

III. *Traëtatus de Curvarum Constructione & Mensura; ubi plurimæ series Curvarum Infinitæ vel rectis mensurantur vel ad simpliciores Curvas reducuntur. Autore Colin Maclaurin, in Collegio novo Abredonensi Matheseos Professore.*

EXimia Matheseos Theoriæ, ob infinitam Propositionum Universalitatem, æternam ac necessariam Veritatem, Evidentiam omni dubitatione majorem, Idearum claritatem luculentissimam, Demonstrationum elegantiam, Theorematum nexus & mutuas dependentias, pulcherrimis certè ac summis humani intellectus repertis sunt annumerandæ; inter eas vero eminent summorum hujus sæculi Philosophorum de Curvarum Longitudinibus & arcibus mensurandis ardua Theoremata. Ad hos diffusos cognitionis campos diu altè latentes tandem eruendos infinitæ scientiæ portiunculam mutuari, vix sibi temperare posset quin pronuntiaret, qui Arithmeticiæ Infinitorum vires in immenso elegantissimarum Veritatum abyssu eruendo, & humani intellectus Horizontem infinite ferè extendendo, paucis præteritis annorum decadibus, amplè satis comprobatis, animo perpenderit; Hujus vero methodi (sicut nunc aucta & exulta est) ope, incidi in rationem mensurandi infinitas Curvarum series, quam paucissimis explicabo.

Cum in omni linea curva sit aliqua curvaturæ regularitas licet fortè implicata, secundum quam figura determinatur; ideo Geometriæ varias Curvarum caractères ex Equatione Ordinararum relationem ad abscissas axis alicujus exprimente definirunt. Cum verò idem fieri possit ex consideratione Curvarum respectu unius dati centri.

imo

imo simplicissima Naturæ uniformitas in ejus indagine id fieri sæpe postulet, ideo hanc Curvas considerandi Methodum impræsentiarum usurpabimus, & imprimis ostendemus qua facillima ratione (secundum hanc Methodum Curvas determinandi) ex simplicibus complexiores construi possint.

§ I. Sint L & l puncta quamproxima in Curva BLL ; fit lo arcus centro S descriptus perpendicularis in SL ; & erit Ll ut momentum Curvæ & Lo momentum Radii SL : Ac si detur ratio Ll ad Lo , vel ad lo in distantia SL , dabitur æquatio Curvæ ad centrum S . Sint LP , lp Tangentes Curvæ in punctis L & l , in quas ex S demittantur normales SP , Sp iis occurrentes in punctis P & p ; similiter in omnes Curvæ Tangentes demittantur perpendiculares ex dato puncto S & constructur Curva transiens per omnes Tangentium & perpendicularorum intersectiones. Hujus triangulum elementare Pnp simile erit triangulo Lol , quæ proinde dabitur ex data Curva BLL . Quippe ob æquales SnP , PnL , & rectos Spn , SPL æquiangula erunt triangula Spn , PnL , &

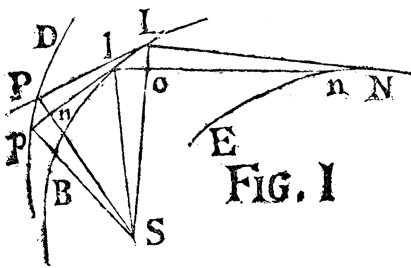


FIG. I

proinde $Pn : pn :: Ln : Sn :: Lo : lo$, adeoq; ob angulos Pnp , SnL , Lol æquales, erunt triangula Pnp , SnL , Lol similia. Cum igitur eadem sit ratio Ll ad lo quæ Pp ad pn . & SL ad SP , manifestum est. da-

râ ratione Ll ad lo , & rectâ SL , dari rationem Pp ad pn & rectam SP , adeoque Curvam Dp . Eadem ratione ex DP construi potest Tertia, & ex ea dein Quarta, & progrediendo prodibit series Curvarum infinita, quæ omnes ex uno dato innotescunt. Quod si erigantur LN

&

& ln perpendiculares in radios SL , Sl , sibi mutuo occurrentes in n ; & per omnia similiter definita perpendicularium concursuum puncta describatur Curva EN : ea ipsa erit Curva ex qua deduci potest BL , eadem ratione qua construximus DP ex BL . Ex EN similiter construi potest alia Curva, atque ex hac quoque parte Series infinita Curvarum construi poterit.

