

# Indice

## Voci

<b>Meccanica</b>	<b>1</b>
Cinematica del punto	1
Dinamica del punto	8
Moti relativi	15
Dinamica dei sistemi di punti materiali	16
Gravitazione	20
Dinamica del corpo rigido	22
Rotazione	24
<b>Termodinamica</b>	<b>26</b>
Definizioni della termodinamica	26
Calore	31
Trasformazioni termodinamiche	35
Gas perfetti e reali	38
Primo principio della termodinamica	42
Secondo principio della termodinamica	49
Entropia	55
<b>Elettromagnetismo</b>	<b>58</b>
Carica elettrica	58
Campi elettrici	61
Legge di Gauss	66
Potenziale elettrico	70
Conduttori	77
Dielettrici	85
Elettrodinamica	88
Le leggi di Kirchhoff	96
Campi magnetici	104
Leggi di Laplace	106
Legge di Ampère	117
Magnetismo della materia	121
Induzione e legge di Faraday	125
Correnti alternate	132

Equazioni di Maxwell	142
<b>Onde</b>	<b>149</b>
Proprietà generali delle onde	149
Suono	151
Corda vibrante	154
Onde del mare	155
Linea di trasmissione	156
Onde elettromagnetiche	157
Il vettore di Poynting	160
Campi elettromagnetici nei dielettrici	163
Campi elettromagnetici nei conduttori	166
Spettro delle onde elettromagnetiche	167
<b>Ottica</b>	<b>172</b>
La luce	172
Leggi dell'ottica geometrica	173
Lenti e specchi	175
Strumenti ottici	178
Polarizzazione	182
Ottica ondulatoria	186
<b>Relatività</b>	<b>189</b>
<b>Note</b>	
Fonti e autori delle voci	190
Fonti, licenze e autori delle immagini	191
<b>Licenze della voce</b>	
Licenza	193

---

# Meccanica

---

## Cinematica del punto

---

La meccanica riguarda lo studio del moto dei corpi. All'aumentare del loro numero lo studio diventa molto complicato. Per questa ragione in fisica in genere si studiano prima i sistemi semplici e poi quelli via più complessi. Quindi nel nostro studio considereremo inizialmente il moto di un solo semplice corpo. Il più semplice corpo materiale è in realtà il punto materiale e da tale semplice corpo inizieremo lo studio della meccanica classica. La meccanica classica nasce con le osservazioni sperimentali di Galileo che incomincia a studiare sperimentalmente il moto dei corpi. Nasce così la prima branca della meccanica la cinematica.

La Cinematica è quel ramo della Meccanica Classica che studia il moto dei corpi materiali dal punto di vista puramente geometrico, senza occuparsi di studiare le cause che hanno prodotto quel tipo particolare di moto. Di quest'ultimo aspetto si occupa la Dinamica che, in meccanica classica d'impostazione newtoniana, tratta le forze ed i loro effetti sul moto.

### Tempo

Uno dei punti di partenza della Meccanica Classica è il postulato sull'esistenza del tempo come grandezza continua e uniforme. Queste caratteristiche sono individuabili intuitivamente dal senso comune e possono essere così delineate con una discussione di tipo fenomenologico-metafisico:

1. *Continuità del tempo*: il tempo fluisce in modo continuo e non a scatti (come la lancetta dei secondi ad esempio) ovvero osserviamo la realtà come fluido divenire (Eraclito) e non fotogramma per fotogramma.
2. *Uniformità del tempo*: il tempo fluisce in modo uniforme e sempre nello stesso verso, non si osservano infatti rapporti inversi di causa-effetto o fenomeni come il *deja-vu* cari alla letteratura fantascientifica.

Per riassumere rigorosamente queste caratteristiche i fisici ed i matematici hanno coniato un postulato fondamentale di esistenza del tempo che si può enunciare come segue:

*"Esiste il tempo una variabile continua sempre crescente"*

Ma riprendendo Feynman<sup>[1]</sup>, non ci interessa definirlo ma come misurarlo. Un modo naturale di misurarlo è di utilizzare un fenomeno che si ripete regolarmente che quindi definiamo periodico. Il giorno è stata probabilmente la prima misura periodica usata per caratterizzare il tempo. Esaminando più in dettaglio ci si accorge che il giorno non è una buona unità di misura in quanto la durata cambia nel corso dell'anno ed inoltre è poco adatta a descrivere fenomeni veloci.

L'unità di misura del sistema internazionale è il secondo (indicato con  $s$ ), unità che è in qualche maniera riconducibile ad un fenomeno periodico: il battito del cuore. Gli strumenti che misurano il tempo vengono chiamati orologi e lo sviluppo della precisione nella misura del tempo è stato un fenomeno costante nello sviluppo della società. Attualmente gli strumenti che misurano con assoluta precisione il tempo sono gli orologi atomici, tali strumenti hanno una accuratezza di una parte su  $10^{14}$ : cioè l'errore nella misura del tempo accumulato in un giorno è di appena  $10^{-9}$  s. Il tempo è una delle grandezze fisiche misurabili con maggiore precisione.

---

## Tempi brevi

In maniera artificiale sappiamo produrre segnali che hanno una durata molto breve; attualmente i laser sono gli oggetti artificiali che riescono ad emettere impulsi così brevi come  $1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s}$ . Mentre riusciamo a misurare eventi che hanno una durata temporale molto più breve, vi sono infatti delle particelle instabili che hanno una vita media inferiore a  $10^{-24} \text{ s}$ . La fisica moderna pone un limite inferiore alla descrizione degli intervalli temporali nel tempo di Planck  $10^{-45} \text{ s}$ , per intervalli di tempo inferiore a tale tempo si dubita che il tempo conservi il suo carattere continuo. Ma tale tempo è molto lontano dai limiti sperimentali attuali.

## Tempi lunghi

Il tempo più lungo immaginabile è 13.7 miliardi di anni ( $4 \cdot 10^{17} \text{ s}$ ): l'età dell'Universo. Il nostro sistema solare esiste da appena 4.5 miliardi di anni ( $1.4 \cdot 10^{17} \text{ s}$ ). Il primo uomo è comparso sulla terra un 1 milione di anni fa ( $3 \cdot 10^{13} \text{ s}$ ) e così via fino ad eventi di durata nota.

## Esistenza e caratteristiche dello spazio

Allo stesso modo si individua un ente chiamato spazio che ha le proprietà di continuità (come il tempo) e isotropia.

Per spiegare intuitivamente queste caratteristiche si può immaginare la continuità dello spazio come assenza di zone di inaccessibilità (a meno che non siano già occupate da un corpo). Possiamo spostare con continuità un mobile senza trovare dinanzi ostacoli inspiegabili ed invisibili al suo moto. Ciò risulta possibile solo se lo spazio è dotato di continuità e non ha, per così dire, buchi. Ad esempio la materia di cui è composta un formaggio svizzero non è continua. Non possiamo spostarci in un formaggio svizzero mantenendoci sempre nel formaggio e senza cader in un buco. Se lo spazio reale avesse dei buchi, ovvero mancasse di continuità, potrebbero verificarsi brusche cadute (senza alcuna causa) oppure inspiegabili barriere trasparenti. Bisogna anche dire che in realtà, lontano dalla Terra e in prossimità dei buchi neri, lo spazio, come lo percepiamo sperimentalmente, perde la sua continuità. In prossimità di un buco nero infatti le traiettorie della luce che utilizziamo per fare le nostre misurazioni vengono deviate e la misura perde di significato nell'accezione della geometria euclidea. In questo caso possiamo supporre una perdita della continuità e dell'uniformità dello spazio che circonda il buco nero che pertanto viene indicato anche come una singolarità dello spazio.

L'isotropia è l'assenza di direzioni preferenziali nello spazio, ovvero lo spazio ci appare con le stesse proprietà geometriche in tutti i luoghi. Se un oggetto è rettilineo questo oggetto non appare curvo o di lunghezza diversa se viene spostato in un punto differente dello spazio. Anche questa accezione dello spazio (isotropia) è valida in Meccanica Classica ma non in generale in altre teorie Fisiche più generali. In Cinematica ci si occupa solo di spazi che non creano troppi problemi, anzi più esattamente di spazi euclidei tridimensionali e quindi si assume come postulato lo spazio continuo, isotropo, euclideo, tridimensionale. Sussiste quindi, come per il tempo, il postulato seguente

*"Esiste lo spazio ente continuo, isotropo ed euclideo"*

## Nozione di Punto Materiale

La modellazione matematica del moto, passa per una idealizzazione dei corpi materiali come percepiti dall'esperienza comune. In Cinematica infatti i corpi materiali, estesi nello spazio tridimensionale per loro natura, sono idealizzati geometricamente come contratti in un solo punto geometrico (ente geometrico zero-dimensionale). Questa idealizzazione è alla base del concetto di Punto Materiale che costituisce quindi una forte semplificazione della realtà tridimensionale ed estesa dei corpi materiali. La dinamica del corpo rigido descrive la complessità degli oggetti estesi come sistemi di punti materiali vincolati rigidamente, consentendo una trattazione fisica completa di tali corpi estesi. In Cinematica si semplifica l'approccio alla realtà utilizzando la nozione di Punto Materiale e quindi si dovrebbe utilizzare la dizione Punto Materiale in luogo di corpo proprio per sottolineare sempre il grado di

idealizzazione descritto.

## Traiettoria di un Punto Materiale

Le posizioni successive occupate dal punto materiale nello spazio al variare del tempo costituisce un insieme continuo di punti che prende il nome di Traiettoria del punto materiale nello spazio.

## Dallo spazio reale allo spazio vettoriale

Se gli oggetti reali sono assimilati a punti materiali, lo spazio tridimensionale, reale così come ci appare dall'esperienza quotidiana, viene modellato matematicamente attraverso la nozione di Spazio vettoriale. Tale nozione ha una generalità così elevata da essere impiegata tanto in Fisica quanto in altre branche del sapere umano.

Per quel che concerne la Cinematica, lo spazio vettoriale che si utilizza è quello tridimensionale ed euclideo.

Lo Spazio Vettoriale non è altro che una coppia di insiemi che vengono dotati di operazioni con ben definite proprietà. Il primo insieme contiene degli elementi chiamati vettori che possono essere sommati secondo determinate regole che si vedranno successivamente. Il secondo insieme è costituito da numeri (scalari) e viene definito il prodotto di uno scalare per un vettore utile per la modellazione di quantità Fisiche. Inoltre lo Spazio Vettoriale utilizzato in Cinematica è anche euclideo ovvero è definito una operazione di prodotto scalare da cui viene derivata una definizione di distanza tra due elementi che è equivalente alla distanza definita per i punti dello spazio geometrico euclideo (che a sua volta dal Teorema di Pitagora e dall'utilizzo del metodo delle coordinate ideato da Cartesio).

Ogni punto dello spazio reale pertanto è modellato come punto dello Spazio Vettoriale della Cinematica che per essere individuata sotto forma di vettore richiede la definizione di un punto di osservazione.

Sia dunque  $P$  un punto generico dello spazio e  $O$  un punto di osservazione che per definizione è fisso. Il segmento orientato da  $O$  a  $P$  è rappresentativo del vettore dello Spazio Vettoriale che rappresenta lo spazio reale.

È importante discernere le nozioni di segmento orientato e vettore. Il segmento orientato è solo la rappresentazione grafica del vettore così come la cifra 3 è solo il modo in cui si scrive il terzo numero naturale. Infatti tutti i segmenti orientati paralleli a  $\vec{OP}$  ed aventi la stessa lunghezza e orientamento sono per definizione rappresentativi dello stesso vettore così come i numeri 2, 8/4, 16/8 sono differenti rappresentazioni del secondo numero naturale.

## Vettore di posizione

Se  $O$  è la posizione dell'osservatore e  $P$  la generica posizione di un punto materiale nello spazio geometrico, si definisce vettore di posizione il vettore  $\vec{r}$  rappresentato dal segmento orientato  $\vec{OP}$ . Per indicare questa corrispondenza in questa trattazione si utilizzerà la scrittura  $\vec{r} \sim \vec{OP}$ . Il vettore di posizione dipende dalla scelta del punto di osservazione  $O$  ma la sua definizione permette di costruire delle quantità che sono indipendenti dalla scelta del punto di osservazione. Queste quantità sono la velocità e l'accelerazione vettoriale.

## Posizione

Per definire la posizione di un corpo è necessario definire un Sistema di riferimento ad esempio una linea con sopra delle tacche e dei numeri oppure un sistema di due assi la cui origine è definita in qualche modo (esempio il centro del campo di calcio 'Delle Alpi' di Torino o qualsiasi altro a seconda della squadra o dello sport preferito). La mia attuale posizione (ad esempio **definendo** asse X il senso della lunghezza del campo con i positivi verso nord e asse Y il senso della larghezza con i positivi verso est) è (circa)  $x=4577$  m ;  $y=2314$  m . Si può definire lo spostamento in funzione del tempo facendo corrispondere ad ogni  $t$  una posizione  $(x,y)$  nel piano, oppure  $(x,y,z)$  nello spazio:

$$\vec{s}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

## Moto rettilineo

Cominciamo analizzando un semplice moto lungo una retta detto appunto *moto rettilineo*.

### Velocità

La rapidità con cui avviene lo spostamento lungo la traiettoria nel tempo determina una grandezza detta **velocità**

**media** data dalla seguente relazione  $v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ .

Un esempio chiaro a tutti può essere quello del moto di un'automobile che percorre 60 km in 30 minuti: essa avrà una velocità media di 120 km/h. Possiamo chiederci quale potrebbe essere la velocità in ogni istante e per fare questo dovremo considerare piccolissimi intervalli di tempo, in pratica dovremo far tendere  $\Delta t$  a zero. La velocità così ottenuta è detta **velocità istantanea** che rappresenta la rapidità di variazione della posizione all'istante scelto.

Questa è data quindi da

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

e se volessimo trovare lo spazio percorso dall'istante iniziale all'istante  $t$  non dovremmo far altro che utilizzare le regole di integrazione e quindi

$$dx = v(t)dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v(t)dt \Rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^t v(t)dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt$$

Questa è la regola generale che mette in relazione la velocità con lo spazio percorso. Nel caso in cui la velocità fosse costante, si partisse al tempo  $t_0 = 0$  e dall'origine del sistema di riferimento, cioè  $x_0 = 0$  avremmo la relazione  $x = vt$  che esprime un **moto rettilineo uniforme**

### Accelerazione

Lo stesso ragionamento può essere fatto con la velocità: infatti anch'essa potrebbe variare nel tempo ed il tasso di variazione è dato da una grandezza chiamata **accelerazione**. Anche per l'accelerazione possiamo definire una

**accelerazione media** ed una **accelerazione istantanea** date dalle seguenti relazioni  $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  ed

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Anche per l'accelerazione, integrando otteniamo la relazione che la lega alla velocità

$$dv = a(t)dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t)dt \Rightarrow v - v_0 = \int_{t_0}^t a(t)dt \Rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t)dt$$

ed anche in questo caso se  $v_0 = 0$ ,  $a = costante$  e si partisse al tempo  $t_0 = 0$  avremmo la relazione  $v = at$  che definisce un **moto uniformemente accelerato**

## Moto uniformemente accelerato

Combinando i risultati ottenuti e considerando  $v$  ed  $a$  costanti possiamo ottenere la legge che definisce il **moto uniformemente accelerato**

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

e se  $t_0 = 0$

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

Alcuni esempi possono essere di aiuto per comprendere quanto detto: Moto di un elettrone, Treno, Rally.

## Moto armonico

Analizziamo ora un altro tipo di moto nel quale un corpo ripassa nella stessa posizione ad intervalli regolari e con la stessa velocità.

Prendiamo un percorso chiuso come una circonferenza: in questo caso il punto ripassa dal punto di partenza dopo aver percorso in giro completo e quindi copre un angolo di  $2\pi$  in un tempo  $T$  detto **periodo** e chiamiamo **frequenza** il numero di volte che esso percorre la circonferenza in un secondo. Diciamo quindi  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  e  $\nu = \frac{1}{T}$

dove  $\omega$  è la velocità del punto.

Se analizziamo la traiettoria del punto possiamo notare che la sua posizione è determinata da un angolo rispetto al centro della circonferenza stessa ed, al variare della posizione, l'angolo muta con una certa velocità. Seguendo ciò che abbiamo detto precedentemente per il moto rettilineo anche l'angolo (che possiamo equiparare allo spazio percorso) è legato alla velocità di percorrenza sulla circonferenza da  $\theta = \theta_0 + \omega t$ . Analizziamo la posizione del corpo proiettata sull'asse delle ordinate. Se la circonferenza ha un raggio  $A$  il moto su di essa posizione è data da  $y(t) = A \sin(\omega t + \theta_0)$

Notiamo che l'oscillazione della proiezione della posizione del punto attorno al centro della circonferenza ha un valore massimo equivalente al raggio della circonferenza chiamato **ampiezza**.

Derivando la posizione otteniamo la velocità  $v(t) = \omega A \cos(\omega t + \theta_0)$  che è massima quando il punto passa per il centro ovvero se  $\cos(\omega t + \theta_0) = \pm 1 \Rightarrow \omega t = 0 + n\pi, \theta_0 = 0 + n\pi$ .

L'accelerazione viene ricavata derivando la velocità  $a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x$

Da quest'ultima ricaviamo la condizione necessaria perché un moto sia armonico e cioè

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Da questa possiamo dedurre le funzioni seno e coseno e le loro combinazioni lineari sono in  $\Re$  (campo reale) tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale ottenuta.

Più in generale se abbiamo un'equazione del tipo  $\frac{d^2 f}{dt^2} + k^2 f = 0$  la soluzione è sempre

$$f(z) = A \sin(kz + \phi)$$

## Moto nel piano

Estendiamo ora i concetti di moto nel caso che la traiettoria sia una linea curva su un piano. Ora non ci basta più sapere il valore numerico di uno spostamento ma ci deve interessare conoscerne anche la direzione ed il verso.

Questo è possibile se si utilizzano grandezze che hanno caratteristiche numeriche e direzionali che si chiamano **vettori**.

### Coordinate polari e cartesiane

Inoltre possiamo utilizzare due differenti sistemi di coordinate: **cartesiane** e **polari**. La differenza sta nel fatto che le coordinate cartesiane sono date dalla proiezione della posizione del punto sugli assi cartesiani e quelle polari dalla distanza  $r$  del punto dall'origine degli assi chiamata **raggio vettore** e dall'angolo  $\theta$  formato con l'asse delle ascisse.

Le relazioni tra le coordinate sono le seguenti

$$x = r \cdot \cos \theta, \quad y = r \cdot \sin \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x},$$

### Posizione e velocità

Analizziamo ora la posizione di un punto in coordinate polari che in un tempo  $t$  percorre un tratto di traiettoria.

Le posizioni sono  $\vec{r}(t)$  ed  $\vec{r}(t + \Delta t)$ ; la distanza tra di essi è  $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  e la velocità media è data da 
$$\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Notiamo che la distanza dei punti non coincide con la traiettoria percorsa ma è solo la misura della distanza tra le due posizioni su un piano mentre la vera velocità lungo la traiettoria è  $\frac{ds}{dt}$ . Ma se noi facessimo tendere  $\Delta t \rightarrow 0$  avremmo che

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ed il vettore  $d\vec{r}$  diventa tangente alla traiettoria e coincide in modulo con l'infinitesimo spostamento  $ds$ .

Se ne ricava allora che  $\vec{r} = ds \cdot \vec{u}_T$  dove  $\vec{u}_T$  non è altro che il **versore** (un vettore unitario) che dà la direzione dello spostamento.

Ricaviamo così che  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_T = v \cdot \vec{u}_T$  e quindi possiamo dedurre che la velocità vettoriale individua

in ogni istante la direzione ed il verso del movimento e ci dà la velocità istantanea  $v = \frac{ds}{dt}$  con la quale è percorsa la traiettoria.

Analogamente a quanto detto per il moto rettilineo integrando l'espressione  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  otteniamo quella generale che collega posizione e velocità data da

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

## Accelerazione

Sempre rifacendosi agli stessi concetti generali troviamo l'espressione dell'accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

e ne segue integrando che

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

L'attenzione va posta su un concetto che val la pena di ricordare. La derivata di un versore e di un vettore.

Nello svolgimento dei calcoli di derivazione di vettori spesso incontriamo la derivata di un versore che come ricordiamo è un vettore unitario ed è dato da  $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$  dove  $\phi$  è l'angolo infinitesimo e  $\vec{u}_N$  è la componente normale alla direzione del versore.

Per la derivata di un vettore abbiamo invece

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{u} + a\frac{d\vec{u}}{dt}$$

Nel caso dell'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_T) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$$

Quindi l'accelerazione ha due componenti, una tangenziale data da  $\frac{dv}{dt}\vec{u}_T$  ed una normale alla stessa data da  $v\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$  che possiamo scrivere, ricordando che  $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$  ve che  $ds = d\phi \cdot R$ , come  $\frac{v^2}{R}\vec{u}_N$ .

