wähle, so dass $\overline{c_1 a_2} < \overline{a_2 a_2'}$, dann kann ich um c_1 einen Kreis beschreiben, so dass a_2 in der Umgebung von c_1 liegt. Es liegt also c_1 in der Umgebung von a_2 und umgekehrt. Nun kann



ist kann ich c_2 wählen, so dass c_2 in der Umgebung von c_1 und umgekehrt liegt. u. s. w. Wenn man von a_1 nach a_2 gelangen kann, so kann man auch umgekehrt von a_2 nach a_1 gelangen, mittelst der eingeschalteten Puncte $c_1\, c_2 \dots$

Wenn man nun von a nach a' gelangen kann, und auch von a nach b', so kann man umgekehrt von a' nach a und dann von a nach b' gelangen, also kann man von a' nach b' gelangen.

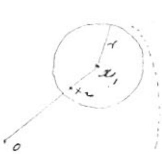


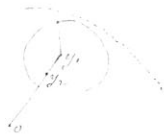
Wir sagen dann allgemein $a_1\, b_1$; gehören demselben Continuum an, wenn man sich von a nach b eine Linie denken kann, deren alle Punkte im Bereiche der Veränderlichen liegen. In diesem Sinne sieht man, dass alle Werthe von x, für welche $|x-a| < \delta$ ein Continuum bilden.

Diese Betrachtungen lassen sich auf mehrere Veränderlichen sofort übertragen. Es sei z. B. bei 2 Veränderlichen $a\, b$ eine Stelle von $x'\, y'$, wobei $x'\, y'$ auf irgend eine Weise im Gebiete der $x\, y$ Grössen definirt ist; dann kann ich in der Umgebung von $a\, b$ immer Werthe finden, die zu den Werthen von $x'\, y'$ gehören. Nun nehme ich in der Umgebung eine Stelle $a_1\, b_1$ u. s. w. Auf diese Weise kann ich continuirlich von $a\, b$ nach $a'\, b'$

gelangen und umgekehrt, da ich ja von a nach a', von b nach b' und umgekehrt gelangen kann. Die Gesammtheit der Werthe $x'y'$, auf welche ich auf diese Weise gelangen kann, nenne ich ein Continuum. Nun folgt unmittelbar, dass wenn ich von ab einerseits nach a'b', andrerseits nach a''b'' gelangen kann, dass ich auch von a'b' nach a''b'' durch Vermittelung von anderen Punkten c, d, .. gelangen kann.

Nun koennen wir nachweisen, dass das Gebiet der Variablen einer Potenzreihe, d. h. der Convergenzbereich derselben <u>ein</u> Continuum bildet.





Die Stelle 0,0 gehört zum Convergenzbereiche. Nehmen wir nun $x_1 y_1$ innerhalb des Convergenzbereiches und bestimmen die Umgebung von $x_1 y_1$. Nun nehme ich innerhalb derselben eine Stelle $x_2 y_2$, so kann ich $x_2 y_2$ so nahe an $x_1 y_1$ wählen, dass auch $x_1 y_1$ in der Umgebung von $x_2 y_2$ liegt. Da nun der Kreis um $x_1 y_1$ innerhalb des Convergenzbereiches liegt, so liegt auch $x_2 y_2$ innerhalb desselben. Man kann auf diese Weise zwischen $x_1 y_1$ u $0\,0$ eine Reihe von ~~Potenzen einhalten~~ Punkten einschalten.

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & y_n \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

so daß jede folgende Stelle in der Umgebung der vorangehenden liegt und umgekehrt und daß alle innerhalb des Convergenzbereiches der Potenzreihe liegen. Es ist also von einer Stelle $x_1 y_1$ nach $0\ 0$ der continuirliche Uebergang möglich und umgekehrt, und wenn man den vorigen Satz anwendet, bekommen wir das Resultat, daß man von jeder Stelle $x\ y$ des Convergenzbereiches einer Potenzreihe einen continuirlichen Uebergang machen kann zu jeder andern Stelle $x' y'$ des C. bereiches. Also bildet das Convergenzbereich einer Potenzreihe ein Continuum.

Transformation der Potenzreihen.