§ II. Curvarum verò hac ratione consideratarum simplicissimæ sunt quarum Ll est ad Lo in ratione potestatis alicujus Radii, ita ut, si a sit data quantitas, r denotet Radium Curvæ, n numerum quemcunque, sit Ll ad Lo ut a^n ad r^n æquatio earum generalis. Omnes verò hæc Apfidem habent cum $r=a$, quoniam in eo casu $Ll=Lo$. Ut investigem æquationem Curvæ DP , cum in BL est ut Ll ad Lo ita a^n ad r^n , ita r ad $SP=\frac{r^{n+1}}{a^n}$, ita $\frac{r^n}{a^{n+1}} \times SP^{\frac{1}{n+1}}$ ad SP , ita $\frac{r^n}{a^{n+1}}$ ad SP^{n+1} , ita Pp ad p^n . Proinde si s representet momentum Curvæ, y arcum circulearem radio descriptum à centro S , & r radium correspondentem, quæcunque sit Curva cujus Æquatio investigatur, erit Æquatio Curvæ BL , $s : y :: a^n : r^n$; Æquatio verò Curvæ DP , $s : y :: \frac{r^n}{a^{n+1}} : \frac{r^n}{r^{n+1}}$. Angulus autem PSp erit ad Angulum LSl ut $\frac{pn}{SP}$ ad $\frac{lo}{SL}$, sive ut $\frac{Pn}{SP}$ ad $\frac{Lo}{SL}$, vel (si SP dicatur x & SL , r) ut $\frac{x}{x}$ ad $\frac{r}{r}$, hoc est, (ob $x=\frac{r^{n+1}}{a^n}$) ut $\frac{n+1}{r} r$ ad $\frac{r}{r}$, sive ut $n+1$ ad 1 . Hinc (vid. Fig. II.) BSP est ad BSL ut $n+1$ ad 1 ; unde facilius absque Tangentium ope duci potest Curva BP . Si sumatur angulus BSP ad BSL in ratione $n+1$ ad 1 , & in SP demittatur perpendicularis ex L , erit occurus perpendiculi cum SP , in Curva BP prius Tangentium ope descripta.

§ III. Olen-

mason de M. Roberval, quamque *M. De la Hire* considerat ut *Conchoidem* Basis Circularis, in Actis Academiæ Parisiensis Anni 1708. Perpendiculares omnes LN, *lⁿ* concurrunt in puncto B, adeoque $BN = \infty$: unde $BP = \frac{BN + NL}{1 - m} = 2BL$: Hinc Curva tota BPS = 2BS, ac lon-

ginitudo *Epicycloidis* semper dupla est chordæ arcus in circulo correspondentis. 2^{do}. Ex *Epicycloide* describatur Curva BΠS, eadem ratione qua *Epicycloidem* ex Circulo descripsimus: In hoc casu $n = \frac{1}{2}$, & $m = \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}$

$= \frac{1}{3}$, ac proinde æquatio Curvæ BΠS erit $i : j :: a^{\frac{1}{3}} : r^{\frac{1}{3}}$.

Longitudo Curvæ erit $\frac{BL + LP}{1 - m} = \frac{2}{3}BL + LP = \frac{2}{3}BL + LG$,

& proinde BΠ est sesquiplus summæ Arcus circularis ejusque Sinus recti. Quod si sumatur CD = BD, & radio SD centro S describatur Circulus occurrens rectæ SP in H, & sit HK perpendicularis in BS; quoniam DH = $\frac{2}{3}BL$, erit BΠ = DH + HK. Hinc arcus BΠ neque sunt rectis neque arcibus circularibus commensurabiles, differentia tamen arcuum BΠ & DH est recta HK. In puncto S evanescit LG, adeoque BΠS = $\frac{2}{3}BLS$,

unde tota Curva est sescupla semicirculi. Nulla vero pars hujus Curvæ assignabilis commensurari potest toti, nec integra Curva in data quavis ratione secabilis est, ita ut portiones rationem assignabilem habeant ad se mutuo aut ad totam. Si hæc curva in data aliqua ratione Geometricè secari posset, constaret Quadratura Circuli, nam si e gr. esset BΠ ad BΠS ut 1 ad m, & BL ad BLS ut 1 ad n, esset BΠ = $\frac{BΠS}{m} = \frac{2BLS}{2m} = \frac{3nBL}{2m} = \frac{2}{3}BL + LG$,

unde esset $BL = \frac{mLG}{n-m}$ & $BLS = \frac{n}{n-m}LG$. 3^{ta} Ex BΠS,

construatur explicata methodo Curva BR, & quoniam $n = \frac{1}{2}$

$n = \frac{1}{2}$ erit $m = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{4}$, atque æquatio Curvæ BR erit