Possiamo quindi dire che

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

## Moto circolare

A questo punto possiamo analizzare un moto che si svolge su di una circonferenza. Cominciamo con l'analizzare un moto a velocità costante. La costanza della velocità fa sì che il termine dell'accelerazione tangenziale  $\frac{dv}{dt}$  sia nullo.

in questo caso l'accelerazione è data solo da  $a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$ . Ricordiamo dal moto armonico che il periodo vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Nel caso vari anche il modulo della velocità abbiamo un contributo anche dalla accelerazione tangenziale. Questo ci permette di definire una quantità detta **accelerazione angolare** che è data da  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_T}{R}$ .

A questo punto integrando avremo l'espressione della **velocità angolare** data da

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \int_{t_0}^t \alpha(t) dt$$

ed integrando nuovamente anche l'espressione dell'angolo percorso

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(t) dt$$

## Velocità angolare - Notazione vettoriale

La velocità angolare può essere descritta da una quantità vettoriale che definisce il verso di percorrenza sulla circonferenza ed il modulo. La direzione di questo vettore è perpendicolare al piano del moto ed il verso è dato dalla regola della mano destra, ovvero dal vertice del vettore il moto deve apparire in senso antiorario.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Questa relazione ci permette di ottenere l'accelerazione del moto circolare dalla velocità angolare e dall'accelerazione angolare tramite la seguente relazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

e quindi

$$\vec{a} = \alpha \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

## Note

[1] Feynman, Leighton, Sands, Lectures on Physics Vol.I cap. 5, Addison-Wesley 1963.

# Dinamica del punto

---

## Cos'è la dinamica

La dinamica cerca di dare una spiegazione delle cause che determinano il moto di un corpo analizzato precedentemente con le leggi della cinematica. Abbiamo visto che un corpo che si muove cambia di posizione lungo una traiettoria ed abbiamo definito la velocità come il tasso di variazione della posizione all'interno del sistema di riferimento. Da questo possiamo dedurre che in assenza di velocità il corpo non si muove. Sembra una conclusione ovvia ma se continuiamo nella nostra analisi e consideriamo un corpo in movimento con una certa velocità variabile ci dobbiamo ricordare che abbiamo definito l'accelerazione come tasso di variazione della velocità. Quindi ne segue che in assenza di accelerazione la velocità di un corpo rimane costante.

**Il corpo prosegue nel suo stato di moto** se non vi è un contributo dell'accelerazione.

Anche un corpo fermo in un certo senso è in uno stato di moto con velocità nulla. Quindi è l'accelerazione che muta lo stato di moto di un corpo.

## Forza ed Inerzia — Galileo e Newton

### Principio d'inerzia (Galileo) o Prima legge di Newton

Galileo Galilei per primo scopre questa relazione qualitativa e stabilisce il **principio d'inerzia** per il quale *un corpo persevera nel suo stato di moto se non soggetto a forze* ma cos'è la forza? Intuitivamente la variazione di stato può essere provocata da una qualche interazione con il corpo in esame e quindi possiamo dire che la forza misura *l'interazione tra sistemi fisici*.

### Seconda legge di Newton

Quello che viene espresso da Isaac Newton è la versione quantitativa di questo principio e si rende conto che il corpo è in un certo senso "restio" a cambiare il suo stato di moto e questa resistenza al cambiamento è proporzionale alla sua massa, definita **massa inerziale**. La proporzionalità ed il rapporto con la forza è definito dalla celebre formula

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

che può essere integrata ricordando la cinematica e quindi

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Questo modo di interpretare la *seconda legge di Newton* ci permette quindi di legare le proprietà cinematiche del movimento alle cause che lo provocano.

### Terza legge di Newton

Un'altra scoperta di Newton è il cosiddetto *principio di Azione-Reazione* che dice che *in un sistema di riferimento inerziale, un corpo soggetto ad una forza esercitata da un altro corpo reagisce con una forza eguale e contraria.*

### Quantità di Moto

Un'importante proprietà dei corpi in movimento (si ricorda che l'essere fermo è un tipo di moto) è data dalla **quantità di moto** ed è una quantità intrinseca del corpo data da

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La quantità di moto è definita nella fisica classica come prodotto della massa per la velocità. È una grandezza vettoriale che ha importanti applicazioni negli urti: Questa ci permette di riformulare la seconda legge di Newton come  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  per casi dove la massa potrebbe non essere costante.

Possiamo ora notare che se noi applichiamo al corpo una certa forza per un intervallo di tempo  $dt$  avremo una quantità chiamata **impulso** data da

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F} dt = d\vec{p}$$

e quindi possiamo dire che l'impulso di una forza provoca una variazione della quantità di moto del corpo. Ne va da se che in assenza di forze la quantità di moto di un corpo rimane costante, o come si dice **la quantità di moto si conserva.**

Il Teorema dell'impulso mette in relazione le due grandezze appena definite:

$$\Delta\vec{p} = \vec{I}$$

Infatti, per come è definita la quantità di moto si ha che:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

e quindi

$$d\vec{p} = \vec{F} dt$$

da cui

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

## Azione delle forze

Riprendiamo la relazione principale della dinamica e proviamo a definire come una forza influenza il moto. Come abbiamo visto in cinematica l'accelerazione è data da  $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$  e quindi possiamo scrivere

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = m\frac{dv}{dt}\vec{u}_T + m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

e notiamo come la forza "provochi" una accelerazione con due componenti, una tangenziale alla traiettoria ed una normale e diretta verso il centro di curvatura della traiettoria detta *accelerazione centripeta*.

La forza quindi può essere divisa in due componenti: una da un contributo **tangenziale che provoca una variazione del modulo della velocità**, ed una diretta verso il centro di curvatura della traiettoria e quindi **ortogonale che determina una variazione della direzione della velocità e quindi del moto**.

## Equilibrio

Il concetto di equilibrio ora che sappiamo da cosa è provocato il movimento dovrebbe essere più chiaro.

Vi sono due possibili tipi di equilibrio: **equilibrio statico** che impone un'assenza di movimento ed **equilibrio dinamico** che comporta un *mantenimento* dello stato di movimento.

In entrambi i casi si tratta di una situazione nella quale *non vi sono variazioni dello stato del moto del corpo* e cioè la somma delle forze che agiscono sul corpo detta **risultante** deve essere nulla.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

ed il moto deve avvenire con velocità costante.

Quando un corpo soggetto a forze rimane fermo si può dedurre che in gioco vi sia una forza che bilancia le forze agenti.

Questa forza viene chiamata **reazione vincolare** e quindi per avere l'equilibrio vale la seguente  $\vec{R} + \vec{N} = 0$

La reazione vincolare va definita di volta in volta esaminando lo stato del sistema.

## Analisi di vari tipi di forze

Come abbiamo detto in precedenza vale sempre la formula  $\vec{F} = m\vec{a}$  e quindi, conoscendo il tipo di forza applicato al corpo basta sostituire nella relazione l'espressione della forza in questione per ottenere un rapporto con l'accelerazione del corpo. Integrando otteniamo l'espressione della velocità ed integrando ancora otteniamo l'espressione dello spostamento e la traiettoria del corpo.

Bisogna **sempre** ricordare che abbiamo a che fare con quantità vettoriali e che quindi ogni grandezza dà dei contributi che scomposti e proiettati sugli assi cartesiani del sistema di riferimento scelto danno le leggi del moto lungo le varie direzioni.

### La forza peso

La forza di gravità imprime ai corpi una accelerazione che vale  $\vec{g} = 9.8m/s^2$  ed è proporzionale alla massa del corpo secondo la formula  $\vec{P} = m\vec{g}$  detta **forza peso**.

### La forza di attrito

La forza di attrito è generata dal contatto tra due corpi che si muovono uno rispetto all'altro.

A seconda del materiale del quale i corpi sono composti questa forza sviluppa una reazione al moto di intensità differente. La forza ha quindi da una dipendenza da un parametro che chiamiamo **coefficiente di attrito** ed indichiamo con  $\mu$

L'attrito è anche proporzionale alla reazione vincolare applicata al corpo e quindi possiamo scrivere la forma di questa forza come

$$\vec{F}_{at} = -\mu N \vec{u}_v \text{ dove si evidenzia come sia diretta nel senso contrario al verso del moto dato dal segno negativo del versore della velocità.}$$

Il coefficiente di attrito può essere talmente elevato da impedire il movimento oppure solo frenarlo. Nel primo caso si parla di **coefficiente di attrito statico** mentre nel secondo caso di **coefficiente di attrito dinamico** con  $\mu_s > \mu_d$

## Forza elastica

Definiamo *forza elastica* una forza diretta sempre verso un punto detto centro e con modulo proporzionale alla distanza da esso. In pratica  $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$

Il moto che ne risulta è un moto oscillatorio armonico rispetto al centro e, come avevamo visto nel capitolo del moto armonico in cinematica la legge che regola un moto armonico è un'equazione differenziale e quindi

$$\vec{F} = m\vec{a} = -kx\vec{u}_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

e quindi ne possiamo dedurre che  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Le posizioni sono date dalle soluzioni dell'equazione differenziale che abbiamo visto essere  $x = A \sin(\omega t + \phi)$ .

Differenziando otteniamo la velocità e differenziando ulteriormente abbiamo l'accelerazione.

## Forze centripete

Una forza centripeta è una forza che ha la componente tangenziale alla traiettoria nulla.

Quindi il moto avviene lungo una traiettoria circolare sia perché forzato da vincoli che provocato da forze centrali come quelle gravitazionali.

## Piano inclinato

Uno dei più celebri esperimenti di Galileo è quello che riguarda il moto dei corpi su un piano inclinato. Come vedremo il piano inclinato permette di far muovere il corpo sotto una forza che, a seconda dell'inclinazione del piano, è minore della forza di gravità e quindi il moto si svolge più lentamente e quindi è più facile studiarlo.

Come abbiamo detto le forze vanno scomposte lungo gli assi cartesiani per valutare le leggi del moto. Nel caso del piano inclinato il corpo posto su di esso è soggetto alla forza di gravità ma, lungo il piano nel quale si compie il moto, la proiezione della forza peso vale  $mg \sin(\theta)$  e quindi minore in modulo della forza di gravità effettiva.

La forza che imprime un'accelerazione al corpo è quindi minore e provoca una minore variazione della velocità e di conseguenza una più lenta percorrenza del piano inclinato.

In pratica abbiamo che  $mg \sin \theta = ma$  e quindi  $a = g \sin \theta$ : il corpo scende con un'accelerazione minore di quella di gravità.

## Pendolo Semplice

Il pendolo semplice è un sistema composto da un punto materiale appeso a un punto fisso tramite un filo teso di massa trascurabile.

Il punto percorre una traiettoria curva con raggio pari alla lunghezza del filo e quindi un tratto di una traiettoria circolare.

$$m\vec{g} + \vec{T}_f = m\vec{a}$$

Come si è detto precedentemente le forze vengono scomposte lungo gli assi del sistema di riferimento centrato sul punto.

La forza peso ha una componente lungo la direzione del filo che viene controbilanciata dalla tensione del filo e quindi lungo questa direzione la risultante delle forze è uguale alla accelerazione centripeta e quindi

$$R_T = T_f - mg \cos \theta = ma_N = m \frac{v^2}{L} \text{ mentre lungo la tangente alla traiettoria avremo}$$

$$R_N = -mg \sin \theta = ma_T = mL \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Troviamo quindi che  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$  che è l'equazione differenziale di un moto armonico. Per piccoli angoli

possiamo utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor per la funzione  $\sin \theta$  che ci da  $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$  che

arrestata al primo ordine ci da  $\sin \theta \simeq \theta$

Quindi possiamo scrivere  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$  e quindi la legge oraria del moto è  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$  e che

$$\omega = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Ricordando che  $v = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt}$  possiamo ricavare la tensione del filo da  $m \frac{v^2}{L} = T_f - mg \cos \theta$

La cosa importante da notare è che il periodo del moto è dato da  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$  e non dipende dall'ampiezza.

Possiamo quindi evidenziare l'**isocronismo delle piccole oscillazioni**

## Lavoro, Potenza ed Energia

Il contributo di una forza applicata ad un corpo che si muove su di una traiettoria curvilinea è dato dall'integrale di linea di questa forza e quindi se il punto si sposta dal punto A al punto B possiamo scrivere  $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$  e

chiamiamo questa nuova quantità **lavoro della forza**.

In effetti la quantità  $\vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cos \theta ds = F_T ds$  è la componente tangenziale del lavoro sulla traiettoria di tutte le forze agenti sul punto. I casi in cui il lavoro è nullo sono quelli dove non agisce nessuna forza oppure la risultante delle forze è perpendicolare alla traiettoria così che  $\cos \theta = 0$ .

Il tasso di variazione del lavoro esprime la rapidità di erogazione dello stesso ed introduce la grandezza chiamata **potenza** data quindi da  $\frac{dW}{dt} = F_T v$ .

## Energia Cinetica

Dalla espressione del lavoro possiamo ricavare un'importante grandezza chiamata **energia cinetica** che ricaviamo direttamente da  $dW = F_T ds = ma_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv$  ed integrando otteniamo

$$W = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \Delta E_k \text{ dove } E_{k_i} = \frac{1}{2} m v_i^2$$

Si noti che l'energia cinetica è stata ricavata utilizzando la seconda legge di Newton e quindi ha validità generale ed inoltre è una caratteristica intrinseca del corpo; ovviamente è legata ad uno spostamento del corpo stesso come lo è il lavoro.

Un'altra espressione lega l'energia cinetica alla quantità di moto ed è la seguente  $E_k = \frac{p^2}{2m}$ .

## Energia potenziale

Ogni forza che agisce su un corpo che si muove genera lavoro, ma a volte il percorso seguito influisce su di esso ovvero può essere, come nel caso della forza peso o della forza elastica, che il lavoro dipenda solo dalla posizione iniziale e finale del moto mentre in altri casi, come in presenza di attriti, il percorso seguito introduce forze che contribuiscono in modo attivo e delle quali dobbiamo tenere conto.

Le forze che NON dipendono dal percorso seguito si dicono **forze conservative**. Il lavoro delle forze conservative lungo un percorso chiuso risulta quindi nullo ovvero  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ .

La funzione che definisce il lavoro per forze conservative è data da  $W = -\Delta E_p$  dove  $E_p$  è detta **energia potenziale**.

Va ricordato che il fatto che il lavoro lungo un percorso chiuso sia nullo è condizione per l'esistenza di una funzione delle coordinate alla quale posso applicare un operatore chiamato **gradiente** ed indicato con  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ .

Questo operatore dato uno scalare ritorna un vettore e quindi, in questo caso particolare, il gradiente della funzione energia potenziale ritorna le componenti cartesiane della forza in questione.

In questo caso  $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$  o in modo più compatto

$$\vec{F} = -\vec{grad} E_p = -\nabla E_p$$

## Energia Meccanica

Le due formule che legano il lavoro, l'energia potenziale e quella cinetica possono essere unificate, ovviamente in presenza di sole forze conservative, per esprimere il concetto di conservazione dell'**energia meccanica** che definiamo come la somma dell'energia potenziale e quella cinetica di un sistema ed è data da  $E_m = E_k + E_p = \text{costante}$ .

Nel caso invece vi sia un contributo anche di forze non conservative allora notiamo che il lavoro è dato da  $W = W_c + W_{nc} = E_k, B - E_k, A$ . Ricaviamo allora  $W_{nc} = E_m, B - E_m, A$  ovvero in presenza di forze non conservative l'energia meccanica non resta costante e la differenza di essa coincide con il lavoro proprio delle forze non conservative.

## Momenti

Introduciamo ora il concetto di momento di un vettore.

Definiamo come **momento del vettore**  $\vec{v}$  applicato in un punto **P** ad una certa distanza da un punto **O** il vettore

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{v}.$$

Il modulo è dato da  $M_O = OPv \sin \theta = vd$  dove  $\theta$  è l'angolo formato dalla direzione del vettore  $\vec{v}$  con la direzione di  $\vec{OP}$  e quindi  $d$  non è altro che la distanza del punto **O** dalla direttrice di  $\vec{v}$  e verrà chiamato **braccio**.

Facciamo notare come il modulo, essendo dipendente da  $d$  e non da  $OP$ , non dipende dal punto in cui viene applicato il vettore  $\vec{v}$  lungo la sua direttrice.

A questo punto ritorniamo ai nostri concetti ormai familiari di forza e velocità e definiamo due concetti come il **momento angolare** ed il **momento di una forza**

### Momento angolare

Preso la traiettoria di un corpo ed un punto fisso detto **polo** notiamo che rispetto a questo polo la velocità e la quantità di moto di un corpo sono vettori nello spazio ad una distanza  $\vec{r}$  dal polo.

Possiamo definire allora un momento del vettore quantità di moto rispetto ad **O** in questo modo

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

### Momento della forza

Il momento di una forza ha l'espressione  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  e possiamo notare che se vi sono più forze applicate in un punto vale  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R}$

Se consideriamo la variazione del momento angolare nel tempo allora possiamo scrivere

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Nel caso che il polo **O** sia fermo la prima quantità è nulla in quanto il corpo avrebbe velocità  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  ed il prodotto vettoriale si annullerebbe. Il secondo termine coincide con la forza applicata moltiplicata vettorialmente per la distanza dal punto **O**. Ricaviamo così che  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ .

Inoltre è importante notare il caso in cui la forza sia applicata lungo la stessa direttrice di  $\vec{r}$  allora  $\vec{M} = 0$  e di conseguenza  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$  e quindi  $\vec{L} = \text{costante}$ .

Poniamo attenzione al valore di  $\vec{L}$ : sappiamo che vale  $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$  ma  $\vec{v} = \vec{v}_\theta + \vec{v}_r$ . In questo caso  $\vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{v}_\theta + \vec{v}_r)$  e la parte  $\vec{v}_r$  si annulla in un prodotto vettoriale con  $\vec{r}$  in quanto paralleli lasciando quindi  $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta$ .

Il modulo vale  $L = mr v_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ . La costanza di  $\vec{L}$  in un campo di forza centrale implica così la costanza del prodotto  $r^2 \frac{d\theta}{dt}$  e sarà la chiave per la condizione della costanza della velocità areale nella gravitazione newtoniana.

# Moti relativi

Abbiamo iniziato lo studio della cinematica chiarendo il concetto che lo studio di un corpo in movimento e di conseguenza la definizione della sua traiettoria è possibile se definiamo a priori un certo sistema di riferimento rispetto al quale calcolare la posizione del corpo e derivarne le leggi del moto.

Le leggi fisiche ricavate valgono in questo primo sistema di riferimento ma nulla ci impedisce di prenderne in considerazione un altro rispetto al quale il corpo ha una posizione differente ma le leggi che regolano il moto sono dello stesso tipo. Quindi possiamo affermare che le leggi fisiche non dipendono dal sistema di riferimento ma per esse lo spazio è omogeneo ed isotropo, ovvero non vi è un punto privilegiato e nemmeno una direzione privilegiata per lo studio delle leggi fisiche.

Tutto questo vale se i due sistemi di riferimento sono fissi, ma nel caso uno fosse in moto relativo rispetto all'altro allora le cose cambiano: le leggi sono differenti nei due sistemi di riferimento.

Iniziamo col dire che presi due sistemi di riferimento con origine in  $\mathbf{O}$  (fisso) ed  $\mathbf{O}'$  (in moto) un punto  $\mathbf{P}$  nello spazio ha una distanza  $\vec{r}$  da  $\mathbf{O}$  ed una distanza  $\vec{r}_1$  da  $\mathbf{O}'$ .

Possiamo dire allora che

$$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}_1$$

ed utilizzando le regole di derivazione dei versori e dei vettori e i concetti di relazioni tra spazio, velocità ed accelerazione cerchiamo di ottenere le relazioni vettoriali fondamentali per i due sistemi.

## Velocità relativa

Iniziamo dalla velocità rispetto al sistema fisso: derivando abbiamo che  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , quella rispetto ad  $\mathbf{O}'$  è

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \text{ e quella del sistema } \mathbf{O}' \text{ rispetto ad } \mathbf{O} \quad \vec{v}_{O'} = \frac{d\vec{OO'}}{dt}$$

Otteniamo  $\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_1 + x' \frac{d\vec{u}'_x}{dt} + y' \frac{d\vec{u}'_y}{dt} + z' \frac{d\vec{u}'_z}{dt}$  e ricordando che  $\frac{d\vec{u}'_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}'_i$  otteniamo

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1$$

Questa relazione è il **teorema delle velocità relative**

La differenza tra le velocità dei due sistemi viene chiamata **velocità di trascinamento** e risulta  $\vec{v}_t = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_1$

Questo termine ha due componenti, una traslatoria legata a  $\vec{v}_{O'}$  ed una rotatoria legata a  $\vec{\omega}$ , corrisponde in generale ad un **moto rototraslatorio**.