Betrachten wir eine Potenzreihe $\sum_0^\infty a_\mu x^\mu$ und setzen für x eine Potenzreihe von der Veränderlichen u

1 $$x = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \ldots$$

von der wir voraussetzen, daß sie innerhalb eines bestimmten Convergenzbereiches convergent liegen ist, und ferner daß b_0 noch innerhalb des Convergenzbereiches der Reihe $\sum_{0\mu}^\infty a_\mu x^\mu$ liegt. Denken wir uns alsdann die Glieder zusammengezogen, die dasselbe u enthallen, so bekommen wir eine Potenzreihe von u, $\sum_0^\infty c_\mu u^\mu$ und nun wollen wir zeigen, dass unter den obigen Voraussetzungen solche Anordnung der Glieder möglich ist, dass die erhaltene Potenzreihe von u convergent ist, und innerhalb eines bestimmten Convergenzbereiches die Gleichung besteht

$$\sum_{0\mu}^{\infty} a_\mu x^\mu = \sum_{0\mu}^{\infty} c_\mu u^\mu \qquad 2$$

Dieser Satz lässt sich für mehrere Variablen aussprechen. Es sei

$G(x_1, x_2 \dots x_n)$ eine

Potenzreihe von n Veränderlichen u. setzen wir für $x_1, x_2 \dots x_n$ Potenzreihen von $u_1, u_2 \dots u_r$ von denen wir voraussetzen, dass sie convergent sind, und dass ihre Werthe für $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots u_r = 0$ noch dem Convergenzbereiche der ursprünglichen Reihe angehören.

$$x_1 = g_1(u_1 u_2 \dots u_r)$$

$$\dots\dots\dots \qquad 3$$

$$x_n = g_n(u_1 u_2 \dots u_r)$$

Alsdann lässt sich zeigen, dass, wenn man das so erhaltene Resultat nach den Potenzen von $u_1 u_2$ ordnet, d.h. alle Glieder mit denselben $u_1 u_2 \dots$ zusammenfasst, die so erhaltene Potenzreihe von $u_1, u_2 \dots$ convergent ist, und dass für bestimmte Werthe von $u_1 u_2 \dots$ die Gleichung besteht

$$G(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) = G_1(u_1 u_2 \dots u_r) \qquad 4$$

Ehe wir zu dem Beweise des allgemeinen Satzes übergehen, wollen wir ihn im speciellen Falle

5 $$G(x) = \sum_{0\,\mu}^{\infty} a_\mu x^\mu$$

nachweisen. Wir setzen

6 $$x = g(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3 + \dots$$

und setzen voraus, daß diese letztere Reihe convergent und daß $g(0) = b_0$ noch innerhalb des Convergenzbereiches von $G(x)$ liegt. Wir bezeichnen nun die absoluten Beträge von $a_0\ a_1 \dots,\ b_0\ b_1 \dots$ resp. mit $A_0\ A_1 \dots,\ B_0\ B_1 \dots$ an die Stelle der Function $G(x)$ betrachten wir die folgende

7 $$\bar{G}(x) = \sum_{0\,\mu}^{\infty} A_\mu x^\mu$$ welche entsteht aus der Reihe 5, wenn man dort die Coefficienten auf ihre absoluten Beträge reducirt. Ebenso bilden wir

8 $$\bar{g}(u) = B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + \dots$$

Nun denken wir uns in 5 statt x den Werth $g(u)$ eingesetzt so verwandelt sich die Reihe $G(x)$ in folgende

9 $$G(x) = \sum_\mu P_\mu(u).$$

Jedes $P_\mu(u)$ ist eine Potenzreihe von u in welcher jeder Coefficient zusammengesetzt ist aus endlicher Anzahl der Coefficienten $b_0\ b_1\ b_2 \dots$. Dies geht nämlich unmittelbar aus der einfachen Multiplication convergenter Reihen. Wenn ich 2 convergente Potenzreihen zu multipliciren habe, so multiplicire ich jedes Glied der einen Reihe mit jedem Gliede der andern Reihe, das Product ist convergent in dem gemeinschaftlichen Convergenzbereiche beider Reihen. Das gilt auch für 3, 4, .. Reihen. In unserm Falle ist x eine convergente Reihe, folglich wird auch

$$x^2 = x\cdot x = b_0^2 + b_0 b_1 u + b_0 b_2 u^2 + b_0 b_3 u^3 + \dots$$
$$+ b_1 b_0 u + b_1^2 u^2 + b_1 b_2 u^3 + \dots$$
$$+ b_2 b_0 u^2 + b_2 b_1 u^3 + \dots$$

convergent sein. Nun kann man convergente Reihen in Gruppen theilen. Fassen wir immer diejenigen Glieder in eine Gruppe, in denen u denselben ~~Coefficienten~~ Exponenten hat, so bekommen wir ebenfalls convergente Potenzreihe von u, die der ursprünglichen gleich ist, also haben wir

$$x^2 = b_0^2 + 2 b_0 b_1 u + (b_1^2 + 2 b_0 b_2) u^2 + \dots \qquad 10$$

Dasselbe gilt für $x^3, \dots x^\lambda \dots$

Also können wir in 9 jedes $\varphi_\lambda(u)$ auf die Form einer Potenzreihe bringen, in welcher jeder Coefficient aus endlicher Anzahl von Gliedern besteht.