$s : y :: a^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}}$. Hinc longitudo Curvæ fiet $\frac{2}{3} \overline{BL+PI}$, totalis verò Longitudo Curvæ BR $= \frac{8}{3}$ diametri SB. Si harum Curvarum Constructiones continuentur, prodibit hujusmodi series Æquationum quæ facile produciuntur ad libitum.

Æquatio Circuli	1.	$s : y :: a : r$
Epicycloidis	2.	$s : y :: a^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}}$
Secundi	3.	$s : y :: a^{\frac{1}{3}} : r^{\frac{1}{3}}$
Tertii	4.	$s : y :: a^{\frac{1}{4}} : r^{\frac{1}{4}}$
Cujusvis	n.	$s : y :: a^{\frac{1}{n}} : r^{\frac{1}{n}}$, &c.

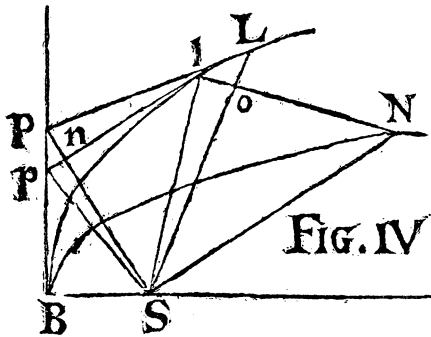
Observare licet in genere, omnes quarum Indicium denominatores sunt Numeri pares, perfectæ rectificationis esse capaces; cumque quævis sit ad penultimam ut 1 ad $1-m$, perpendiculari manifestum erit Curvæ cujusvis longitudinem fore $= \frac{1}{1-m} \times \frac{1-2m}{1-3m} \times \frac{1-4m}{1-5m} \times \frac{1-6m}{1-7m}$, &c. \times SB

continuando seriem donec ad nihilum reducatur Fractio. Quod si Indicis denominator sit Numerus impar, Curvæ erunt perfectæ rectificationis incapaces, & earum arcus quicumque erunt sibi mutuo, ipsis totis, rectis quibusvis & arcibus Circularibus incommensurabiles: exprimi verò possunt omnes arcibus circularibus & rectis: At Curvæ cujusvis totalis Longitudo erit ad Semicirculum ut

$\frac{1}{1-m} \times \frac{1-2m}{1-3m} \times \frac{1-4m}{1-5m}$, &c. ad unitatem. Denique si Areola à Corpore in harum quavis revolvente sumatur constans, hoc est si $r y = 1$, subtensâ anguli contactus, cui semper (ob datum datâ areâ tempus) proportionalis est *Vis Centripeta* tendens ad S, erit reciproce ut potestas distantix cujus Index est $2m+3$; atque hoc est non con-

remnendum harum Curvarum privilegium, quod in iis omnibus Vis centripeta tendens ad S fit ut aliqua reciproca distantiae dignitas, quæ simplicissima est, & utilissima in Naturæ indagine, Virium Centripetarum lex.

§. V. Curvarum quarum $s : y :: a^n : r^n$ proxime consideranda venit (quæ Curva quidem improprie dicitur) ipsa Linea recta, existente S extra rectam. In hac lineâ, ob similia triangula P p n, P B S erit (si $BS = a$ & $SP = r$) $s : y :: r : a$. Ex lineâ rectâ methodo directâ



nihil nisi punctum B construi potest, Methodo vero inversâ, perpendicularium nimirum P L, p l concursu, construi potest Curva, cujus Index (si m sit Index Curvæ B P) æqualis erit $\frac{m}{1-m}$; nam si Index Curvæ B L sit n ,

erit $m = \frac{n}{n+1}$, ac proinde $n = \frac{m}{1-m}$. Unde in hoc casu,

cum $m = -\frac{1}{2}$ erit $n = \frac{-1}{2}$, & æquatio Curvæ B L erit

$s : y :: r^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}$, quæ æquatio est Parabolæ ad Focum. Ex hac construe aliam, constituendo angulum L S N = L S B & erigendo LN normalem in SL occurrentem ipsi S N in N. Quoniam vero $m = -\frac{1}{2}$ erit $n = \frac{-1}{3}$, & æquatio Cur-

væ $s : y :: r^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{3}}$ & $B P = \frac{BN - LN}{1 - m} = \frac{1}{2} BN - LN$, ergo

$B N =$

$BN = 2BP + LN$; proinde hæc Curva est rectificabilis. Si Series continetur, prodibunt ut prius æquationes in hoc ordine.