## Accelerazione relativa

Ora deriviamo da questa relazione per derivazione la formula dell'accelerazione

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_1 + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1$$

Questo è il **teorema delle accelerazioni relative**

Analizziamo ora anche i termini di questa relazione: l'**accelerazione di trascinamento** è data da  $\vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_1$ .

L'ultimo termine è chiamato **accelerazione di Coriolis** data da  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1$ .

## Sistemi inerziali

Si definisce **sistema inerziale** un sistema dove un corpo non soggetto a forze mantiene il suo stato di moto ovvero un sistema dove vale la legge d'inerzia.

Un sistema in moto rettilineo uniforme non rotazionale rispetto al sistema fisso di riferimento ha le seguenti proprietà  $\vec{v}_{O'} = \text{costante}$ ,  $\vec{\omega} = 0$ ,  $\vec{a}_{O'} = 0$  e quindi dalle relazioni ricavate precedentemente ricaviamo che l'accelerazione nel sistema in moto vale  $\vec{a}_1 = \vec{a}$  e quindi ne ricaviamo un risultato fondamentale:

Preso un sistema di riferimento inerziale, tutti i sistemi che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto al primo sono anche loro sistemi inerziali

Se invece il moto del secondo sistema non è rettilineo uniforme allora siamo in presenza di un contributo dato dalla forza effettiva chiamata **forza vera** e da **forze apparenti** date dalle accelerazioni di trascinamento e da quella di Coriolis.

Infatti riportando il risultato ottenuto per l'accelerazione alla seconda legge di Newton, se nel primo sistema abbiamo  $\vec{F} = m\vec{a}$  nel secondo avremo  $m\vec{a}_1 = \vec{F} - m\vec{a}_t + \vec{a}_c$  e cioè in un sistema non inerziale abbiamo il contributo delle **forze apparenti**.

# Dinamica dei sistemi di punti materiali

## Forze esterne ed interne

Abbiamo parlato nella dinamica del punto del comportamento di un corpo sottoposto all'azione di forze. Ora analizziamo la situazione nella quale diversi punti fanno parte di un sistema complesso e tra di essi vi sono sia forze esterne al sistema sia forze interne, cioè forze che agiscono solo all'interno del sistema e sono generate all'interno del sistema stesso. Un esempio può essere quello del sistema solare: nel sistema vi sono forze che si sviluppano tra i costituenti del sistema ovvero i pianeti. Se restringiamo il sistema alla coppia Terra-Luna vediamo come tra la terra ed il suo satellite vi sono forze interne ma nel moto complessivo la forza gravitazionale del sole è considerata come forza esterna al sistema.

In un sistema di punti ognuno di essi contribuisce con le sue quantità intrinseche al comportamento generale del sistema e quindi per quanto riguarda la quantità di moto il sistema avrà  $\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \sum_i m\vec{v}_i$ , per l'energia

cinetica  $E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m\vec{v}_i^2$  e se consideriamo un punto qualsiasi nel sistema inerziale l'espressione del

momento angolare del sistema diventa  $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ .

## Centro di massa

La scelta di un punto di riferimento per lo studio del moto del sistema ci porta a considerare un particolare punto che ha delle caratteristiche che ci permetteranno di facilitare una serie di espressioni e di semplificare lo studio di alcuni casi di moto: questo punto (che potrà essere a volte considerato anche come l'origine del sistema di riferimento) si chiama **centro di massa**.

La posizione è data da

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

e tiene conto in un certo senso (è una media pesata) del contributo delle singole masse di ciascun punto: masse maggiori contribuiscono in maniera preponderante.

Un esempio potrebbe essere il nostro sistema solare considerato un centro del sistema di riferimento un punto al di fuori di esso: la posizione del centro di massa sarebbe quasi coincidente con quella del nostro sole che ne detiene il 99% della massa totale.

L'utilità del centro di massa risulta chiara se noi proviamo a calcolarne la velocità e l'accelerazione; otteniamo infatti per la velocità la seguente espressione

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\vec{P}}{m_{tot}}$$

che esprime il fatto che il **centro di massa ha la stessa quantità di moto dell'intero sistema** ed è come se tutta la massa fosse concentrata in esso.

Lo stesso ragionamento vale per l'accelerazione ed otteniamo lo stesso risultato che, integrato con la seconda legge di Newton ci da

$$m\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \left( \sum_i \vec{F}_i^{est} + \sum_i \vec{F}_i^{int} \right) = \vec{R}^{est} + \vec{R}^{int}$$

### Quantità di moto

Possiamo notare che le forze interne ad un sistema seguono la terza legge di Newton ovvero il principio di azione e reazione per cui sono a due a due eguali e contrarie, quindi si annullano ed  $\vec{R}^{int} = 0$ .

La relazione che ne deriva è il cosiddetto **teorema del centro di massa**:

$$\vec{R}^{est} = m\vec{a}_{CM} = m_{tot} \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

ovvero **il centro di massa si muove come se la massa totale del sistema sia concentrata in esso e ad essa sia applicata la risultante delle sole forze esterne**

È importante notare che se un sistema non è influenzato da forze esterne allora  $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$  e ne segue che

$\vec{P} = \text{costante}$  quindi si può dire che **in un sistema isolato vi è una conservazione della quantità di moto**

### Momento angolare

Un altro aspetto importante dell'utilizzo del centro di massa come origine del sistema di riferimento è l'analisi del momento angolare del sistema.

Abbiamo visto che il sistema può essere influenzato da forze esterne ed interne; se consideriamo un polo ed analizziamo i due momenti delle forze totali abbiamo che  $\vec{M}^{est} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{est}$  ed analogamente

$\vec{M}^{int} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{int}$ . Il fatto che le forze interne siano uguali e contrarie fa sì che abbiano la medesima

direttrice e quindi il loro momento totale è nullo.

Il momento angolare del sistema è dato da  $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$  e la sua derivata rispetto al tempo è

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$  (ricordando sempre le regole di derivazione dei vettori). Ricordando

che  $m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$  e che  $\vec{M}^{int} = 0$  otteniamo la seguente relazione  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{est} - \vec{v}_O \times m\vec{v}_{CM}$ .

Nel caso di un polo fisso o coincidente con il centro di massa otteniamo il **teorema del momento angolare**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{est}$$

cioè che **il momento angolare, in questi casi, dipende solo dai momenti delle forze esterne.**

Ne va da se che se il momento delle forze esterne è nullo allora  $\vec{L} = \text{costante}$  ed abbiamo una conservazione del momento angolare.

## Sistema del centro di massa

Possiamo ora considerare il caso in cui si utilizzi il centro di massa come origine del sistema di riferimento. Quello che avviene è che gli assi non variano la direzione ed utilizzando le regole viste nel capitolo dei moti relativi senza i termini riguardante la rotazione otteniamo che  $\vec{r}_{CM} = 0$  e che  $\vec{v}_{CM} = 0$  e quindi anche la quantità di moto totale calcolata rispetto al centro di massa è nulla; inoltre essendo anche  $\vec{a}_{CM} = 0$  anche il momento risultante è uguale al solo contributo delle forze esterne "vere" e non ha termini "apparenti" dovuti alle forze d'inerzia.

## Teoremi di Konig

Ora non ci rimane altro che legare il sistema di riferimento inerziale con il sistema del centro di massa. Ci vengono in aiuto per questo due teoremi che analizzano il comportamento del momento angolare il primo e dell'energia cinetica il secondo. In sostanza il punto di partenza è che per il moto relativo del sistema del centro di massa abbiamo che per ogni punto  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_{CM}$  e per la velocità  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_{CM}$

### Primo teorema di Konig

Dall'espressione  $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$  e sostituendo ne risulta che

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_{CM}$$

ovvero **il momento angolare di un sistema è la somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa e del momento angolare riferito ad esso.**

### Secondo teorema di Konig

Analogamente per l'energia cinetica otteniamo, utilizzando gli stessi concetti che

$$E_k = E_{k,1} + E_{k,CM}$$

ovvero **l'energia cinetica di un sistema è la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa e di quella rispetto ad esso**

## Energia cinetica

Come abbiamo visto in precedenza all'inizio del modulo l'energia cinetica è data dalla somma delle energie cinetiche dei punti costituenti il sistema.

Sappiamo però che l'energia cinetica è legata al lavoro tramite la relazione  $W = \Delta E_k$  ma nel caso di più punti materiali il lavoro viene fatto dalle forze esterne ed anche da quelle interne se vi è una variazione delle posizioni reciproche dei corpi e quindi l'espressione generale diventa  $W^{est} + W^{int} = \Delta E_k$  dove  $\Delta E_k$  è l'energia cinetica totale.

Vale anche per il sistema di punti che, nel caso le forze interne e le forze esterne siano conservative si ha una conservazione dell'energia cinetica totale con  $W = \Delta(E_k + E_p) = \Delta E_M = \text{costante}$ .

Anche in questo caso se una delle due risultanti delle esterne od interne non è conservativa il lavoro è espresso dall'espressione  $W_{nc} = \Delta E_m$ .

## Urti

Se due corpi interagiscono per un intervallo di tempo trascurabile rispetto al tempo durante quale si analizza il sistema possiamo parlare di **urto**. Il fatto che il tempo di interazione sia molto breve è fondamentale per il fatto che altrimenti ci sarebbe da considerare anche la forza in gioco durante l'urto e quindi un contributo di un impulso non trascurabile.

Non essendoci forze esterne che agiscono durante l'urto possiamo parlare di **conservazione della quantità di moto del sistema**

### Urti completamente anelastici

Nell'urto **completamente anelastico** i due corpi proseguono insieme nel loro moto. Si può dire allora studiando la quantità di moto che si conserva che  $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}$  in quanto il centro di massa ha la stessa posizione dei corpi uniti.

Anche l'energia cinetica del sistema vale  $\Delta E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 - (\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2)$  e possiamo notare che l'energia cinetica dopo l'urto è minore di quella prima dello stesso. L'energia "persa" è stata spesa per unificare i corpi all'atto dell'urto.

### Urti elastici

Un urto si dice **elastico** quando l'energia cinetica viene conservata dopo l'urto ed i due corpi proseguono immutati il loro moto e cioè

$$\frac{1}{2}m_1v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,f}^2$$

In generale in un urto una parte di quantità di moto viene scambiata e possiamo chiamare **coefficiente di restituzione** il valore

$$e = -\frac{P_{1,finale}}{P_{1,iniziale}} = -\frac{v_{1,finale}}{v_{1,iniziale}} = -\frac{P_{2,finale}}{P_{2,iniziale}} = -\frac{v_{2,finale}}{v_{2,iniziale}}$$

e vale anche

$$E_{k,finale} = e^2 E_{k,iniziale}$$

Il valore di  $e$  varia da 0 (urto completamente anelastico) a 1 (urto elastico) e nel caso intermedio l'urto si dice **anelastico** che è il caso più comune.

# Gravitazione

---

## Un po' di storia

Quando nel 1687 Newton pubblica i "Principia" e decreta la nascita della teoria della gravitazione chiude una disputa che nasce con Aristotele (384-322 a.C.) e la sua visione della Terra al centro dell'universo e si trascina nei secoli attraverso la visione geocentrica di Tolomeo (140 a.C.), eliocentrica di Copernico (1473-1543) e le tre leggi di Keplero (1571-1630) si pongono le basi per la soluzione newtoniana.

Le leggi di Keplero sono le seguenti:

### Prima Legge di Keplero

i pianeti girano intorno al sole formando orbite ellittiche e il sole occupa uno dei due fuochi. Il pianeta girando intorno al sole si troverà in un punto più vicino al sole detto PERIELIO, in un punto più lontano detto afelio

### Seconda Legge di Keplero

La velocità areale con cui il raggio vettore spazza l'orbita è costante

### Terza Legge di Keplero

Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita ovvero  $T^2 = kr^3$

Keplero ci da una descrizione che descrive il moto ma non le cause che lo provocano. A risolvere questo problema ci pensa Newton che comprende come le stesse leggi che regolano la caduta della celeberrima mela sono le stesse che regolano il moto dei corpi celesti. In un colpo solo Newton trova una legge di validità universale che ancora oggi, a basse velocità, è ancora perfettamente valida.

## La Gravitazione Universale

Quello che si è detto nella dinamica del punto riguardo la costanza del momento angolare in un campo di forze centrali è fondamentale: una forza che permetta ad un corpo di muoversi su di una traiettoria circolare con velocità costante deve essere *solo* centripeta e quindi diretta verso il centro di curvatura. Quindi avremo che

$$F = ma = m\omega^2 r = mr \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2$$

Ora utilizziamo la terza legge di Keplero ed otteniamo che la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza infatti

$$F = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}$$

Se consideriamo due pianeti e che per la terza legge di Newton la forza esercitata dal primo sul secondo provoca una forza di intensità uguale in modulo e di verso contrario abbiamo che  $\frac{4\pi^2 m_1}{k_1 r_1^2} = \frac{4\pi^2 m_2}{k_2 r_2^2}$ ; da ciò risulta

$m_1 k_2 = m_2 k_1$  e definendo come  $G = \frac{4\pi^2}{m_1 k_2} = \frac{4\pi^2}{m_2 k_1}$  concludiamo che

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

e vettorialmente

$$\vec{F}_{1,2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1,2}$$


---

È questo infine il cuore dell'ipotesi di Newton. La determinazione diretta di  $G$  che è una costante universale caratteristica dell'interazione gravitazionale è dovuta a Cavendish nel 1798 e vale  $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$

## Il campo gravitazionale

La formula della gravitazione universale permette di isolare il contributo che deriva da una delle due masse nel senso che la possiamo scrivere come

$$\vec{F}_{1,2} = \left(-G \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_{1,2}\right) m_2 = m_2 \vec{G}_1 \text{ con}$$

$$\vec{G}_1 = -G \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_{1,2}$$

Il vettore  $\vec{G}$  viene chiamato **campo gravitazionale** e possiamo dire che una massa modifica lo spazio circostante. Corpi che entrano in questa regione risentono dell'influenza della massa generatrice. Una delle prime osservazioni di un campo gravitazionale fu la lastra fotografica scattata da Eddington nel 1919 alla ricerca di una conferma della teoria della relatività generale di Einstein. Il fatto che la massa generi una effettiva modifica geometrica del continuo spazio-temporale è argomento della relatività generale.

## Lavoro della forza gravitazionale

Calcoliamo il lavoro di una forza gravitazionale  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u} d\vec{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\Delta E_p$

Otteniamo l'espressione dell'**energia potenziale gravitazionale**

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

Questa espressione, se noi prendiamo come convenzione che all'infinito  $E_p = 0$  e  $F = 0$ , notiamo che avvicinandosi ad una massa che genera un campo gravitazionale il lavoro è positivo e quindi si acquista energia cinetica e di conseguenza velocità.

Anche in questo caso isoliamo il contributo di una delle due masse ed otteniamo  $V = -G \frac{m}{r}$  e di conseguenza

$$\vec{G} = -\text{grad}V = -\nabla V$$

come ci si doveva aspettare in presenza di un campo conservativo.

# Dinamica del corpo rigido

## Definizione di corpo rigido

Un sistema di punti che mantengano la distanza reciproca viene chiamato **corpo rigido**; ovviamente questa è sempre una semplificazione per permetterci di trattare alcune caratteristiche del moto di un corpo.

Non variando le distanze tra i punti la risultante delle forze interne al sistema sono nulle e quindi la variazione dell'energia cinetica durante il moto è dovuta solo alle forze esterne. Abbiamo quindi che

$$\vec{R} = m\vec{a}_m, \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, W = \Delta E_k$$

Possiamo scomporre il moto di un corpo rigido in due tipi di moto, uno traslatorio ed uno rotatorio. La traslazione è legata alla velocità  $\vec{v}_{CM}$  del centro di massa e la rotazione alla velocità angolare  $\vec{\omega}$ .

## Centro di massa di un corpo rigido

Anche per il centro di massa riprendiamo i concetti visti per l'insieme di punti ma, considerando la continuità di un corpo rigido le sommatorie vengono sostituite da integrali e quindi

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m_i} \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho dV}{m} \text{ considerando che } m = \rho V$$

## Momenti

Consideriamo un asse di rotazione: i punti percorrono durante la rotazione una traiettoria circolare con velocità  $v_i = \omega R_i$ . La proiezione del momento angolare sull'asse di rotazione risulta così  $L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega$ .

## Momento angolare

La somma dei momenti angolari è data da

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \left( \sum_i m_i R_i^2 \right) \omega = I_z \omega$$

La quantità  $I_z$  è il **momento d'inerzia** rispetto all'asse di rotazione.

Quello che possiamo notare è che la componente del momento angolare lungo l'asse di rotazione dipende dalla forma del corpo, cioè dalla posizione dei singoli punti rispetto all'asse di rotazione ed un coefficiente che è proprio di ogni corpo.

Nel caso in cui  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$  ovvero quando l'asse di simmetria coincide con l'asse di rotazione allora

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}, L = L_z, L_{\perp} = 0$$

Per questo caso particolare abbiamo anche che  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \vec{\omega}) = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \alpha$  e quindi

$$\vec{M} = I_z \vec{\alpha}$$

Possiamo fare un paragone con la nota formula  $\vec{F} = m\vec{a}$  e possiamo notare che, mentre la massa inerziale è la misura dell'opposizione del corpo alla modifica del suo stato di moto, il momento d'inerzia è l'opposizione del corpo allo stato di rotazione. La differenza fondamentale è che mentre la massa è una quantità definita del corpo, il momento d'inerzia dipende dalla scelta dell'asse di rotazione.

## Momento d'inerzia

Abbiamo detto che il *momento d'inerzia dipende dalla forma del corpo* e dalla posizione dell'asse di rotazione. Il calcolo viene effettuato dalla seguente formula dove  $I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV$  e quindi il momento d'inerzia è la somma di tutti i momenti d'inerzia rispetto al medesimo asse.

Solo per un esempio calcoliamo il momento d'inerzia di un'asta sottile omogenea. Detto  $S$  la sezione dell'asta,  $d$  la lunghezza dell'asta e  $dx$  la distanza dal centro con  $dm = \rho S dx$  abbiamo che

$$I_z = \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dm = \rho S \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dx = \frac{1}{12} \rho S d^3 = \frac{1}{12} m d^2$$

## Energia cinetica

Calcoliamo ora l'energia cinetica del corpo rigido che risulta uguale a

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2$$

e vale sempre che il lavoro è uguale alla variazione di energia cinetica ovvero  $W = \Delta E_k$

## Teorema di Huygens-Steiner

Quando l'asse di rotazione non passa dal centro di massa del corpo il calcolo del momento d'inerzia potrebbe essere complicato in quanto vengono meno le condizioni di simmetria. Ci viene in aiuto il teorema di Huygens-Steiner che ci dice che il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse che si trova ad una distanza  $d$  dal centro di massa è dato da

$$I = I_c + m d^2$$

## Pendolo composto

Chiamiamo pendolo composto un corpo rigido che oscilla attorno ad un asse orizzontale non passante per il centro di massa. Il momento della forza peso è dato da  $M = -mgh \sin \theta = I_z \alpha = I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2}$

Ne segue che  $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \sin \theta = 0$  che è l'equazione del moto armonico. Come sappiamo la soluzione di questa equazione differenziale, per piccoli angoli ovvero con l'approssimazione  $\sin \theta \approx \theta$ , è data da  $\theta = \theta_0 \sin \omega t + \phi$

La pulsazione è  $\omega = \sqrt{mgh/I_z}$  e se poniamo  $l = I_z/mh$ , dove  $l$  è la *lunghezza ridotta del pendolo composto* ovvero la lunghezza che avrebbe un pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo. Ricordiamo anche che  $I_z = I_c + m h^2$  dato dal teorema di Huygens-Steiner visto che il corpo rigido oscilla attorno ad un asse che non coincide con il centro di massa.

## Moto di puro rotolamento

Un altro caso di moto di un corpo rigido è il tipico moto di una ruota ovvero un moto di puro rotolamento. In questo caso l'asse di rotazione non è un asse materiale ma geometrico, ovvero si sposta insieme al corpo rigido. Il corpo ruota così attorno al punto di contatto con il piano che rimane fermo e quindi è sottoposto ad una forza di attrito statico.

# Rotazione

---

La descrizione del moto rotatorio è per certi versi analoga a quella del moto traslatorio, grazie all'introduzione di opportune grandezze fisiche.