Es handelt sich nun darum, ob man die Glieder in

$\Sigma\, \varphi_\lambda(u)$ nach Potenzen von u in Gruppen setzen kann. Um dies zu untersuchen betrachten wir allgemein $\Sigma\, \varphi(u)$, wo $\varphi(u)$ eine beliebige Potenzreihe von u bedeuten möge, und bilden die Reihe $\Sigma\, \psi(u)$, wo jedes ψ aus dem entsprechenden φ enstanden ist, indem man in φ jeden Coefficient auf den absoluten Betrag reducirt. Wenn es sich nur ein positiver Werth u_1 finden läßt für welchen $\Sigma\, \psi(u_1)$ endlich ist, so ist auch $\Sigma\, \psi(u)$

endlich für jedes u, dessen absoluter Betrag kleiner ist als u_1.
Um das letztere nachzuweisen, sei

11 $$\varphi_\nu(u) = a_{\nu,0} + a_{\nu,1} u + a_{\nu,2} u^2 + \dots$$

Und demnach $\varphi_1(u) = A_{1,0} + A_{1,1} u + A_{1,2} u^2 + \dots$

12 $$\varphi_2(u) = A_{2,0} + A_{2,2} u + A_{2,2} u^2 + \dots$$

Jetzt betrachte ich irgend ein Glied der Reihe $\Sigma \varphi(u)$; dieses sei $A_{\alpha\beta} u^\beta$; wenn ich nun in $\Sigma \varphi(u)$ $u = u_1$ setze, so bekomme ich

$\Sigma \varphi(u_1)$ hat der Voraussetzung nach einen endlichen Werth. Es wird somit auch jedes Glied der Reihe $\Sigma \varphi(u_1)$ einen endlichen Werth haben müssen. d. h.

$A_{\alpha\beta} u^\beta$ ist sicher endlich für jedes u dessen absoluter Betrag kleiner ist als u_1. Hebe ich nun aus der Reihe $\Sigma \varphi(u_1)$ beliebig viele Glieder $A_{\alpha\beta} u_1^\beta$, so wird ihre Summe sicher einen endlichen Werth haben, denn diese Glieder stammen aus einigen $\varphi(u)$, die wir mit $\varphi'(u_1), \varphi''(u_1), \dots \varphi^{(n)}(u_1)$ bezeichnen. Nun ist wegen der Endlichkeit der Summe $\Sigma \varphi(u_1)$

13 $$\varphi'(u_1) + \varphi''(u_1) + \dots + \varphi^{(n)}(u_1) < h,$$

wo h eine endliche Größe ist. Ich kann somit aus der Reihe $\Sigma \varphi(u_1)$ beliebig viele Glieder $A_{\alpha\beta} u_1^\beta$ herausheben, und ihre Summe liegt stets unterhalb einer unveränderlichen endlichen Grenze h. Nach den früheren Sätzen ist die unendliche Reihe der Glieder $A_{\alpha\beta} u_1^\beta$ convergent und ich kann sie beliebig in Gruppen theilen; jede Gruppe wird endlich sein, u. die Summe der Gruppen wird einen endlichen Werth haben. Theile ich sie zunächst in Gruppen, so daß alle Glieder, welche dasselbe α haben, in eine Gruppe fallen, so bekomme ich die Ψ, theile ich sie, sodaß alle Glieder, welche dasselbe u_1^β haben in eine Gruppe gehören, so bekomme ich eine Potenzreihe von u_1, und es ist

$$\sum \Psi(u_1) = \sum_\lambda c_\lambda u_1^\lambda. \qquad 14$$

Dieses gilt offenbar um so mehr für jedes positive u_1 für welches $u < u_1$ ist. Nun kann ich dasselbe von der Reihe $\sum \varphi(u)$ nachweisen. Zunächst ist klar, daß wenn ich beliebig viele von den Gliedern