Æquatio Rectæ	$s : y :: r : a$
Parabolæ	$s : y :: r^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}$
Secundæ	$s : y :: r^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{3}}$
Tertiæ	$s : y :: r^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{4}}$
Cujusvis	$s : y :: r^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{n}}$

In hac Serie primæ sunt Recta & Parabola, unde patet dimidiam hujus similiter ac prioris Seriei esse rectis mensurabilem: alia vero dimidia pars in rectis & arcibus Parabolicis exhiberi potest. In his omnibus Vis centripeta ad S est reciproce ut potestas distantiae cujus Index $3 - 2m$, ac proinde semper inter duplicatam & triplicatam rationem distantiae reciproce.

§ VI. Æquatio-Hyperbolæ æquilateræ ad centrum est $s : y :: r^2 : a^2$, ex qua deducitur methodo directa Series hujusmodi,

$$\begin{array}{l}
 1. \quad s : y :: r^2 : a^2 \\
 2. \quad s : y :: a^2 : r^2 \\
 3. \quad s : y :: a^{\frac{2}{3}} : r^{\frac{2}{3}} \\
 4. \quad s : y :: a^{\frac{2}{5}} : r^{\frac{2}{5}} \\
 5. \quad s : y :: \frac{a^{2n}}{2n-1} : \frac{r^{2n}}{2n-1}
 \end{array}$$

Ex his Curvæ, quarum Indicium denominatores sunt in progressionem $-1, 3, 7, 11, \&c.$ exhiberi possunt in rectis & arcibus Hyperbolicis; reliquæ verò in rectis & arcibus Curvæ cujus æquatio ad axem SB (si x sit abscissa, y verò Ordinata) est $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{a^2 x^2 - a^2 y^2}{x^2 + y^2}$, quæque constituitur (*vid. Fig. III.*) bisecando angulum BSL & sumendo

sumendo SN mediam proportionalem inter SB & SL.

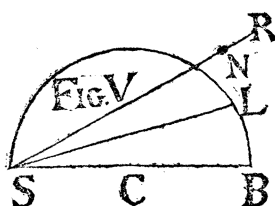
Curvæ quæ ex Hyperbola methodo inversa construi possunt progrediuntur in hac Serie,

$$\begin{aligned} \text{Hyperbolæ 1. } & s : y :: r^2 : a^2 \\ & 2. \quad s : y :: r^3 : a^3 \\ & 3. \quad s : y :: r^{\frac{2}{5}} : a^{\frac{2}{5}}, \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Ubi Curvæ quarum Indicum denominatores sunt in progressionem 1, 5, 9, 13, &c. exprimi possunt in rectis & arcibus Hyperbolicis; reliquæ verò in rectis & arcibus Curvæ modo explicatæ.

Si aliæ Curvæ desiderentur quæ alias exhiberent Series, id facillime fieri potest ope vel Circuli vel Rectæ:

quippe ex earum aliqua omnes, in quibus $s : y :: a^n : r^n$,



construi possunt, sumendo, si ope Circuli Problema fit solvendum, BSR ad BSL ut 1 ad n,

& SN in ipsa SR = $a^{\frac{n-1}{n}} \times SL^{\frac{1}{n}}$;

quippe Curvæ per omnia pun-

cta N ductæ æquatio erit $s : y :: a^n : r^n$. Similiter ope

Rectæ construi possunt quarum æquatio est $s : y :: r^n : a^n$.

Duas exhibuimus Series infinitas Curvarum rectis commensurabilium; aliam arcibus circularibus, aliam Parabolicis, aliam Hyperbolicis una cum rectis mensurabiles demonstravimus: eæ vero ad rectarum mensuram arte sola infinita reduci posse videntur, sicut æquatione sola infinita in rectis exprimentur.

Hæc Cl. Author brevitati studens paucis tradit, illum autem plenius rem pro dignitate ejus illustraturum speramus.