## Angolo, velocità angolare, accelerazione angolare

Considerando un punto in moto circolare, possiamo definire la sua posizione per mezzo del raggio della circonferenza su cui si muove e dell'angolo tra il punto e l'asse  $x$ . Stiamo definendo la posizione in coordinate polari:

$$\vec{s}(r, \theta) = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}$$

Ora possiamo considerare l'andamento nel tempo di  $\theta$ , derivandolo rispetto al tempo (velocità angolare):

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Si ponga l'attenzione sul fatto che  $\theta$  è uno scalare, ma si considera la sua derivata un vettore! Questo viene fatto per convenzione, considerando angoli piccoli e ponendo tale derivata vettoriale o scalare a seconda del contesto.

Qual è la relazione tra velocità angolare e velocità lineare? Vediamo come si comportano i moduli dei due vettori:

$$\Delta s = r \Delta \theta \implies \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \implies \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \implies v(t) = r\omega(t)$$

Queste formule sono valide **solo** se l'angolo di rotazione è espresso in radianti

Bene, manca solo la definizione di accelerazione angolare, del tutto analoga all'accelerazione lineare:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

Immediata è la relazione tra le due accelerazioni:

$$v(t) = r\omega(t) \implies \frac{dv(t)}{dt} = r \frac{d\omega(t)}{dt} \implies a(t) = r\alpha(t)$$

## Momento angolare

Il momento angolare (o momento della quantità di moto) è l'analogo della quantità di moto, e come esso si conserva.

Il momento angolare si definisce per mezzo di un prodotto vettoriale:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

## Momento della forza

Il momento della forza è l'analogo della forza, appunto, e si definisce così:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Qual è la relazione tra i due momenti appena definiti? Eccola:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

## Momento d'inerzia

E la massa? Anche questa ha un analogo, che indica grossomodo 'il grado di resistenza opposta dal corpo ai cambiamenti del moto rotatorio'. Definiamo il momento di inerzia:

$$I = \int_V r^2 dm$$

L'uso del momento d'inerzia è il seguente:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

E anche da queste due equazioni si dimostra (molto più agevolmente) la relazione tra il momento angolare e il

momento della forza:  $\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}$

---

---

# Termodinamica

---

## Definizioni della termodinamica

---

La termodinamica nasce nell'Ottocento per studiare la trasformazione del calore in lavoro meccanico (macchine termiche) e le trasformazioni inverse dal lavoro in calore (macchine frigorifere e pompe di calore). Le definizioni e le conseguenze della termodinamica in realtà servono a descrivere molti fenomeni fisici di sistemi complessi di molte particelle non descrivibili con le leggi della meccanica elementare.

Solo a metà dell'Ottocento si è riconosciuto che il calore è una forma di energia che può essere trasformata nelle altre forme. Prima di allora si credeva che il calore fosse una specie di fluido indistruttibile e si interpretava il processo di riscaldamento di un corpo come il passaggio di tale fluido da un corpo ad un altro. L'interpretazione microscopica del calore e della temperatura richiede una conoscenza delle proprietà statistiche del mondo microscopico. Solo con questa visione la termodinamica diventa un ramo speciale della meccanica che va sotto il nome meccanica statistica. La meccanica statistica permette di interpretare in maniera molto soddisfacente le leggi della termodinamica, ma dal punto di vista formale la costruzione matematica della termodinamica può farne a meno.

Il punto di vista della termodinamica pura è infatti differente: i principi fondamentali sono assunti come postulati e si traggono le conseguenze senza entrare nel meccanismo microscopico. Questo modo di procedere permette di studiare i fenomeni termodinamici in maniera precisa, indipendente dalle ipotesi di partenza. Vi è da dire che la non conoscenza del meccanismo microscopico può risultare insoddisfacente per interpretare i risultati, quindi spesso, seppure da un punto di vista propriamente termodinamico non è necessario, uno sguardo al punto di vista microscopico fornisce un chiarimento anche se l'analisi può risultare grossolana e parziale.

I sistemi fisici che si incontrano in natura sono fatti da un numero elevatissimo di atomi: tanto per avere un'idea in un granello medio di sabbia sono contenuti  $10^{18}$  atomi. Studiare sistemi così complessi dal punto di vista meccanico sarebbe praticamente impossibile dal punto di vista del calcolo sia che lo stato di aggregazione sia fluido (gassoso o liquido) o solido. Lo stato di un sistema di  $N$  particelle è definito solo se sono note, in un certo istante, la posizione e la velocità di ciascun punto materiale. Questo vuol dire conoscere  $6N$  variabili: o come viene spesso detto  $6N$  gradi di libertà del sistema meccanico.

In termodinamica si introducono delle variabili che caratterizzano lo stato del sistema che rappresentano a livello microscopico della quantità medie di grandezze meccaniche che hanno un ben preciso significato fisico. Le variabili termodinamiche possono essere intensive se sono indipendenti dalla quantità di materia (es. pressione, densità, temperatura) o estensive che sono proporzionali alla quantità di materia (es. massa, volume, numero di moli). Le variabili termodinamiche di un sistema possono essere definite solo quando il sistema è in equilibrio termodinamico (la definizione sarà data nel seguito).

Un sistema macroscopico in equilibrio termodinamico è descritto da un numero limitato di grandezze termodinamiche, che lo identificano in maniera univoca. La spiegazione di tale semplificazione, in apparente contraddizione con il numero enorme di variabili interne del sistema complesso, dipende da due condizioni contemporaneamente necessarie che le misure macroscopiche siano estremamente lente rispetto alla scala atomica e che le dimensioni atomiche siano così piccole che la materia appare continua.

La termodinamica studia sistemi molto complessi in cui intervengono proprietà meccaniche, elettriche, magnetiche e termiche. Ma per semplicità qui focalizzeremo l'attenzione sulle sole proprietà termiche. Inoltre studieremo dei sistemi semplici, che sono omogenei dal punto di vista macroscopico, isotropi, non carichi, in cui il volume sia tale che si possano trascurare effetti di superficie. Inoltre trascuriamo campi elettrici, magnetici e gravitazionali.

Passiamo ad elencare senza un ordine preciso alcune delle variabili spesso usate in termodinamica.

---

## Volume

Il **volume** è la misura dello spazio occupato da un corpo. L'unità adottata dal Sistema Internazionale è il metro cubo, simbolo  $m^3$ .

Il **volume** di un oggetto solido è un valore numerico utilizzato per descrivere a 3 dimensioni quanto spazio occupa il corpo. Ad oggetti ad una dimensione (come una linea) o a 2 dimensioni (come un quadrato) si assegna per convenzione volume 0 in uno spazio tridimensionale.

## Mole

Un'altra variabile estensiva è il numero di molecole per ogni tipo di componente chimico puro che costituiscono il sistema. Per evitare di usare una unità troppo grande si normalizza tale numero al numero di Avogadro tale rapporto viene chiamato numero di moli e viene in genere indicato con  $n$ . Un modo equivalente per definire il numero di moli è di usare come unità di misura l'isotopo  $^{12}C$  del carbonio: 12 g di tale isotopo sono una mole, e riferire ogni altro isotopo di qualsiasi elemento a tale unità di massa di ogni altro elemento in natura definire una massa atomica.

Consideriamo ad esempio:

Consideriamo una massa  $m = 1 \text{ kg}$  di Ferro. Poiché la massa atomica del ferro vale  $m.a. = 57 \text{ g}$  il numero di moli contenute in  $1 \text{ kg}$ :

$$n = \frac{m}{m.a.} = 17.5 \text{ moli}$$

## Pressione

Consideriamo una sostanza omogenea contenuta in un cilindro indeformabile. La sostanza può essere un solido come un fluido, sia  $h$  l'altezza del cilindro ed  $S$  la superficie interna. Se la densità della sostanza vale  $\rho$  ovviamente la massa totale sarà  $m = \rho h S$ .

Se esercitiamo una forza  $\vec{F}$  sulla sua faccia superiore, tale forza si trasmetterà sulla faccia inferiore su cui sentiremo una forza per unità di superficie pari a:

$$P = \frac{|\vec{F}|}{S} + \frac{mg}{S} = \frac{|\vec{F}|}{S} + \rho gh$$

Abbiamo come è naturale maggiorato la forza esercitata sulla faccia inferiore con la forza peso del solido, ma se l'altezza  $h$  è piccola ( $\rho gh \ll |\vec{F}|/S$ ), l'ultimo termine può essere reso trascurabile. In tale caso possiamo scrivere semplicemente che:

$$P = \frac{|\vec{F}|}{S}$$

Se la sostanza è incompressibile, cioè se il volume totale non cambia o se si vuole la densità, si può misurare che sulla parete laterale viene esercitata una forza per unità di superficie esattamente eguale a quella della parete inferiore. Se invece il solido è compressibile la forza esercitata sulla parete inferiore sarà superiore a quella sulla parete laterale, cioè la forza conserva in parte il suo carattere vettoriale. La questione è puramente accademica in quanto basterà immergere il solido in un fluido incompressibile (liquido) per avere che la forza per unità di superficie è eguale in tutte le direzioni (in questo caso però avrò non più una sostanza omogenea). La forza per unità di superficie si chiama pressione e nel sistema internazionale si misura in  $N/m^2$  detto Pascal il cui simbolo abbreviato è  $Pa$ .

La cosa è ancora più semplice per un fluido, immaginiamo di esercitare la forza sulla faccia superiore del cilindro contenente il fluido. La prima osservazione è che a parità di forza esercitata se il fluido è un gas si comprimerà molto (diminuisce grandemente il volume totale) mentre se è un liquido la variazione di volume sarà trascurabile come un

solido. Se trascuro gli effetti della gravità anche in questo caso ( $\rho ghS \ll |\vec{F}|$ ), la forza per unità di superficie perde in qualsiasi caso il carattere di direzionalità, troverò infatti che la stessa forza per unità di superficie viene esercitata sia sulla parete di fondo che sulle pareti esterne del recipiente. Se la forma del recipiente cambia non cambia il risultato. Quindi nel caso dei fluidi la forza per unità di superficie (la pressione) ha un carattere scalare eventualmente dipendente dalla coordinata spaziale, ma non dalla direzione, quindi a tutti gli effetti è uno scalare. L'aver trascurato la forza di gravità è una semplificazione spesso non lecita, ad esempio nella atmosfera terrestre la forza di gravità non è affatto trascurabile ed è essa responsabile della pressione media della aria a livello del mare. Risulta naturale, anche se passato di moda, misurare la pressione assumendo come unitaria la pressione dell'aria al livello del mare. Tale unità di misura si chiama **Atmosfera** o **Bar**. La conversione con il sistema internazionale è:

$$1 \text{ Atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Gli strumenti che misurano la pressione dei fluidi si chiamano manometri o barometri. Sono diffusi molti strumenti in grado di misurare con precisione ed accuratezza la pressione dei fluidi.

La pressione di un sistema termodinamico è una variabile termodinamica intensiva. Cioè se ho due sistemi termodinamici alla stessa pressione e li unisco insieme il sistema globale avrà una pressione eguale alla pressione dei due.

Da un punto di vista microscopico la pressione di un fluido è determinata dagli urti elastici che le molecole del fluido esercitano sulle pareti del recipiente. Tali urti sono tanto più frequenti quanto maggiore è la densità del fluido e la energia cinetica media delle particelle.

## Temperatura

La temperatura è un concetto molto antico, già dai tempi antichi si era provato a descriverla in termini scientifici, ma fu solo grazie all'invenzione del termometro che si poté fare le prime stime numeriche sul suo valore.

Esistono molte proprietà fisiche dei corpi che variano con tale quantità oltre a quelle associate con la sensibilità fisiologica del corpo umano. Una delle più semplici è legata alla dilatazione dei liquidi: i termometri a mercurio in cui un liquido (il mercurio) è contenuto in un recipiente capillare di vetro (che subisce una dilatazione trascurabile con la temperatura) è un esempio di un termometro cioè di un misuratore di temperatura. Molte proprietà fisiche (elettriche, magnetiche etc) sono influenzate dalla temperatura per cui abbiamo un notevole numero di termometri.

Affrontiamo il problema della scala delle temperature. La scala empirica comune nei paesi occidentali non anglosassoni, è la scala Celsius che è basata sulle proprietà dell'acqua al livello del mare. Tale scala assume come  $0^\circ \text{C}$  la temperatura di solidificazione dell'acqua a pressione atmosferica, e come  $100^\circ \text{C}$  la temperatura di ebollizione dell'acqua nelle stesse condizioni di pressione. Esistono altre scale empiriche come quella Fahrenheit che considera come circa  $100^\circ \text{F}$  la temperatura del corpo umano e come  $0^\circ \text{F}$  la temperatura minima della miscela ghiaccio, acqua, cloruro di ammonio e sale: una miscela frigorifera. Il passaggio dalle due scale è dato da:

$$T_F = 32 + \frac{9}{5}T_C$$

In realtà a tali scale empiriche si preferisce la scala Kelvin che assume come zero della temperatura la minima temperatura per un sistema termodinamico: lo zero assoluto e come intervallo tra gradi quello della scala Celsius. Poiché lo zero assoluto è ad una temperatura di circa  $-273.15^\circ \text{C}$  la conversione da gradi *Celsius* a gradi **Kelvin** è:

$$T_K = 273.15 + T_C$$

La temperatura di un gas rarefatto è la misura alla energia cinetica media delle molecole che compongono il gas. Si mostra facilmente che se ho molecole diverse gli urti tendono a distribuire uniformemente tale energia cinetica media: per cui molecole diverse hanno energia cinetica in media eguale. Se le molecole sono monoatomiche questa è la unica forma di energia microscopica. Ma se le molecole sono biatomiche o più complesse bisogna tenere conto di ulteriori gradi di libertà interni al sistema microscopico come quelli rotazionali e vibrazionali (tipo oscillatore

armonico). Se poi ho a che fare con fluidi densi la temperatura è connessa pure alla energia potenziale dovuta alle forze interne. Nel caso estremo di un solido ogni atomo che lo compone si comporta come un oscillatore armonico con 6 gradi di libertà (3 cinetici e 3 dovuti alla energia potenziale elastica).

Il concetto di temperatura non è legato in realtà alla materia, ma possiamo definire anche la temperatura del vuoto mediante la cosiddetta radiazione di corpo nero.

## Equilibrio Termodinamico

Si ha l'equilibrio termodinamico di un sistema quando si verifica contemporaneamente l'equilibrio chimico, meccanico e termico. L'equilibrio chimico si ha se non si hanno più reazioni chimiche e la quantità di materia nelle varie parti non varia più nel tempo. L'equilibrio meccanico si ha se la pressione e il volume non cambiano nel tempo. Infine l'equilibrio termico si ha se la temperatura cessa di variare nel tempo.

Equilibrio termodinamico di un corpo implica che pressione, densità e temperatura siano uniforme nel suo interno.

Consideriamo ad esempio un fiume che è in equilibrio termico con l'ambiente, in ogni punto la temperatura non varia nel tempo, ma che a causa di dell'ingresso di corrente fredda dalla fonte vi è una forte variazione spaziale della temperatura stessa.

## Principio zero della Termodinamica

Il principio zero della termodinamica è un enunciato circa i corpi a contatto in equilibrio termico ed è alla base del concetto di temperatura. L'enunciato di tale principio è che se due sistemi termodinamici sono in equilibrio termico con un terzo, sono in equilibrio termodinamico tra di loro.

In altre parole l'equilibrio termodinamico è una proprietà transitiva.

## Lavoro

Il lavoro è in realtà un concetto che è ben definito dalla meccanica. In termodinamica fisica si definisce positivo il lavoro che il sistema compie sui corpi esterni, mentre è negativo quello che i corpi esterni compiono sul sistema. Il caso più semplice da descrivere è quello di un cilindro con un pistone mobile, come in figura. Il sistema in questo caso è un gas in equilibrio termodinamico. Sia  $p$  la pressione che il gas esercita sulle pareti del recipiente ed in particolare sul pistone. Quindi se  $S$  è la superficie del cilindro  $pS$  sarà la forza che il gas esercita sul pistone. Se il pistone si sposta di un tratto infinitesimo  $dz$ , viene compiuto un lavoro, che solleva il peso (corpo esterno) e viene compiuto un lavoro:

$$dW = pSdz$$

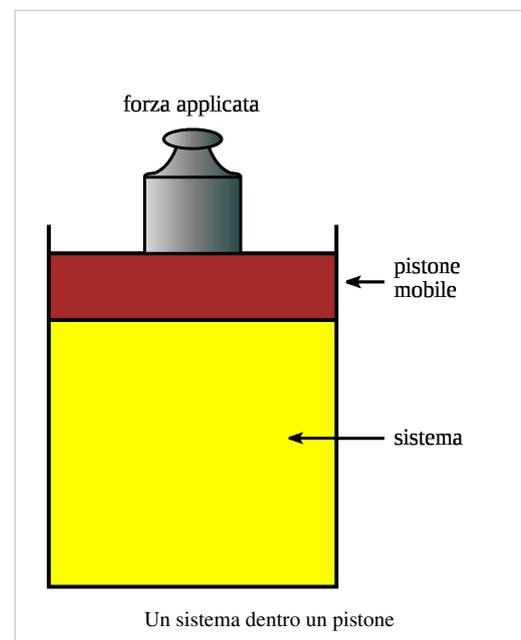
Il questo caso infatti lo spostamento  $dz$  è parallelo alla forza. Notiamo che in realtà:

$$dV = Sdz$$

Non è altro che l'aumento di volume.

Quindi si può scrivere.

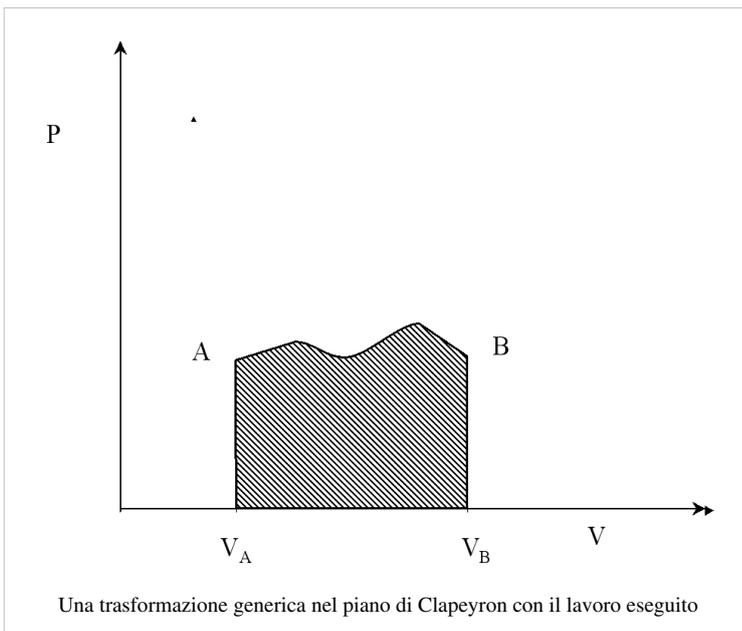
$$dW = pdV$$



Il pistone mobile può spostarsi verso l'esterno aumentando il volume del gas: in questo caso si ha una espansione (lavoro positivo). In realtà in un processo di questo genere le forze interne di pressione producono lavoro che facilmente siamo in grado di quantizzare. Il procedimento inverso di riduzione del volume va sotto il nome di compressione. Perché una trasformazione di questo tipo sia reversibile, su tale concetto torneremo nel seguito, non occorre solo che avvenga per successivi stati equilibrio. Ma occorre che all'interno del gas la pressione come le altre variabili termodinamiche non vari (spazialmente), e inoltre che il moto del pistone lungo la parete del cilindro si effettui senza attrito. Infatti non conosciamo nessun processo in cui l'energia meccanica dissipata per attrito possa essere restituita sotto forma di energia meccanica macroscopica, quindi rendendo possibile la reversibilità della trasformazione. Inoltre per avere una trasformazione reversibile occorre che la forza esterna sia istante per istante eguale a quella interna. Quindi se abbiamo un cilindro contenente un gas a pressione diversa da quella dell'ambiente esterno (ad esempio la pressione atmosferica) dovremo bilanciare istante per istante la forza interna con la forza esterna per avere una trasformazione reversibile.

Tale equazione è valida in generale qualunque sia la forma del recipiente<sup>[1]</sup>.

Il lavoro fatto dalle forze interne è massimo quando la trasformazione è reversibile solo in tale caso la pressione del gas interno è eguale alla forza esterna agente sul pistone. Se la espansione avviene troppo rapidamente si crea una variazione di pressione nel cilindro che va dal valore massimo fino alla pressione esterna agente sul cilindro, la forza che agirà sulla superficie di base del cilindro non sarà quella della dovuta alla pressione di equilibrio, ma una forza minore che è pari alla pressione esterna per la superficie del pistone. Se facciamo avvenire la trasformazione per stati di equilibrio dallo stato iniziale  $A$  allo stato finale  $B$ , il lavoro finito della trasformazione si ottiene integrando l'equazione



$$W = \int_A^B P dV$$

Con l'integrale esteso a tutta la trasformazione.