$a_{\alpha\beta} u^\beta$ nehme, so wird ihre Summe für u, dessen absoluter Betrag kleiner ist als u_1, ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen endlichen Grenze liegen. Denn bezeichnen wir die Summe der herausgehobenen Glieder mit $\sum' a_{\alpha\beta} u^\beta$, so ist doch

$$|\sum' a_{\alpha\beta} u^\beta| < \sum' |a_{\alpha\beta} u^\beta| \text{ nun ist aber für } |u| < u_1$$
$$\sum' |a_{\alpha\beta} u^\beta| = \sum' A_{\alpha\beta} |u|^\beta < \sum' A_{\alpha\beta} u_1^\beta < h.$$

Hieraus folgt, daß man die Glieder der Doppelreihe $\sum \varphi_\alpha(u) = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} u^\beta$ beliebig in Gruppen theilen kann und die Summe der Gruppen bleibt immer dieselbe. Theilen wir $\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} u^\beta$ in Gruppen nach dem α, so bekommen wir $\sum \varphi_\alpha(u)$, wenn wir sie nach dem β theilen so bekommen wir $\sum c_\lambda u^\lambda$, also ist

15 $$\sum \varphi_\lambda(u) = \sum c_\lambda u^\lambda$$ innerhalb des Convergenzbereiches von $\varphi_\lambda(u)$ und $\sum c_\lambda u^\lambda$. Kehren wir zu der Gleichung 9 zurück, so sehen wir, daß innerhalb eines bestimmten Bereiches

$$G(x) = \sum \varphi_\lambda(u) = \sum c_\lambda u^\lambda$$ ist, oder

16 $$G(x) = \sum c_\lambda u^\lambda.$$ ~~w.z.b.w.~~ w. z. b. w.

Wie wir aus dem ganzen Beweise ersehen können, war es eine nothwendige Folge, daß

$g(0) = b$ noch innerhalb des Convergenzbereiches liegt von $G(x)$, da der ganze Beweis sich darauf stützte ein $u_1 > 0$ so wählen zu können, daß $\sum \psi(u_1)$ convergent ist.

Nun ~~untersuchen~~ entwickeln wir einen Satz, auf den wir uns bei dem Beweise des allgemeinen Satzes stützen werden.

Satz. Wenn ~~sich~~ eine unendliche Reihe von Functionen, $\varphi(xyz\ldots)$ habe, $\sum \varphi_\lambda(xyz\ldots)$, zu jeder Function eine Function $\psi_\lambda(xyz\ldots)$ so bilde, daß jeder Coefficient in ψ_λ gleich oder größer ist als der absolute Betrag von dem entsprechenden Gliede in $\varphi_\lambda(xyz\ldots)$, und wenn es sich nachweisen läßt, daß für ein positives Werthsystem $x_0\, y_0\, z_0 \ldots$, die Summe von beliebig vielen Gliedern der Reihe $\sum \psi_\lambda$, $\psi_1(x_0 y_0 \ldots) + \psi_2(x_0 y_0 z_0) + \ldots \psi_n(x_0 y_0 \ldots)$

stets unterhalb einer festen Grenze liegt, die endlich ist, wie man auch die φ's heraushebt, so wird die Summe $\Sigma\,\varphi(xyz\ldots)$ ~~(xyz)~~ endlich sein für jedes Werthsystem $x\,y\,z\ldots$, wofür $|x| \leqq x_0$, $|y| \leqq y_0$, $|z| \leqq z_0 \ldots$ und dann kann man $\Sigma\,\varphi(xyz\ldots)$ ~~(xyz)~~ so in Gruppen theilen, daß man alle Glieder in welchen die Dimensionen von $x\,y\,z$ dieselbe ist, in eine Gruppe aufnimmt, und es ist dann

$$\Sigma\,\varphi(xyz\ldots) = \sum_{\lambda\mu\nu\ldots} c_{\lambda\mu\nu\ldots}\, x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu}\ldots$$

für jedes $|x| < x_0$ $|y| < y_0 \ldots$

Der Beweis ist analog dem vorigen. Wir denken uns jedes φ aufgelöst in seine einzelnen Glieder, so daß jedes Glied gleich ist einem Producte von $x\,y\,z\ldots$ multiplicirt mit einer Constante. Nun hebe ich beliebig viele aus der auf diese Weise entstandenen, mehrfachen Reihe beliebig viele Glieder heraus. ~~genommen~~ Der absolute Betrag der Summe dieser herausgehobenen Glieder wird stets unterhalb einer festen endlichen Grenze liegen. Denn möge das Glied, welches aus φ_k stammt bezeichnet werden mit

$$a^{k}_{\lambda,\mu,\nu\ldots}\, x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu\ldots}\ldots$$

dann stammen die herausgehobenen Glieder aus einigen der φ's z. B. aus

φ_ξ, φ_σ, φ_τ, $\varphi_\omega \ldots$ wenn ich nun das $x\,y\,z$ so annehme daß

17 $$|\alpha^k_{\lambda,\mu,\nu\ldots} x^\lambda y^\mu z^\nu| \leqq |\alpha^k_{\lambda,\mu,\nu\ldots}| x_0^\lambda y_0^\mu z_0^\nu \ldots$$
und mit Σ' die Summe der herausgehobenen Glieder bezeichne, so habe ich