Per il calcolo del lavoro nel caso dei fluidi omogenei risulta comodo utilizzare come variabili termodinamiche indipendenti la pressione ed il volume occupato dal fluido. La rappresentazione grafica di tali variabili viene detta Piano di Clapeyron. Consideriamo a titolo esemplificativo una trasformazione per stati di equilibrio termodinamico che vada dallo stato  $A$  allo stato finale  $B$ , come indicato nella figura.

La forma della curva dipende dal tipo di trasformazione considerata con questa

rappresentazione il lavoro eseguito dal sistema è dato dall'integrale

$$W = \int_{V_A}^{V_B} P dV$$

Dove i volumi  $V_A$  e  $V_B$  sono i volumi iniziali e finali degli stati. Questo lavoro viene rappresentato geometricamente dalla curva tratteggiata in figura: il lavoro è positivo se si va da  $A$  a  $B$ , mentre è negativo se vado da  $B$  ad  $A$ .

## Note

[1] E. Fermi, Termodinamica, Boringhieri 1982.

Argomento seguente: Calore

# Calore

<a href="#">◀ Modulo precedente</a> Definizioni delle grandezze della termodinamica	<a href="#">Torna a Fisica classica</a>	<a href="#">▶ Modulo successivo</a> Trasformazioni termodinamiche
---	---	---

Il **calore** ha un ruolo centrale in termodinamica e la sua definizione prescinde dalla meccanica.

Se due sistemi a temperatura diversa sono posti in contatto termico i loro stati si influenzano a vicenda fino a quando raggiungono uno stato caratterizzato da una temperatura di equilibrio intermedia tra le temperature di partenza. Si chiama calore la quantità di energia che passa da quello più caldo a quello più freddo fino a raggiungere l'equilibrio.

Che il calore fosse una forma di energia simile per tutto alle altre forme si è scoperto solo all'inizio dell'800. Fino alla fine del '700 si riteneva che il flusso di calore passasse dai corpi caldi a quelli freddi per mezzo di un fluido detto *calorico* che non aveva massa. Questa teoria spiegava in modo accettabile tutti i fenomeni termodinamici causati da differenze di temperature. Per questo motivo era stata stabilita un'unità di misura apposita per il calore, la **caloria**, definita come la quantità di calore necessaria a far aumentare di un grado un grammo di acqua allo stato liquido, e il suo multiplo kilocaloria (*kcal*). In alcuni campi come la scienza dell'alimentazione per esprimere l'apporto energetico di un alimento si usa la Caloria (notare la maiuscola sottointende la kilocaloria).

Ad incrinare la teoria del calorico fu soprattutto la possibilità di creare calore con l'*attrito*, ovvero produrre calore con un fenomeno di natura meccanica come lo sfregamento tra corpi. Il calore era quindi una forma di energia proprio come il lavoro.

Fu James Joule a stabilire, tramite alcuni importanti esperimenti, la relazione esatta tra la caloria (unità di misura del calore fino ad allora conosciuta) con il joule (unità di misura legata al lavoro e all'energia) che va sotto il nome di **equivalente meccanico della caloria** ed è data dalla trasformazione di lavoro meccanico in attrito e quindi calore.

La relazione è:

$$1 \text{ cal} = 4,185 \text{ J}$$

Per quanto riguarda la convenzione del segno da attribuire al calore scambiato si considera positivo il calore assorbito dal sistema, che provoca quindi, in assenza di trasformazioni di stato, un aumento della temperatura. Mentre viene definito negativo il calore ceduto dal sistema all'ambiente circostante. Ritornando ai due sistemi a temperatura diversa messi a contatto termico il sistema a temperatura più alta  $T_2$  perde calore  $Q_2$  (negativo) che viene assorbito  $Q_1$  (positivo) dal sistema a temperatura inferiore  $T_1$  in maniera tale che:

$$Q_1 = -Q_2$$

## Calore specifico

Si chiama capacità termica di un corpo la quantità di calore che è necessario fornire al corpo stesso per aumentare la temperatura di 1 grado.

La capacità termica è una grandezza estensiva che dipende dalla quantità di materia, si preferisce spesso definire il calore specifico che rappresenta il calore che occorre scambiare con l'unità di massa per fare aumentare la temperatura di 1 grado (K o C): il calore specifico è una grandezza intensiva, tornando al nostro esempio dell'acqua il calore specifico vale  $4185 \text{ J}/(\text{kgK})$ . Oltre al calore specifico per unità di massa si considera anche il calore specifico per unità di mole, poiché  $18 \text{ g}$  di acqua sono una mole il calore specifico molare dell'acqua vale  $75 \text{ J}/(\text{moleK})$ . Vedremo che per i solidi e i gas il calore specifico molare segue delle leggi universali

abbastanza indipendenti dalle sostanze considerate.

Se è nota la capacità termica di due corpi ( $C_1$ ,  $C_2$ ) che si scambiano calore a partire dalle rispettive temperature ( $T_1$  più bassa  $T_2$  più alta) fino ad arrivare ad una temperatura intermedia  $T_e$ . Può essere facilmente calcolato il calore scambiato:

$$Q = C_1(T_e - T_1) = C_2(T_2 - T_e)$$

Normalmente mentre la temperatura è facilmente misurabile la capacità termica dei corpi è non nota da cui deriva la difficoltà di misurare il calore scambiato.

Definiamo come sorgente di calore un corpo con capacità termica praticamente infinita e quindi in grado di scambiare calore con un oggetto in cui venga in contatto termico senza variare la sua temperatura. Ad esempio il mare può essere considerato una sorgente di calore. Ma anche un oggetto di grandi dimensioni rispetto ad uno molto piccolo con cui viene a contatto. Useremo nel seguito molte volte le sorgenti di calore per semplificare lo studio delle trasformazioni termodinamiche. Se la sorgente di calore è lontana dalla idealità fornirà calore una volta in contatto con un oggetto a temperatura diversa, ma la sua temperatura subirà una variazione tanto maggiore quanto minore è la sua capacità termica.

Un esempio sul contatto tra due metalli chiarisce il concetto di temperatura di equilibrio.

## Transizioni di fase

Le transizioni di fase rappresentano nel caso del passaggio dalla fase solida, liquida e gassosa un modo semplice di misurare il calore scambiato. Vale quindi la pena di descriverle brevemente

Il diagramma di fase di un sistema generico ad un solo componente è mostrato nella figura.

Per determinare un sistema di questo tipo le variabili termodinamiche temperatura e pressione sono sufficienti. Lungo le linee di coesistenza di due fasi:

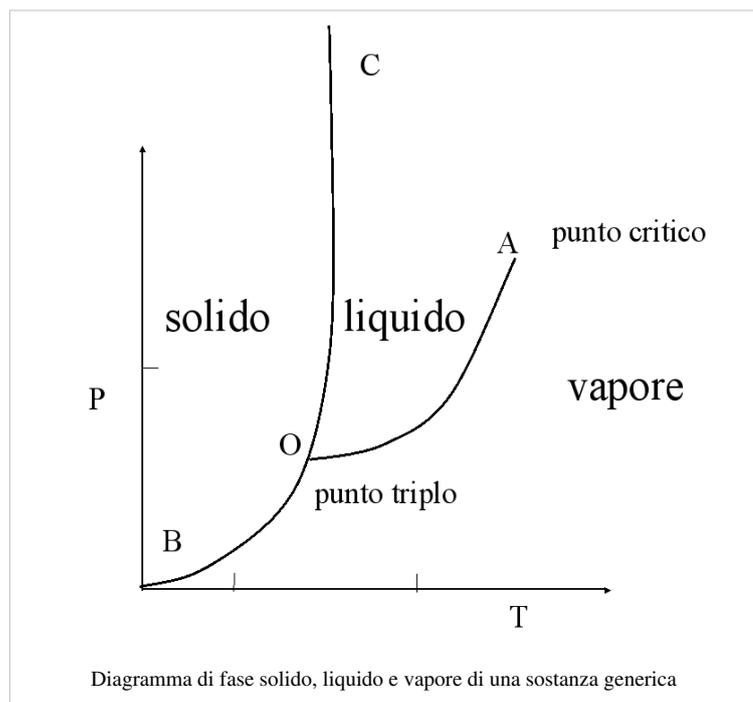
- solido-gas (BO): linea di sublimazione
- solido-liquido (OC): curva di fusione
- liquido-gas(OA): curva di vaporizzazione

Una sola variabile (la temperatura o la pressione) determina lo stato del sistema.

Esistono due punti (il punto triplo e quello

critico) che non dipendono da nessuna variabile di stato, ma solo dalla sostanza considerata. Nel punto triplo coesistono tutte e tre le fasi, mentre in quello critico scompare la distinzione tra liquido e gas.

Nel passaggio da una fase all'altra a pressione costante lungo una curva di coesistenza la temperatura non varia e si deve fornire al sistema una quantità di calore proporzionale alla quantità di sostanza che deve essere trasformata da una fase all'altra, questa quantità di calore per unità di massa viene chiamata calore latente. Ad esempio se a pressione atmosferica abbiamo una miscela di acqua e ghiaccio per trasformare un kg di ghiaccio in acqua dovremo fornire una quantità di calore pari a  $3,3 \cdot 10^5 \text{ J}$ . La misura del calore che viene fornito ad un sistema in cui coesistono due fasi può essere effettuata misurando la variazione della percentuale delle due fasi che compongono il sistema. Normalmente le due fasi sono ben distinguibili per varie proprietà macroscopicamente ben misurabili



dovute alla diversa densità.

Un esempio sul sistema ghiaccio-acqua mette in relazione calore e calore latente.

## Trasmissione del calore

I meccanismi con cui i sistemi possono scambiare il calore sono tre: la conduzione, la convezione e l'irraggiamento.

### Conduzione termica

La conduzione è tipica dei fluidi e dei solidi in contatto, tale meccanismo di scambio di calore è caratterizzato da una costante caratteristica detta conducibilità termica. Maggiore è tale costante più rapidamente viene raggiunto l'equilibrio termico. Il valore della conducibilità termica dipende fortemente dalla struttura microscopica della materia: nei solidi rappresenta il meccanismo più importante di scambio del calore. Nei gas rarefatti tale meccanismo di conduzione è spesso trascurabile. Nei liquidi tale meccanismo ha una importanza che dipende dallo stato dinamico del fluido stesso e quindi dalla geometria del contenitore: nei contenitori stretti in cui il fluido ha difficoltà di movimento la conduzione termica rappresenta il meccanismo di scambio del calore dominante.

L'equazione macroscopica che permette di quantificare la conduzione termica si ha in un cilindro di materiale uniforme di sezione  $S$  e lunghezza  $l$  che connette due sorgenti di calore a temperature rispettivamente  $T_1 < T_2$  in un tempo  $\Delta t$  la quantità di calore scambiato vale:

$$Q = k \frac{(T_2 - T_1) \cdot S \cdot \Delta t}{l}$$

La costante  $k$  viene appunto chiamata conducibilità termica. La Tabella seguente mostra come a temperatura ambiente il materiale più conduttore sia il diamante

Materiale	k, Conducibilità termica W/(m·K)
Diamante	900 - 2320
Argento	429
Rame	401
Oro	318
Alluminio	237
Piombo	35.3
Acciaio inossidabile	12.11 ~ 45.0
Sabbia	2.4
Ghiaccio	2
Cemento	1.7 ~ 0.29
Vetro	1.1
Acqua	0.6
Alcool ed oli	0.1 - 0.21
Gomma	0.16
Legno	0.04 - 0.4
Aria	0.025
Polistirolo	0.004

Più in generale definendo il vettore flusso di calore  $\vec{\phi}_q$ : come un vettore che ha le dimensioni del calore diviso un tempo e la sua superficie (rappresenta il calore che fluisce nell'unità di tempo nella superficie) e diretto secondo la normale all'elemento di superficie:

$$\vec{\phi}_q = -k \vec{\nabla} T$$

Dove  $\vec{\nabla} T$  è il gradiente di temperatura un vettore legato alla variazione spaziale della temperatura che in coordinate cartesiane ha componenti:

$$\vec{\nabla} T = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

I fluidi oltre al meccanismo di conduzione scambiano calore anche mediante la convezione cioè il movimento delle masse fluide e spesso questo fenomeno rappresenta il meccanismo dominante di scambio di calore.

## Convezione

La convezione nei termini più generali si riferisce al movimento di molecole dentro un fluido. La convezione è uno dei modi principali in cui oltre al calore viene trasferita materia. Nei fluidi calore trasferito mediante convezione avviene sia su scala microscopica a livello di moto Browniano delle singole particelle del fluido sia mediante avvezione (termine poco usato in italiano traduzione letterale di *advection* inglese) in tale fenomeno il calore (come la materia) è trasportata da correnti su larga scala nel fluido. In genere i due fenomeni rappresentano la convezione nel suo insieme.

La convezione può avvenire sia in maniera naturale che in maniera forzata. Un esempio comune di convezione naturale è dato dai movimenti delle masse di aria nell'atmosfera in cui gli strati bassi dell'atmosfera ricevono calore dalla terra, si scaldano e si dilatano diventano più leggeri degli strati sovrastanti che quindi rimpiazzano quelli sottostanti, creando quindi un moto circolare. In maniera forzata invece viene fatta fluire volutamente una corrente di fluido a temperatura diversa che quindi trasporta calore in maniera convettiva.

## Irraggiamento

Oggetti a temperatura diversa anche non in contatto tra di loro raggiungono l'equilibrio termodinamico attraverso un terzo meccanismo l'irraggiamento. Il fenomeno è dovuto allo scambio di radiazione elettromagnetica tra i due corpi, fino a quando si ha un equilibrio dinamico tra potenza elettromagnetica ceduta e ricevuta. Anche in questo caso il bilancio definitivo comporta che del calore si è spostato dalla sorgente a temperatura maggiore a quella a temperatura inferiore.

Le leggi dell'irraggiamento rappresentano delle tappe fondamentali nella fisica. Per spiegare i fenomeni dell'irraggiamento conviene introdurre un corpo ideale il corpo nero è un oggetto che irradia in maniera ideale.

Nel caso di un corpo nero la quantità di calore emessa per unità di superficie vale:  $\sigma T^4$  dove  $\sigma = 5.6 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  è la costante di Stefan - Boltzmann.

Nel caso di un corpo non ideali l'espressione precedente del calore emesso, va moltiplicata per emissività cioè una grandezza adimensionale che dipende sia dal materiale che dal grado di finitura della superficie. Vengono brevemente messi nella tabella seguente le emissività di alcuni materiali comuni tratto da: Emissivity of some common materials [1].

Materiale	Emissività
Corpo nero	1
Marmo bianco	0.95
Basalto	0.72
Ottone ossidato	0.6
Granito	0.45
Mercurio liquido	0.1
Foglio di alluminio	0.04

Va fatta una ulteriore precisazione per quanto riguarda il fenomeno opposto l'assorbimento delle onde elettromagnetiche, tale precisazione è dovuta a Kirchhoff una legge che prende nome da lui stesso, tale legge stabilisce che il coefficiente di emissività per tutti i corpi è uguale a quello di assorbibilità. Se non fosse così corpi a temperatura diversa potrebbero scambiare calore in maniera innaturale, violando il principio zero della termodinamica.

Argomento seguente: Trasformazioni della termodinamica

## Note

[1] [http://www.engineeringtoolbox.com/emissivity-coefficients-d\\_447.html](http://www.engineeringtoolbox.com/emissivity-coefficients-d_447.html)

# Trasformazioni termodinamiche

---

<a href="#">◀ Modulo precedente Calore</a>	<a href="#">↕ Torna a Fisica classica</a>	<a href="#">▶ Modulo successivo Gas ideali e reali</a>
--	---	--

Chiamiamo sistema termodinamico una porzione dell'universo che può essere costituita da una o più parti, ad esempio un fluido omogeneo contenuto in un recipiente, una miscela di gas contenuto in un recipiente, un solido omogeneo, un sistema non omogeneo, una automobile che consuma carburante ecc.

Si intende come ambiente il resto del mondo con cui il sistema interagisce scambiando materia, lavoro meccanico o calore.

Un sistema si dice aperto se scambia con l'ambiente materia ed energia: ad esempio una pentola aperta piena d'acqua su un fornello. Il sistema si dice chiuso se non scambia materia con l'ambiente, ma scambia energia (ad esempio la Terra a parte le meteoriti non scambia materia con il resto del sistema solare, ma riceve energia termica dal sole e ne irradia dalla parte non illuminata). Infine il sistema è detto isolato se non avvengono scambi di energia e di materia con l'ambiente, l'universo termodinamico formato da un sistema e dall'ambiente è ovviamente un sistema isolato.

Un sistema termodinamico statico non ha molto interesse, quello che interessa è la sua evoluzione nel passaggio da uno stato ad un altro tale processo viene chiamato normalmente una trasformazione termodinamica. La classificazione delle trasformazioni termodinamiche (le varie tipologie non si escludono) è la seguente:

## **Trasformazioni fra stati di equilibrio**

Gli stati iniziali e finali sono caratterizzati da ben precise variabili termodinamiche di equilibrio iniziale e finale, nel caso più generale possibile durante la trasformazione non sono definite le variabili termodinamiche di stato e quindi il sistema non è descrivibile in maniera semplice.

Ha particolare importanza un piano cartesiano in cui sull'asse delle ordinate figura il volume del sistema e sull'asse verticale la pressione del sistema stesso: tale piano viene detto piano di Clapeyron ed è particolarmente utile per descrivere i sistemi termodinamici in cui i fluidi giocano un ruolo essenziale. In genere una trasformazione per stati di equilibrio non è descrivibile altro che come due punti sul piano di Clapeyron lo stato iniziale e quello finale.

## **Trasformazione per stati di equilibrio o quasi statica**

Questa è un caso particolare di trasformazione fra stati di equilibrio.

La trasformazione può avvenire lentamente per passaggi successivi di stati equilibrio termodinamico, in tale caso posso rappresentare istante per istante il sistema attraverso le sue variabili termodinamiche. Consideriamo la compressione del gas contenuto in un pistone, se noi appoggiamo un peso macroscopico sul pistone esso comprimerà il gas rapidamente provocando stati di non equilibrio meccanico (differenza di pressione interna e spostamenti macroscopici della masse di gas e persino variazioni locali di temperatura). Una compressione per stati di equilibrio viene effettuata se successivamente vengono disposti, in lenta serie, uno dopo l'altro dei pesi infinitesimi in modo che la trasformazione avvenga per stati senza movimenti macroscopici.

Sul piano di Clapeyron questa trasformazione è rappresentata una linea continua. Il lavoro compiuto è pari all'area al di sotto della curva: tale lavoro è positivo se lo stato iniziale è a sinistra di quello finale, negativo nel caso opposto.

## **Trasformazioni reversibili**

Questo è un caso particolare di trasformazione quasi statica. La trasformazione è reversibile se è possibile eseguire la trasformazione in senso inverso riportando sia il sistema che l'ambiente esterno nelle condizioni iniziali. Questo vuole dire che le sorgenti di calore recuperano la quantità di calore scambiata nella trasformazione diretta e così i dispositivi meccanici recuperano l'energia meccanica ceduta al sistema nel processo diretto.

La reversibilità di una trasformazione richiede che i movimenti delle parti siano fatti senza attrito, che gli scambi di temperatura tra le sorgenti ed il sistema siano fatti con differenze infinitesime di temperatura. Le trasformazioni reversibili sono delle trasformazioni ideali in pratica non realizzabili mai esattamente.

## **Trasformazioni irreversibili**

La maggior parte delle trasformazioni non sono ripercorribili a ritroso a meno di sprecare energia preziosa. Le trasformazioni di questo genere vengono chiamate irreversibili. Tali trasformazioni non rispettano le condizioni delle trasformazioni reversibili.

Enumerare le condizioni che determinano la irreversibilità di una trasformazione è necessariamente non completa; sicuramente l'attrito nel senso lato (viscosità, attrito dinamico, deformazioni anelastiche, dissipazione di energia elettrica ecc) è una causa di irreversibilità come anche se la trasformazione non avviene per una sequenza finita di stati di equilibrio termodinamico. Ma anche mettere il sistema in contatto con una sorgente con differenza macroscopica di temperatura provoca irreversibilità.

Le trasformazioni vengono inoltre classificate in funzione delle grandezze che vengono mantenute costanti:

## **Trasformazioni adiabatiche**

Sono le trasformazioni che avvengono senza scambio di calore con l'esterno. Tali trasformazioni possono essere reversibili ed irreversibili. Per potere avvenire una trasformazione di questo tipo è necessario che non ci sia scambio di calore con il mondo esterno: quindi è essenziale l'isolamento termico con il mondo esterno, e se si vuole se il tempo è troppo lungo diventa una condizione impossibile in quanto per quanto efficiente sia il meccanismo di isolamento difficilmente è perfetto. Le trasformazioni adiabatiche hanno un ruolo cruciale nella termodinamica.

Per avere una trasformazione adiabatica reversibile occorre che non vi sia attrito o dissipazione.

## **Trasformazioni isoterme**

Si chiama trasformazione isoterma una trasformazione termodinamica che avviene a temperatura costante. In questo caso analogamente che nell'adiabatica per essere reversibile la trasformazione deve avvenire senza attrito o dissipazione. Ma è necessaria la presenza di una sorgente di calore

## **Trasformazione isocora**

Si chiama isocora una trasformazione in cui il volume non varia. Una trasformazione di questo tipo non produce lavoro meccanico, quindi non si pone il problema dell'attrito. In una trasformazione di questo tipo viene scambiato calore con delle sorgenti termiche. Notare che se la differenza di temperatura tra lo stato iniziale e finale è finita per garantire la reversibilità occorrono infinite fonti di calore tra le due temperature estreme per permettere la reversibilità della temperatura.

Sul piano di Clapeyron questa trasformazione è rappresentata, se avviene per stati di equilibrio, come una linea verticale.

## **Trasformazione isobara**

Si chiama isobara una trasformazione a pressione costante: nella atmosfera nei recipienti aperti questo tipo di trasformazioni sono molto comuni. La reversibilità di una trasformazione di questo tipo se non infinitesima, richiede infinite fonti di calore e mancanza di attrito.

Sul piano di Clapeyron questa trasformazione è rappresentata, se avviene per stati di equilibrio, come una linea orizzontale.

## **Trasformazione ciclica**

Tra le trasformazioni sono particolarmente interessanti quelle trasformazioni in cui lo stato iniziale coincide con lo stato finale. Tali trasformazioni sono dette cicliche o cicli. Un ciclo è quindi una trasformazione in cui il sistema termodinamico torna nel suo stato iniziale. Un ciclo nel piano di Clapeyron si rappresenta come una curva chiusa. Il lavoro compiuto è l'area racchiusa dalla curva stessa, tale lavoro è positivo se il ciclo viene percorso in senso orario: cioè in questo caso viene compiuto globalmente del lavoro dal sistema verso l'ambiente. Se lo stesso ciclo è percorso in senso antiorario il lavoro sarebbe stato negativo.

Argomento seguente: Gas in generale

# Gas perfetti e reali

[◀ Modulo precedente Trasformazioni termodinamiche](#)
[↗ Torna a Fisica classica](#)
[▶ Modulo successivo Primo principio della termodinamica](#)

## Gas ideali

Un gas si definisce perfetto o ideale se la sua equazione di stato cioè l'equazione che definisce lo stato del sistema è semplicemente:

$$pV = nRT$$

Dove  $T$  è espresso in gradi  $K$  e  $R = 8.314 \frac{J}{mol \cdot K}$  viene detta costante universale dei gas,  $n$  è il numero di

moli del gas. Un gas rispetta molto bene tale legge se la temperatura a cui si trova è molto maggiore della temperatura critica e la sua densità (o se si vuole la pressione) è di molto inferiore al valore critico. I gas principali  $N_2$  e  $O_2$  che fanno parte dell'aria hanno una temperatura critica rispettivamente di  $126 K$  e  $155 K$  con pressioni critiche di  $3.3 \cdot 10^6 Pa$  e  $5 \cdot 10^6 Pa$ . Per questa ragione l'aria alla temperatura media della terra, se si trascura il vapore d'acqua, è un gas perfetto. L'acqua ha una temperatura critica di  $647 K$  ed una pressione critica di  $2.2 \cdot 10^7 Pa$  e non può essere considerato un gas perfetto (la nebbia o la pioggia sono manifestazioni della non descrivibilità dell'acqua mediante l'equazione di stato dei gas perfetti).

In realtà esistono delle condizioni microscopiche affinché un gas si comporti come un gas perfetto:

- Il volume proprio delle molecole, il cosiddetto covolume, sia trascurabile rispetto al volume del recipiente contenente il gas.
- La forza di attrazione tra le molecole sia trascurabile cosicché la energia potenziale di tale forza attrattiva sia trascurabile rispetto all'energia cinetica media.

In tali condizioni si trova sperimentalmente che mediamente ogni molecola del gas ha una energia cinetica media pari a:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

Dove  $k_B = \frac{R}{N_A}$  è chiamata costante di Boltzmann. la pressione non è data altro che dagli urti elastici che le

molecole di gas esercitano sulle pareti del contenitore (lo vedremo più in dettaglio nel seguito).

Un gas perfetto ha una compressibilità a temperatura costante maggiore di qualsiasi altra sostanza. Si definisce compressibilità la quantità, che ha le dimensioni di una pressione, pari a:

$$\beta = -V \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T$$

che nel caso dei gas perfetti vale:

$$\beta = V \frac{nRT}{V^2} = p$$

La ulteriore particolarità di un gas ideale è che nel piano di Clapeyron,  $V - p$ , le curve che rappresentano le trasformazioni isoterme, cioè le curve a temperatura costante sono delle iperboli equilateri.

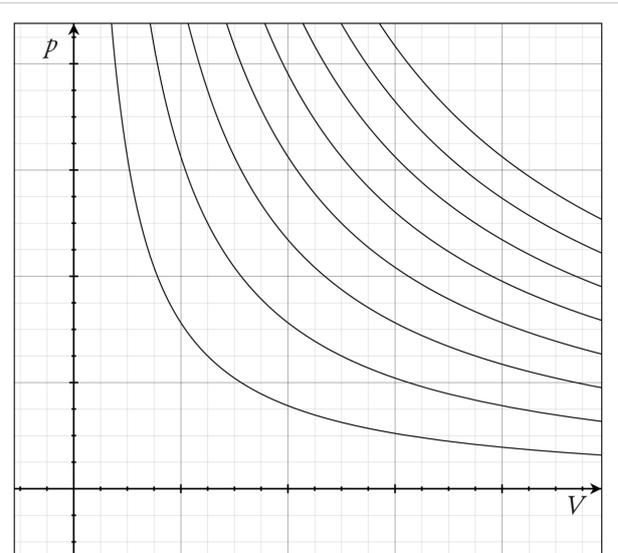
Il coefficiente di dilatazione cubica definito come:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p$$

Nel caso dei gas perfetti vale:

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

quindi a temperatura ambiente la variazione percentuale di volume con la temperatura è molto grande.



Isoterme di un gas ideale sul piano di Clapeyron

### Trasformazione isoterma di un gas ideale

Immaginiamo di avere un gas ideale che compia una espansione da un volume  $V_A$  ad un volume  $V_B$ , rimanendo alla stessa temperatura  $T_A$ . Immaginiamo che la trasformazione avvenga per stati equilibrio termodinamico e che il contenitore in cui sia contenuto sia a tenuta, in maniera tale la quantità di gas identificata dal numero di moli  $n$ .

Durante quindi la trasformazione la pressione sarà inversamente proporzionale al volume (posso applicare in ogni istante l'equazione di stato):

$$p = \frac{nRT_A}{V}$$

Quindi il lavoro fatto dal sistema verso l'esterno è pari a:

$$W = \int_{V_A}^{V_B} P dV = nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Quindi in questo caso l'espressione del lavoro fatto è una funzione calcolabile semplicemente. La trattazione non cambierebbe se il gas venisse compresso passando da un volume maggiore ad uno minore. In questo caso essendo  $V_B < V_A$  il lavoro sarebbe negativo, cioè sarebbe necessario compiere del lavoro dall'esterno.

### Dalla teoria cinetica dei gas all'equazione di stato dei gas perfetti

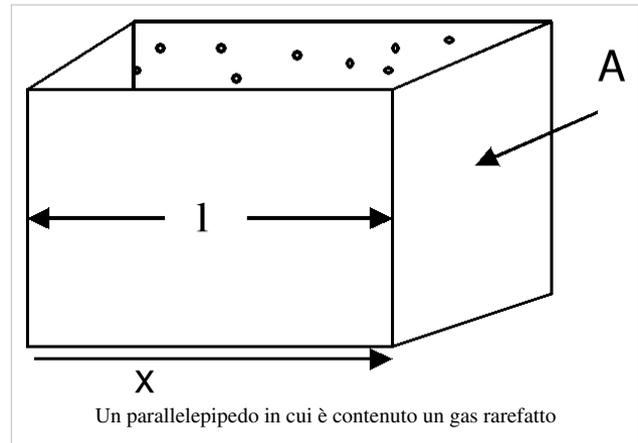
Definiamo un gas perfetto da un punto di vista microscopico in maniera più restrittiva di come fatto precedentemente per semplificare il ragionamento: consideriamo il gas tanto rarefatto per cui si possono trascurare gli urti tra le singole molecole rispetto agli urti con le pareti del recipiente.

Ricordiamo il fatto sperimentale che l'energia cinetica media delle molecole  $\langle E_k \rangle$  vale semplicemente:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

$\langle v^2 \rangle$  è la velocità quadratica media delle molecole, ben diversa dalla velocità media che è nulla. Nella figura a fianco viene mostrato schematicamente come sia fatto il contenitore (un parallelepipedo per semplicità) di volume  $V = lA$  che contiene le  $N = nN_A$  molecole di gas rarefatto.  $n$  è il numero di moli del gas.

Focalizziamo l'attenzione su una singola molecola che ha velocità  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  ed osserviamola in un intervallo di tempo  $\Delta t$ . Se il recipiente è in equilibrio termodinamico con il gas gli urti con la parete saranno mediamente elastici.



Quindi la componente dell'impulso ceduto alla parete  $A$  ad ogni singolo urto nella direzione  $x$  sarà semplicemente  $I_x = F_x dt = 2mv_x$ .

Il numero di urti  $n_u$  fatti in tale intervallo di tempo contro la parete è ovviamente pari al rapporto tra la durata  $\Delta t$  ed il tempo che la molecola impiega ad attraversare il recipiente (andata e ritorno):

$$n_u = \frac{\Delta t}{2l/v_x} = v_x \frac{\Delta t}{2l}$$

Quindi la componente della forza che mediamente viene esercitata da tale molecola sulla parete  $A$  nella direzione  $x$ :

$$F_{xm} = n_u \frac{I_x}{\Delta t} = v_x \frac{\Delta t}{2l} \frac{2mv_x}{\Delta t} = \frac{mv_x^2}{l}$$

Moltiplicando tale forza per le  $N$  molecole contenute nel volume  $V$  e dividendo per la superficie  $A$  su cui viene esercitata si ha la pressione media esercitata dal gas:

$$P = \frac{NF_{xm}}{A} = nN_A \frac{mv_x^2}{lA} = nN_A \frac{mv_x^2}{V}$$

Si è per semplicità immaginato che la componente della velocità al quadrato delle molecole siano eguali.

Dalla meccanica sappiamo che:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Ma anche non esiste una direzione privilegiata dello spazio cioè in media:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

Sostituendo a  $v_x^2$  il suo valore medio nell'equazione precedente:

$$P = nN_A \frac{m \langle v^2 \rangle}{3V}$$

Ma se sostituiamo la prima equazione data all'inizio del paragrafo si ha che:

$$P = nN_A \frac{3k_B T}{3V} = \frac{nN_A k_B T}{V} = \frac{nRT}{V}$$

Che è l'equazione di stato dei gas perfetti.

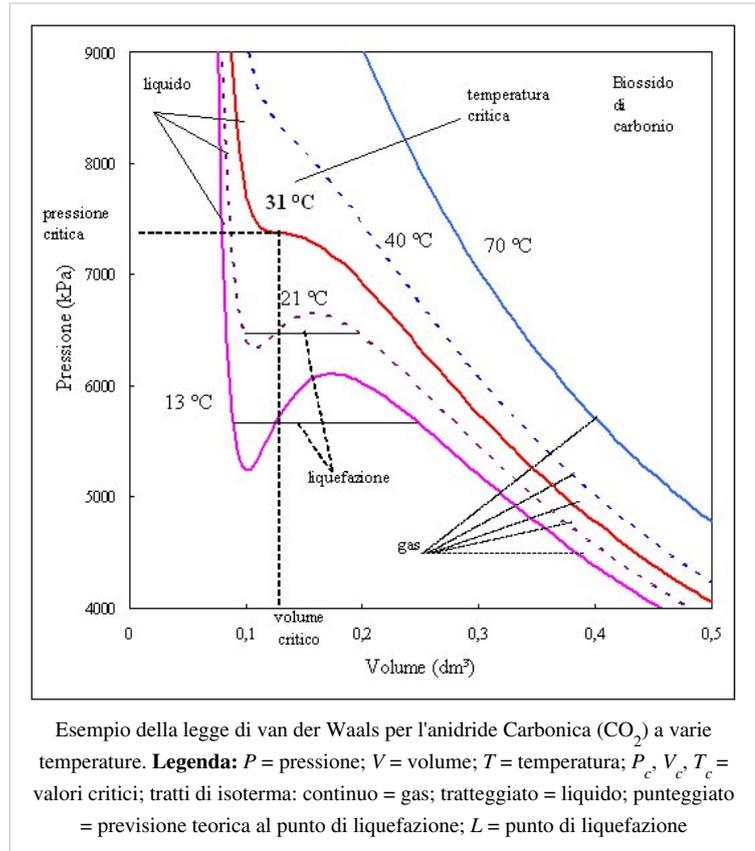
## Gas reali

I fluidi per i quali non sia trascurabile il volume proprio delle molecole (il covolume  $nb$ ) rispetto al volume  $V$  del recipiente e per cui la attrazione intermolecolare esercita un ruolo non trascurabile sono descrivibili da una equazione che ricorda l'equazione di stato dei gas, formulata in maniera empirica da Van der Waals:

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Alla pressione viene aggiunto un termine che in qualche maniera tiene conto della attrazione delle molecole che riduce, quando la densità è elevata ( $V$  piccolo), la pressione effettiva.

Il grafico in figura mostra le isoterme di un particolare gas reale: l'anidride carbonica detta anche biossido di carbonio. Alla temperatura di 70 °C (ben al di sopra della temperatura critica) l'isoterma ricorda le iperbole equilatera dei gas perfetti, seppure la pressione è più bassa di quella di un gas ideale (a causa del potenziale attrattivo). Alla temperatura di 40 °C vi sono due punti di flesso, pur tuttavia si ha una funzione ancora monotona. La curva a 31 °C, temperatura critica, illustra cosa succede in questo punto particolare. Quando il gas viene compresso in modo tale da raggiungere il volume critico  $V_c$  e di conseguenza la pressione critica  $p_c$ , diventa liquido. A destra è gassoso a sinistra è liquido. Le curve a 13 °C e 21 °C rappresentano solo parzialmente il comportamento reale del gas (in queste condizioni si raggiungono quindi i limiti di validità dell'equazione di Van der Waals). Il tratto di destra delle curve (corrispondente alle pressioni minori) descrive in modo adeguato il comportamento del gas, mentre la loro parte centrale (dove si osservano le "gobbe") non corrisponde alla realtà fisica, in quanto il gas, invece di seguire la curva che indicherebbe un assurdo aumento del volume all'aumentare della pressione, segue la linea orizzontale nera L. La linea orizzontale viene posizionata ad un'ordinata tale che l'area compresa tra la linea e la gobba di destra sia uguale a quella compresa tra la linea e la gobba di sinistra. In questa zona avviene la liquefazione del gas, per cui al termine del linea orizzontale troviamo soltanto anidride carbonica liquida. Se si tenta di ridurre ulteriormente il volume, la pressione aumenta in modo molto rapido, dal momento che i liquidi sono praticamente incompressibili. Osserviamo infine che la lunghezza del tratto orizzontale aumenta al diminuire della temperatura.



Argomento seguente: Primo principio della termodinamica

# Primo principio della termodinamica

◀ Modulo precedente Gas Reali ed Ideali

↶ Torna a Fisica classica

▶ Modulo successivo Secondo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica estende la conservazione dell'energia dei sistemi meccanici conservativi ai sistemi termodinamici. Nei sistemi termodinamici l'energia totale del sistema si conserva se si tiene conto dell'energia che il sistema scambia con l'ambiente esterno sotto forma di lavoro meccanico e di calore. In termodinamica fisica si assume che sia positivo il lavoro meccanico fatto dal sistema sull'ambiente esterno, mentre è negativo il calore che il sistema cede all'esterno. Per enunciare in maniera puntuale tale principio, bisogna definire e precisare meglio il concetto di energia del sistema.

La prima osservazione da fare è che a causa di tale enunciato generale in una qualsiasi trasformazione ciclica, cioè una trasformazione che riporti il sistema nello stesso stato termodinamico di partenza, il lavoro eseguito coincide con il calore assorbito, cioè in un ciclo  $W = Q$ . Consideriamo ora due stati termodinamici  $A$  e  $B$ , ovviamente esistono infiniti tipi di trasformazioni tra tali di equilibrio termodinamico che collegano i due stati, tali trasformazioni sono rappresentate, per ragioni visive, come linee in un piano termodinamico. Non inganni tale rappresentazione in quanto gli stati intermedi potrebbero essere non di equilibrio e quindi non rappresentabili nel piano termodinamico.

Il lavoro  $W$  che viene eseguito, come il calore assorbito  $Q$  per fare le varie trasformazioni, dipende dal percorso seguito nel piano termodinamico.

Consideriamo il caso specifico indicato in figura in cui vi sono due generiche trasformazioni  $I$  e  $II$  che portano il sistema dallo stato  $A$  allo stato  $B$ . Tali trasformazioni sono caratterizzate rispettivamente da  $Q_I$ ,  $W_I$  e  $Q_{II}$ ,  $W_{II}$ . Consideriamo inoltre una trasformazione  $III$  che riporta il sistema da  $B$  ad  $A$  per la quale si ha il calore assorbito vale  $Q_{III}$  mentre il lavoro eseguito vale  $W_{III}$ . Ciò premesso, consideriamo le due trasformazioni cicliche  $I + III$  e  $II + III$  si ha che:

$$Q_I - W_I + Q_{III} - W_{III} = 0$$

$$Q_{II} - W_{II} + Q_{III} - W_{III} = 0$$

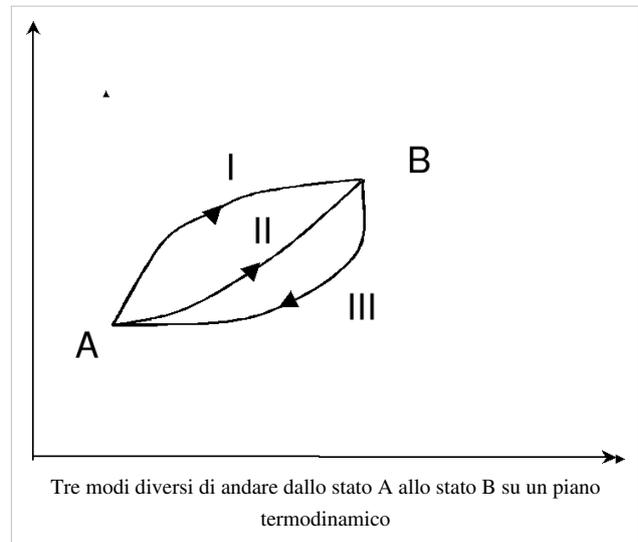
Sottraendo le due espressioni risulta che:

$$Q_I - W_I = Q_{II} - W_{II}$$

Cioè mentre i calori ed i lavori dipendono dal percorso fatto per andare da  $A$  a  $B$  la loro differenza dipende solo dagli stati finali ed iniziali. A tale differenza, definita a meno di una costante additiva, viene dato il nome di energia interna cioè:

$$Q_I - W_I = Q_{II} - W_{II} = U(B) - U(A)$$

Notare come l'energia interna di un sistema ha le dimensioni di una energia come il lavoro meccanico e il calore. Dal punto di vista microscopico l'energia interna del sistema non è altro che la somma delle energie cinetiche (nella forma più generale possibile) e potenziali delle parti microscopiche (molecole/atomi) di cui si compone il sistema sotto esame.



In maniera più generale possiamo scrivere quindi che in qualsiasi trasformazione tra stati di equilibrio termodinamico:

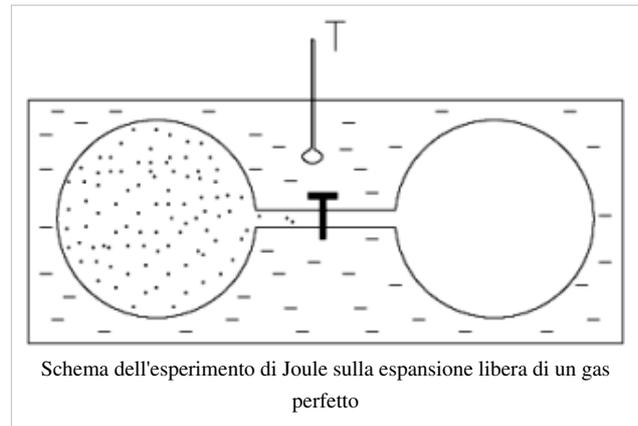
$$Q = W + \Delta U$$

tale espressione è la forma matematica del I principio della termodinamica, che generalizza la conservazione dell'energia. Infatti l'energia totale dell'universo termodinamico si conserva se si considerano le tre forme di energia quella meccanica, il calore e l'energia interna dei corpi.