18 $$|\Sigma' \alpha^k_{\lambda\mu\nu\ldots} x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots| \leqq \Sigma |\alpha^k_{\lambda\mu\nu\ldots}| x_0^\lambda y_0^\mu z_0^\nu \ldots$$
Nun stammen die Glieder

$|\alpha^k_{\lambda\mu\nu\ldots}| x_0^\lambda y_0^\mu \ldots$ aus einigen der ψ_k, z. B. aus $\psi_\sigma \cdot \psi_\tau\ \psi_k\ \psi_\omega \ldots$ Wir haben aber nach der Voraussetzung

$\Sigma' \psi(x_0\ y_0\ z_0 \ldots) < h$, also ist

$|\Sigma' \alpha^k_{\lambda,\mu,\nu}\, x^\lambda y^\mu z^\nu| \leqq \Sigma' \psi(x_0 \cdot y_0\ z_0 \ldots) < h$

Also für alle Werthsysteme von $x\ y\ z$ wofür

$|x| \leqq x_0, |y| \leqq y_0 \ldots$

ist der absolute Betrag der Summe von beliebig vielen aus der Reihe deren allgemeines Glied

$\alpha^k_{\lambda\mu\nu\ldots}\, x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots$ ist, herausgehobene Glieder stets unterhalb einer festen endlichen Grenze h, d. h. die Summe der unendlich vielen Glieder ist endlich und man kann sie beliebig in Gruppen theilen. Theilen wir diese Glieder zunächst so, daß die mit gleichem k zusammengefaßt werden, so bekomme ich

$\Sigma\, \varphi_k(x\,y\,z \ldots)$, und wenn ich nach den Dimensionen theile, so bekomme ich $\Sigma\, c_{\lambda\mu\nu}\, x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots$ und nach dem allgemeinen Satz über die Gruppentheilung, ist unter der Voraussetzung über $x\,y\,z \ldots$

19 $$\Sigma_\lambda\, \varphi_\lambda(x\,y\,z \ldots) = \Sigma\, c_{\lambda\mu,\nu\ldots}\, x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots$$

Nun gehen wir zu dem Beweise des allgemeinen Satzes über.

<u>Satz</u> Wenn wir eine convergente Potenzreihe $G(x\,y\,z..)$ haben, und für $x\,y\,z\ldots$ Potenzreihen von beliebig vielen Veraenderlichen $u, v, w\ldots$ setzen

$$\begin{aligned} x &= g_1(u, v, w..) \\ y &= g_2(u, v, w..) \\ z &= g_3(u, v, w..) \\ &\;\vdots \end{aligned} \qquad 1$$

welche zunächst convergent sein sollen und dann der Bedingung genügen, dass ihre Werthe für

$u=0,\ v=0,\ w=0, \ldots\ g_1(0\,0\ldots),\ g_2(0,0)\ldots$ innerhalb des Convergenzbereiches der Reihe $G(x\,y\,z\ldots)$ liegen, alsdann ist die Potenzreihe $G_1(u, v, w..)$ die man erhält, wenn man das Resultat der Substitution nach den Variablen $u, v, w..$ ordnet, convergent und innerhalb eines bestimmten Bereiches findet die Gleichung statt

$$G(x\,y\,z\ldots) = G_1(u, v, w..) \qquad 2$$

Wenn wir irgend ein Glied der Reihe $G(x\,y\,z..)$ betrachten $\alpha_{\lambda\mu\nu}\, x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots$ und hierin für $x\,y\,z\ldots$ die Werthe aus 1 setzt, so erhalten wir nach den Regeln der Multiplication unendlicher Reihen für jedes Glied eine Potenzreihe von $u, v, w\ldots$ welche convergent ist innerhalb des allen Reihen $g_1\, g_2\ldots$ gemeinschaftlichen Convergenzbereiches, also ist

$$\alpha_{\lambda\mu\nu}\, x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots = P_{\lambda\mu\nu}(u, v, w..) \qquad 3$$