## Energia interna dei gas perfetti

Si deve a Joule un esperimento di fisica che ha valutato la variazione di energia interna in un gas perfetto.

L'esperimento era il seguente (mostrato schematicamente nella figura a fianco): in un calorimetro, cioè un contenitore isolato contenente ad esempio un liquido di cui si conosce la capacità termica e la temperatura, viene messo un contenitore di gas composto da due sezioni (i bulbi di destra e di sinistra). Inizialmente tutto il gas si trova a sinistra alla temperatura del bagno liquido. Mentre il contenitore di destra è vuoto. Si apre il rubinetto e si osserva che se il



gas è perfetto nessuna variazione di temperatura avviene nel calorimetro: cioè il gas non scambia calore con il calorimetro. Quindi per quanto riguarda il gas possiamo scrivere che:

$$W + \Delta U = 0$$

Ma il sistema non compie, in questa espansione libera, nessun lavoro verso l'esterno e quindi anche  $W = 0$ ; concludiamo che l'energia interna del gas non è cambiata, anche se è variata vistosamente una delle due variabili di stato che assieme alla temperatura definisce il gas perfetto: il volume (ovviamente anche la pressione diminuisce ma non è una variabile indipendente dalle altre). Da questo concludiamo che nei gas perfetti la mancata variazione di temperatura nel calorimetro in una espansione libera del gas comporta che l'energia interna dipenda solo dalla temperatura. Notiamo che la espansione libera di un gas sia un tipico esempio di trasformazione isoterma (ma anche adiabatica) irreversibile. Infatti non è possibile ritornare nello stato iniziale se non consumando lavoro meccanico per ricomprimere il gas nel volume di sinistra. L'esperimento di Joule non è un esperimento banale, infatti se venisse fatto con generico fluido, un gas denso o un liquido, il risultato sarebbe in genere un abbassamento della temperatura del calorimetro (in alcuni casi anche il contrario), rivelando che solo nei gas perfetti l'energia interna sia funzione della sola temperatura.

Siamo ora in grado di valutare il calore scambiato da un gas perfetto che compia una trasformazione reversibile isoterma. Questa trasformazione essendo reversibile è ben diversa dalla espansione libera appena considerata. Infatti in questa trasformazione essendo una trasformazione in cui non varia l'energia interna del gas, siamo in grado di trasformare integralmente il calore assorbito dalla sorgente di calore in lavoro meccanico cioè:

$$Q = W$$

In particolare se conosciamo il volume finale  $V_B$  e quello iniziale  $V_A$  delle  $n$  moli di gas che compiono tale trasformazione a temperatura costante  $T_o$  dalla definizione di lavoro posso scrivere che:

$$W = \int_A^B P dV$$

Dato che la trasformazione è reversibile, essa avviene per stati di equilibrio, quindi, nell'integrando, posso sostituire a  $P$  la sua espressione che deriva dall'equazione di stato:

$$W = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Quindi il calore assorbito in tale trasformazione è:

$$Q = W = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Il modello microscopico dei gas perfetti, la teoria cinetica dei gas, ci permette di identificare l'energia interna di un gas perfetto monoatomico con la somma delle energie cinetiche delle particelle che compongono il gas. Sperimentalmente l'energia cinetica media delle molecole di un gas perfetto monoatomico è pari a:

$$\frac{3}{2} k_B T$$

Ricordando che  $k_B = R/N_A$  è pari alla costante dei gas divisa la costante di Avogadro. Quindi l'energia interna di  $n$  moli di gas perfetto monoatomico vale:

$$U = nN_A \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} nRT$$

Se il gas è biatomico, bisogna tenere presente che statisticamente negli urti elastici l'energia si deve equipartire con due ulteriori gradi di libertà dovuti all'energia rotazionale lungo i due assi normali alla congiungente. In poche parole ogni molecola ha l'energia cinetica traslazionale più energia rotazionale, in definitiva l'energia in media di tutti e 5 i gradi di libertà vale:

$$\frac{5}{2} k_B T$$

Quindi l'energia interna in questo caso vale:

$$U = nN_A \frac{5}{2} k_B T = \frac{5}{2} nRT$$

Il fatto che ad ogni grado di libertà di una sostanza in equilibrio termodinamico vada una energia media pari a  $k_B T/2$  va sotto il nome di principio di equipartizione dell'energia ed è un principio generale dell'equilibrio termodinamico.

## Calore specifico molare di un gas perfetto

### Volume costante

I gas ed in particolare quelli perfetti hanno una elevata compressibilità questo vuol dire che se io fornisco una determinata quantità di calore la temperatura a cui si porta il gas dipende da quanto varia il volume durante la trasformazione. In altri termini in genere il calore fornito in parte aumenta la temperatura del gas ed in parte fa compiere lavoro verso l'ambiente esterno da parte del gas. Un caso particolarmente interessante è la quantità di calore da fornire ad una mole di gas perfetto per andare da una temperatura  $T$  a  $T + dT$  quando la trasformazione avviene in maniera isocora cioè a volume costante, senza ipotesi di reversibilità. In questo caso il I principio della termodinamica scritto in forma differenziale diventa semplicemente:

$$dU = dQ = c_v dT$$

Dove  $c_v$  è il calore specifico molare a volume costante (da cui il pedice  $v$ ). Per quanto visto precedentemente se il gas è monoatomico:

$$dU = \frac{3}{2} R dT$$

mentre se il gas è biatomico:

$$dU = \frac{5}{2} R dT$$

Quindi il calore specifico molare di un gas perfetto vale nel caso monoatomico  $c_v = 3/2R$  e nel caso biatomico  $c_v = 5/2R$ . Da quanto detto quindi possiamo affermare, in generale, che in un gas perfetto l'energia libera è pari

a:  

$$U = nc_v T$$

### Pressione costante

Se la trasformazione infinitesima da  $T$  a  $T + dT$ , invece che a volume costante, avvenisse in maniera reversibile, ma a pressione costante, per  $n$  moli di un gas perfetto, posso riscrivere il I principio della termodinamica in forma differenziale come:

$$dU + pdV = dQ = nc_p dT$$

Dove con  $c_p$  si è indicato il calore specifico a pressione costante. Ma essendo la trasformazione reversibile posso differenziare l'equazione di stato di una mole di gas perfetto, il termine  $Vdp$  è nullo a causa del fatto che la trasformazione è isobara, quindi:

$$pdV = nRdT$$

ma anche:

$$dU = nc_v dT$$

Sostituendo nella equazione precedente:

$$c_v dT + RdT = c_p dT \text{ da cui segue che.}$$

$$c_p = c_v + R$$

Quindi il calore specifico molare a pressione costante è maggiore per tutti i gas perfetti al calore specifico a volume costante della stessa quantità: la costante di stato dei gas. Questo risultato fu trovato sperimentalmente, e in onore di chi lo ha scoperto, va sotto il nome di relazione di Mayer. Il rapporto tra  $c_p$  e  $c_v$  viene definito come  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Mentre posso sempre definire anche per i gas non perfetti il rapporto  $\gamma$ , il suo valore come il valore di  $c_v$  dati valgono solo per i gas perfetti a temperatura ambiente. A temperature molto basse o molto alte i valori che si trovano sperimentalmente per  $c_v$  e  $\gamma$  differiscono dal valore dei gas perfetti.

La tabella seguente riepiloga numericamente quanto detto nel caso ideale:

gas	$c_v$	$c_p$	$\gamma$
monoatomico	$3R/2$	$5R/2$	1.66
biatomico	$5R/2$	$7R/2$	1.4

### Calore specifico molare di un solido

Nei solidi la differenza tra calore specifico a pressione o volume costante è irrilevante, essendo la compressibilità trascurabile. Ma se si vuole le cose sono molto più semplici in quanto empiricamente si trova che il calore specifico molare di tutti i solidi (tranne per materiali ad elevatissima temperatura di fusione quale il diamante) segue la legge empirica detta di Dulong Petit, che afferma che il calore specifico molare di un solido vale:  $3R$ .

In ogni caso a temperatura ambiente il calore specifico molare di tutte le sostanze semplici non si discosta di molto da tale legge empirica.

## Trasformazioni adiabatiche reversibili di un gas perfetto

Una trasformazione si dice adiabatica se il sistema non scambia calore con nessuna sorgente durante la trasformazione. L'espansione libera di un gas perfetto è un esempio di trasformazione adiabatica irreversibile, ma in tale caso oltre a non assorbire calore il sistema non produce lavoro. Restringiamo la nostra attenzione su una espansione adiabatica reversibile, ovviamente invertendo il verso ed i segni delle grandezze termodinamiche si ottiene il caso inverso di una compressione adiabatica. Limitiamo il caso a un gas perfetto in questo caso il lavoro prodotto sarà ovviamente pari alla variazione di energia interna del sistema. In poche parole il gas si espande e si raffredda (diminuisce la sua energia interna) e compie un lavoro. Essendo la trasformazione reversibile posso scrivere il I principio della termodinamica in maniera differenziale fotografando un generico istante in cui il sistema si porta da uno stato ad uno immediatamente vicino lungo la trasformazione adiabatica:

$$dU + pdV = 0$$

Essendo un gas perfetto posso scrivere questa relazione come:

$$nc_v dT + \frac{nRT}{V} dV = 0$$

Posso scrivere che  $R/c_v = \gamma - 1$  dalla relazione di Mayer, quindi separando le variabili e facendo la sostituzione detta:

$$(\gamma - 1) \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

Se integriamo tra lo stato  $A$  (di partenza) e lo stato generico indicato con nessun pedice:

$$\ln \left( \frac{V}{V_A} \right)^{(\gamma-1)} = \ln \frac{T_A}{T}$$

Essendo eguali i logaritmi devono essere eguali gli argomenti cioè:

$$TV^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} = \text{cost}$$

Mediante l'equazione di stato si può cambiare la variabile indipendente con semplici passaggi si ottiene che anche:

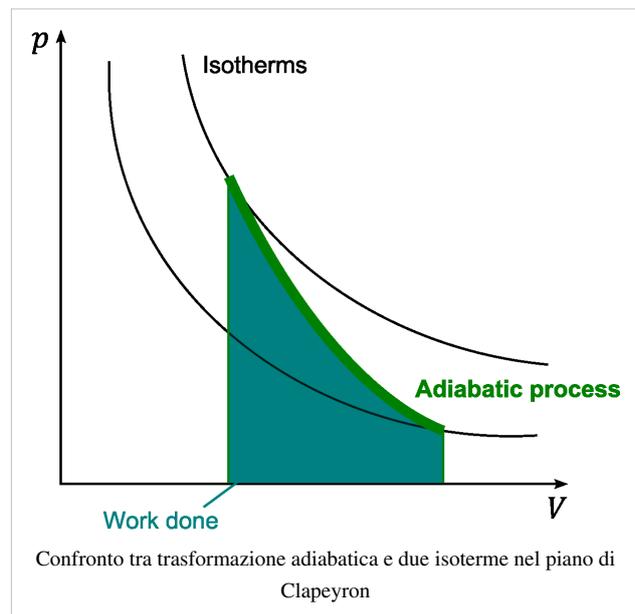
$$pV^\gamma = \text{cost}$$

e

$$Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{cost}$$

Queste equazioni descrivono il comportamento di due variabili di stato indipendenti nel corso di una trasformazione adiabatica reversibile. Notiamo come essendo  $\gamma > 1$  la pendenza sul piano di Clapeyron delle adiabatiche reversibili sia tanto maggiore rispetto alle isoterme quanto maggiore è  $\gamma$ , come è schematicamente mostrato nella figura a fianco. Un esempio di trasformazione adiabatica si ha nell'atmosfera quando masse d'aria si spostano rapidamente verso l'alto. Poiché la pressione diminuisce con l'altezza a tale espansione adiabatica si accompagna un abbassamento di temperatura dell'aria. La variazione di temperatura con l'altezza si spiega bene con tale meccanismo.

Un esercizio sui gas perfetti chiarisce meglio quanto detto. Mentre l'esempio con un recipiente estende tale concetti.



## Trasformazioni cicliche

In una trasformazione ciclica l'energia interna del sistema che compie la trasformazione ovviamente non cambia, essendo l'energia interna una variabile di stato, poiché per definizione di ciclo, il sistema ritorna nelle condizioni iniziali. Da un punto di vista analitico se definisco  $Q_i$  il calore scambiato in un ciclo con la sorgente  $i$  e con  $W$  il lavoro totale del ciclo avrò che:

$$\sum Q_i = W$$

Un caso particolare di ciclo è quello che avviene tra due sole sorgenti di temperatura  $T_1$  e  $T_2$ . In tale caso se il ciclo viene percorso in senso orario il lavoro prodotto è positivo e posso chiamare  $Q_1$  e  $Q_2$  le quantità di calore scambiate con le due sorgenti in questo caso  $Q_1$  è negativa (cioè il sistema cede calore alla sorgente). Si definisce rendimento  $\eta$  di un ciclo motore il rapporto tra il lavoro compiuto dal sistema e il calore assorbito dalla sorgente a temperatura più alta:

$$\eta = \frac{W}{Q_2}$$

Se invece il ciclo viene percorso in senso antiorario, il ciclo si chiama frigorifero, in quanto il risultato finale è quello di assorbire del lavoro meccanico (quindi  $W$  è negativo) e di assorbire del calore dalla sorgente a temperatura più bassa ( $Q_1 > 0$  e  $Q_2 < 0$ ). Quindi in definitiva un ciclo di questo genere serve per sottrarre calore e quindi raffreddare la sorgente a temperatura più fredda, per questo viene chiamato ciclo frigorifero. In questo caso l'enfasi viene posta sulla quantità di calore sottratta  $Q_1$  ed il lavoro necessario per eseguire il ciclo. Si chiama coefficiente di prestazione spesso indicato con l'abbreviazione COP la quantità:

$$COP = \frac{Q_1}{|W|} = -\frac{Q_1}{W}$$

Notiamo che bisogna fare una distinzione tra due possibili cicli frigoriferi, quelli in cui  $T_2$  è temperatura ambiente (come i frigoriferi per alimenti o i condizionatori dell'aria estivi) e quelli in cui  $T_1$  sia temperatura ambiente (condizionatori invernali e pompe di calore). In questo caso l'interesse è nel trasferire il massimo calore possibile sulla sorgente a temperatura più alta a spese del lavoro fornito in un ciclo: quindi il COP non è la grandezza adeguata per esprimere le prestazioni di tale macchina.

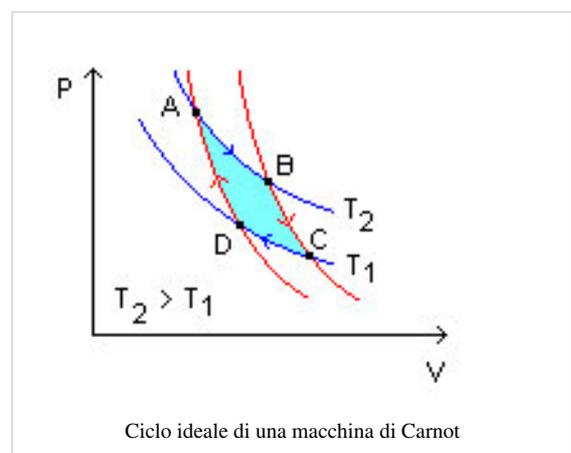
Il II principio della termodinamica stabilisce un vincolo preciso sul massimo rendimento e quindi il COP di una macchina termica.

Prima di studiare tale principio centrale nella termodinamica studiamo una macchina ideale.

## Ciclo di Carnot

La macchina di Carnot è una macchina ideale che funziona tra due sole temperatura  $T_1$  e  $T_2$  eseguendo due trasformazioni isoterme e due adiabatiche. La macchina è ideale nel senso che il ciclo viene supposto avvenire in maniera reversibile. Notiamo che in linea di principio solo delle trasformazioni adiabatiche reversibili che chiudono il ciclo permettano di utilizzare due sole sorgenti di calore.

Se infatti invece che le due adiabatiche si fosse chiuso il ciclo con delle isocore (come nel ciclo di Stirling descritto in seguito) avremmo avuto bisogno per eseguire il ciclo in maniera reversibile di infinite sorgenti di calore tra  $T_1$  e  $T_2$  (che in un ciclo scambiano una quantità nulla di calore) che però da un punto di vista pratico non è impossibile.



Ma a metà dell'Ottocento la macchina di Carnot appariva la macchina ideale migliore, in quanto non doveva avere le infinite sorgenti necessarie per altri tipi di cicli reversibili. Immaginiamo di utilizzare un gas perfetto per eseguire il ciclo, non è necessario, ma è il sistema per cui sappiamo in maniera semplice calcolare l'equazione di stato.

La trasformazione  $A \rightarrow B$  è una trasformazione isoterma reversibile in cui viene eseguito il lavoro  $W_{AB}$  che coincide con il calore assorbito dalla sorgente a temperatura maggiore  $T_2$ :

$$W_{AB} = Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Nella trasformazione tra  $B \rightarrow C$  il sistema compie una trasformazione adiabatica reversibile, quindi il sistema è isolato da ogni sorgente di calore e compie del lavoro positivo che non calcoliamo in quanto non necessario. Notiamo che esiste una ben precisa relazione tra le temperature ed i volumi, durante e in particolare, agli estremi della trasformazione:

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$$

La trasformazione tra  $C \rightarrow D$  è una trasformazione isoterma reversibile in cui viene assorbito il lavoro  $W_{CD}$  che coincide con il calore ceduto alla sorgente a temperatura minore  $T_1$ :

$$W_{CD} = Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}$$

Ed infine una trasformazione adiabatica  $D \rightarrow A$  riporta il sistema nello stato iniziale anche in questo caso si ha che:

$$T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1}$$

Ci interessa calcolare il rendimento di una macchina di questo tipo, non è necessario conoscere il lavoro assorbito o prodotto nelle adiabatiche in quanto il lavoro totale fatto nel ciclo, per il I principio della termodinamica, coincide con il calore scambiato con le sue sorgenti cioè:

$$W = Q_1 + Q_2$$

e quindi:

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = 1 + \frac{T_1 \ln \frac{V_D}{V_C}}{T_2 \ln \frac{V_A}{V_B}} = 1 - \frac{T_1 \ln \frac{V_C}{V_D}}{T_2 \ln \frac{V_B}{V_A}}$$

Ma essendo le trasformazioni  $B \rightarrow C$  e  $D \rightarrow A$  adiabatiche abbiamo visto come :

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$$

$$T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$$

Per cui dividendo membro a membro segue che:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Da questo segue che il rendimento di una macchina di Carnot dipende solo dalle temperature delle sorgenti tra cui avviene ed è tanto maggiore quanto maggiore è il rapporto tra le due temperature. In ogni caso il rendimento è sempre inferiore ad 1. Mentre il rendimento non dipende che dalle temperature delle due sorgenti, i calori e il lavoro eseguito dipendono dalle dimensioni del ciclo. Infatti maggiore è il rapporto tra i volumi  $V_B$  e  $V_A$  tanto maggiore è il lavoro fatto in un ciclo. Di conseguenza aumentano le quantità di calore scambiate con le varie sorgenti. Quindi un ciclo di Carnot operante tra due temperature ha un rendimento ben preciso, ma può produrre un qualsivoglia lavoro. Inoltre essendo invertibile può essere trasformato in una macchina frigorifera il cui COP vale:

$$COP = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

Il ciclo di Carnot non ha applicazioni pratiche in quanto fare delle trasformazioni adiabatiche reversibili è spesso meno semplice che eseguire altri tipi di trasformazioni. Al contrario il ciclo di Stirling di cui viene fatto un esempio è un ciclo che operando tra due temperature ha buone applicazioni pratiche. Ovviamente cicli termodinamici ve ne sono anche altri possibili un esempio di un ciclo poco efficiente chiarisce la scelta del ciclo.

Argomento seguente: Secondo principio della termodinamica

## Secondo principio della termodinamica

---

[◀ Modulo precedente Primo principio della termodinamica](#)

[▲ Torna a Fisica classica](#)

[▶ Modulo successivo Entropia](#)

Il primo principio della termodinamica stabilisce che l'energia termica e meccanica si conservano, stabilendo l'equivalenza tra calore e lavoro meccanico. Non è quindi possibile costruire una macchina che generi o distrugga energia, di conseguenza è impossibile realizzare quello che viene chiamato un moto perpetuo di I specie. Nel primo principio non è contenuta l'asimmetria chiara tra lavoro e calore. Infatti mentre il lavoro è trasformabile integralmente in calore, è ben noto sperimentalmente che l'operazione inversa è solo parzialmente possibile. A partire da tale osservazione sperimentale si esprime il secondo principio della termodinamica che si può enunciare in molte maniere (Enunciato di Kelvin-Planck, Enunciato di Clausius, teorema di Carnot, Teorema di Clausius).

### Enunciati

Qui descriviamo i due enunciati. Il primo enunciato è il seguente:

#### Enunciato di Kelvin-Planck

« È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di assorbire calore da una sorgente di calore e trasformarlo integralmente in lavoro. »

Cioè non è possibile realizzare una macchina che lavori con una sola sorgente producendo lavoro (la cosiddetta macchina monoterma). Una macchina monoterma costituisce un esempio tipico del moto perpetuo di II specie contraddetto da questo principio della termodinamica. L'espansione isoterma quasistatica, che abbiamo visto nel capitolo precedente, non contraddice tale principio, infatti alla fine della espansione lo stato del gas è cambiato in quanto è cambiato il suo volume. Quindi l'effetto della trasformazione non è unicamente di trasformare calore assorbito in lavoro. Se fosse possibile una macchina di questo tipo avremmo che sarebbe possibile estrarre ad esempio calore dal mare (una sorgente praticamente inesauribile di calore) ed avere energia a iosa.

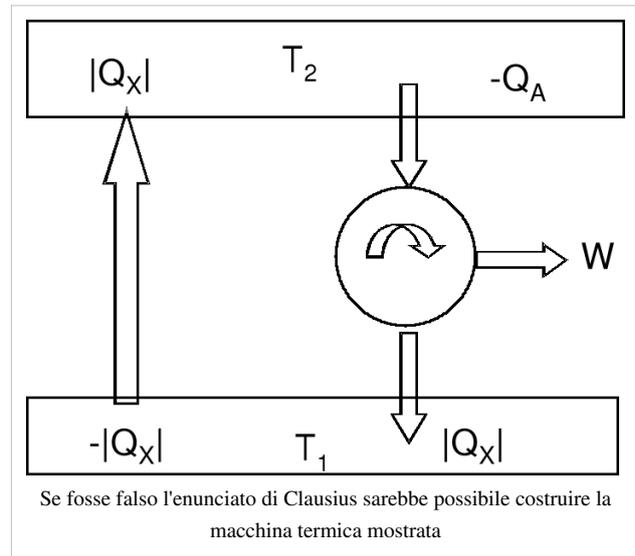
## Enunciato di Clausius

« È impossibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia quello di far passare del calore da una sorgente a temperatura inferiore a una a temperatura superiore. »

Cioè non è possibile costruire un frigorifero che non assorba lavoro (energia di natura diversa dal calore).

## Dimostrazione equivalenza

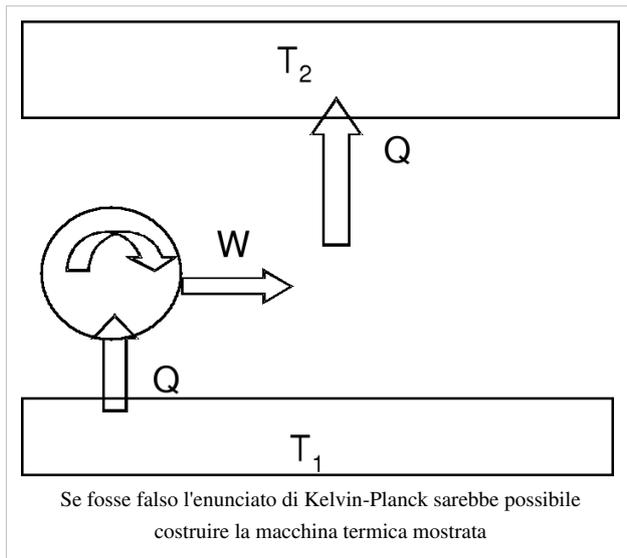
Tali due enunciati sono equivalenti. Si dimostra per assurdo mostrando che se nego un enunciato di conseguenza nego l'altro.



« Se l'enunciato di Clausius fosse falso significherebbe che è possibile trasportare calore  $|Q_x|$  da una sorgente più fredda  $T_1$  ad una più calda  $T_2$ , senza fornire lavoro al sistema complessivo.]] »

Possiamo quindi aggiungere al sistema una macchina ciclica, non necessariamente reversibile, che assorba calore  $Q_A$  dalla sorgente a temperatura  $T_2$  e ceda alla sorgente a temperatura  $T_1$  esattamente  $|Q_x|$ . Il periodo del ciclo si fa coincidere con il tempo in cui viene trasportato il calore  $|Q_x|$  dalla sorgente  $T_1$  a quella  $T_2$ . In maniera che il lavoro prodotto in un ciclo sia:  $W = Q_A - |Q_x|$ . Ma nel complesso la sorgente a temperatura  $T_1$  è come se non esistesse in quanto gli viene ceduto e data la stessa quantità di calore in un ciclo. Quindi nel complesso si ha una macchina che sottrae calore alla sorgente a temperatura  $T_2$  e produce lavoro, questo significa andare contro l'enunciato di Kelvin-Planck.

Notare come nella figura i segni dati per i calori si riferiscono alle sorgenti: quindi sono di segno opposto a quello dei due sistemi (il processo frigorifero impossibile e la macchina ciclica).

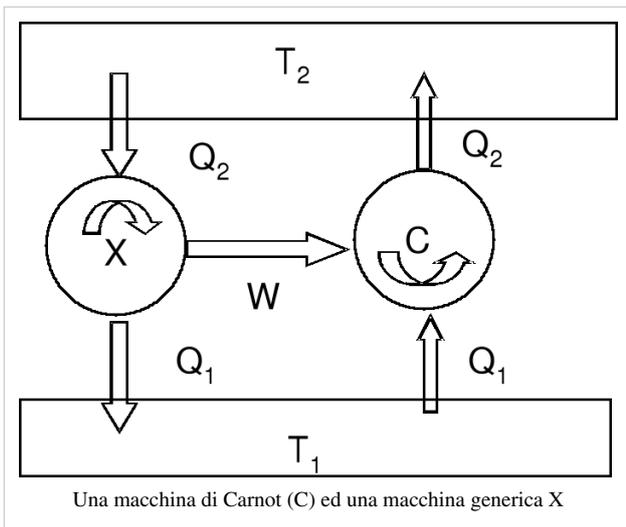


« Se invece fosse falso l'enunciato di Kelvin-Planck.]] »

Cioè se fosse possibile realizzare una macchina che come unico risultato assorba del calore  $Q$  da una sorgente ad una temperatura  $T_1$  e produca lavoro  $W = Q$ . Niente mi vieterebbe di utilizzare tale lavoro dissipandolo in una sorgente a temperatura superiore  $T_2$ , ad esempio per attrito. Ma l'insieme dei due processi corrisponde ad avere spostato del calore dalla sorgente a temperatura inferiore ad una a temperatura superiore contraddicendo l'enunciato di Clausius. Ancora una volta dal ragionamento per assurdo su uno degli enunciati sono arrivato a contraddire l'altro enunciato.

Dato che i due enunciati sono equivalenti potrò usare l'uno o l'altro indifferentemente.

### Teorema di Carnot



Tale teorema afferma che date due sorgenti di calore a temperatura  $T_1$  e  $T_2$  ed una macchina termica qualunque funzionante tra tali temperature il suo rendimento è minore od eguale a quello della macchina di Carnot operante tra le stesse temperature. Il segno di eguale vale se la macchina è reversibile.

### Dimostrazione

La prima parte si dimostra per assurdo. Immaginiamo di avere una macchina termica operante tra due temperature e che abbia un rendimento maggiore  $\eta_x$  di quello  $\eta_c$  della macchina di Carnot operante tra le stesse temperature. Definiamo in un ciclo rispettivamente  $Q_2$  (positivo) il calore assorbito dalla

sorgente a temperatura  $T_2$ ,  $Q_1$  (negativo) quello alla sorgente a temperatura  $T_1$ . Ovviamente in un ciclo viene prodotto un lavoro pari a  $W = Q_2 + Q_1$  (positivo). La macchina è indicata con la  $X$  nella figura.

Uniamo alla macchina una macchina di Carnot, indicata con  $C$  nella figura, che lavora tra le stesse temperature, ma funziona come una macchina frigorifera. Dimensioniamo la macchina di Carnot in maniera tale che in un ciclo assorba esattamente lo stesso lavoro prodotto dalla macchina  $X$ . In un ciclo la macchina di Carnot cederà  $Q'_2$

(negativo) alla sorgente  $T_2$  ed assorbirà  $Q'_1$  (positivo) dalla sorgente  $T_1$ . Il lavoro assorbito sarà pari a:  $-W = Q'_2 + Q'_1$  (positivo) partenza per assurdo è che:

$$\frac{W}{Q_2} = \eta_x > \eta_C = -\frac{W}{Q'_2}$$

Da cui segue che, deve essere:

$$-Q'_2 > Q_2$$

quindi:

$$Q_2 + Q'_2 < 0$$

Cioè la macchina di Carnot dovrebbe cedere alla sorgente a temperatura  $T_2$  una quantità di calore di calore maggiore di quanta ne assorba la macchina  $X$ . Cioè in un ciclo avverrebbe che per quanto riguarda la sorgente a temperatura maggiore che verrebbe fornita una quantità positiva di calore  $|Q_2 + Q'_2|$ . Per il I principio inoltre:

$$Q_2 + Q'_2 + Q_1 + Q'_1 = 0$$

Quindi:

$$Q_1 + Q'_1 = -(Q_2 + Q'_2) = |Q_2 + Q'_2| > 0$$

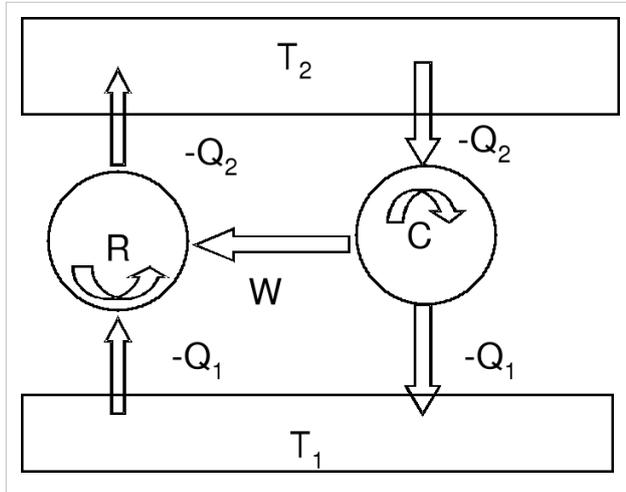
Cioè la stessa quantità di calore ( ma di segno opposto) verrebbe assorbita dalla sorgente più fredda  $T_1$ .

In definitiva l'insieme delle due macchine senza l'intervento di lavoro esterno, trasporterebbe del calore dalla sorgente a temperatura più bassa ad una temperatura maggiore, contraddicendo l'enunciato di Clausius del II principio della termodinamica quindi necessariamente:

$$\eta_x \leq \eta_C$$

Quindi è dimostrata la prima parte del teorema.

L'esempio numerico di seguito chiarisce quanto detto.



Per dimostrare la seconda parte aggiungiamo l'ipotesi che la macchina  $X$  sia reversibile e quindi sia possibile invertire il senso dei cicli di entrambe le macchine per cui la macchina  $X$  è ora indicata con  $R$  ed abbiamo invertito il ciclo facendola divenire una macchina frigorifera, mentre la macchina di Carnot è diventata una macchina termica.

Notare come siano stati scambiati tutti i segni (sia lavori che calori).

Per assurdo immaginiamo che la macchina di Carnot abbia un rendimento maggiore della macchina reversibile, ipotesi possibile per quanto abbiamo dimostrato precedentemente:

$$\frac{W}{Q_2} = \eta_R < \eta_C = -\frac{W}{Q'_2}$$

$$-Q'_2 < Q_2$$

quindi:

$$Q_2 + Q'_2 < 0$$

Cioè la macchina frigorifera  $X$  in un ciclo dovrebbe cedere alla sorgente a temperatura maggiore una quantità di calore maggiore di quanta venga sottratta dalla macchina di Carnot nello stesso tempo di un ciclo.

Inoltre per il I principio globalmente si deve avere:

$$Q_2 + Q'_2 + Q_1 + Q'_1 = 0$$

Quindi:

$$Q_1 + Q'_1 = -(Q_2 + Q'_2) = |Q_2 + Q'_2| > 0$$

Ciòè la stessa quantità di calore (ma di segno opposto) verrebbe assorbita dalla sorgente più fredda  $T_1$ .

In definitiva l'insieme delle due macchine senza l'intervento di lavoro esterno, trasporterebbe del calore dalla sorgente a temperatura più bassa ad una temperatura maggiore, contraddicendo l'enunciato di Clausius del II principio della termodinamica, ma questo è assurdo.

Quindi necessariamente tutte le macchine reversibili operanti tra le stesse temperature hanno lo stesso rendimento che è pari a quello della macchina di Carnot operanti tra le due temperature:

$$\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Un enunciato analitico del teorema di Carnot che consegue da quanto detto si può anche esprimere nella seguente maniera:

*Data una macchina ciclica operante tra due sorgenti di temperatura  $T_1$  e  $T_2$  con cui scambia in un ciclo le quantità di calore  $Q_1$  e  $Q_2$  rispettivamente. In un ciclo:*

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

*Se la macchina è reversibile la somma dei due termini al primo membro è zero.*

L'esempio numerico di seguito chiarisce quanto detto.

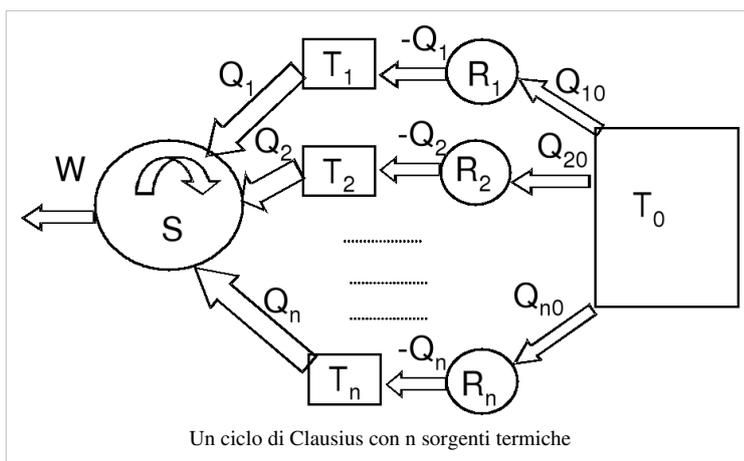
### Teorema di Clausius

La generalizzazione a n sorgenti termiche del teorema di Carnot espresso in forma matematica. È:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

che va sotto il nome di teorema di Clausius.

### Dimostrazione



La dimostrazione di questo teorema si fa sempre per assurdo. Immaginiamo di avere una macchina ciclica S che lavora con n sorgenti  $T_i$  scambiando un calore  $Q_i$  e producendo in un ciclo un lavoro (per il primo principio della termodinamica) pari a:

$$W = \sum_{i=1}^n Q_i$$

Aggiungiamo al sistema n macchine reversibili che funzionano tra due sole sorgenti  $T_i$  e  $T_0$ , scambiando con le prime (a  $T_i$ ) esattamente  $-Q_i$  e con la seconda

$Q_{i0}$  determinata in maniera precisa dalla condizione di reversibilità (che vale per ognuna delle n macchine reversibili):

$$\frac{Q_{i0}}{T_0} - \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

.....

$$\frac{Q_{i0}}{T_0} - \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

.....

$$\frac{Q_{n0}}{T_0} - \frac{Q_n}{T_n} = 0$$

Sommando tutte queste equazioni:  $\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = \frac{1}{T_0} \sum_{i=1}^n Q_{i0}$

Per ciascuna delle sorgenti  $T_1.. T_n$ , lo scambio di calore durante il ciclo è nullo. La sorgente  $T_0$  fornisce una quantità di calore pari a :

$$Q_0 = \sum_{i=1}^n Q_{i0} = T_0 \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i}$$

Il solo risultato della macchina complessiva è di trasformare in lavoro il calore prodotto da una sola sorgente di calore. Quindi se  $Q_0$  fosse positivo il risultato sarebbe in contraddizione con l'enunciato di Kelvin-Planck. Deve quindi essere necessariamente:

$$Q_0 \leq 0$$

Che l'unica cosa possibile da un punto di vista termodinamico è che venga trasformato del lavoro in calore entrante nella sorgente a temperatura  $T_0$ . In definitiva:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Notiamo che se il ciclo compiuto dalla macchina S fosse reversibile, esso può essere percorso in senso opposto, in questo caso tutti i calori debbono cambiare di segno ed otteniamo, ripetendo tutti i ragionamenti fatti, che:

$$\sum_{i=1}^n -\frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

La condizione che si verifichino contemporaneamente le due condizioni date implica che se S è una macchina reversibile:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

Nello stabilire le relazioni precedenti si è fatta l'ipotesi che il sistema scambi calore con un numero finito di sorgenti. Se le sorgenti sono un continuo alla sommatoria possiamo sostituire un integrale, e quindi scrivere nel caso reversibile:

$$\oint_{rev} \frac{dQ}{T} = 0$$

mentre se il ciclo è generico:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

# Entropia

◀ *Modulo precedente* Secondo principio della termodinamica

⬆ *Torna a Fisica classica*

▶ *Modulo successivo* Elettromagnetismo: la carica elettrica

La proprietà di un ciclo reversibile che l'integrale ciclico del rapporto tra il calore, scambiato da un sistema, e la temperatura istantanea durante un ciclo reversibile sia identicamente nullo.

Comporta che  $\frac{\Delta Q}{T}$  nelle trasformazioni reversibili sia una variabile di stato intensiva detta entropia. Infatti se ho due stati termodinamico di equilibrio A e B in tutte le trasformazioni termodinamiche reversibili che collegano tali stati la grandezza  $\frac{\Delta Q}{T}$  assume lo stesso valore.

Nel successivo paragrafo viene dimostrata tale affermazione.

## Entropia come funzione di stato

Siano A e B due stati di equilibrio di un sistema termodinamico. Consideriamo tre generiche trasformazioni reversibili I e II che portano il sistema dallo stato A allo stato B e la III reversibile che porta il sistema dallo stato B allo stato A.

Consideriamo due trasformazioni cicliche reversibili che passino tra tali stati di equilibrio  $AIBIIIA$  e  $AIIBIIIA$  per entrambe possiamo scrivere, grazie al teorema di Clausius, che:

$$\oint_{AIBIIIA} \frac{dQ}{T} = 0$$

$$\oint_{AIIBIIIA} \frac{dQ}{T} = 0$$

Ma anche scomponendo gli integrali:

$$\int_{A,I}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B,III}^A \frac{dQ}{T} = 0$$

$$\int_{A,II}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B,III}^A \frac{dQ}{T} = 0$$

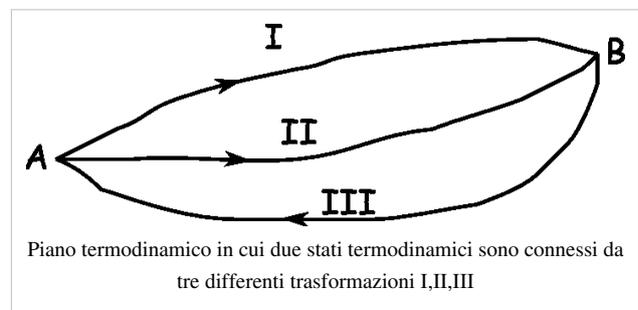
Sottraendo queste due espressioni:

$$\int_{A,I}^B \frac{dQ}{T} = \int_{A,II}^B \frac{dQ}{T}$$

Cioè nel passaggio da uno stato termodinamico generico A ad uno B, qualsiasi sia la trasformazione **reversibile** che congiunga i due stati, la quantità:

$$\int_{A,rev}^B \frac{dQ}{T} = S(B) - S(A)$$

Dipende solo dagli estremi e non dal percorso fatto è quindi una funzione di stato  $S$ , che viene chiamata entropia. L'entropia qui è definita a meno di una costante additiva: se io conosco il valore dell'entropia nello stato A, posso calcolarmi l'entropia nello stato B considerando una qualsiasi trasformazione reversibile, che mi porti il sistema dallo stato A a quello B, per cui posso calcolare agevolmente sia il calore scambiato che la temperatura istantanea.



L'entropia è una grandezza estensiva, per cui nel caso di un sistema fatto di più parti l'entropia è eguale alla somma delle entropie di tutte le parti che lo compongono.

## Universo termodinamico

La entropia ha un ruolo centrale in termodinamica la sua definizione è una conseguenza del II principio della termodinamica. Come vedremo subito la misura della sua variazione nell'universo termodinamico permette di quantizzare la irreversibilità delle trasformazioni.

Si definisce universo termodinamico il sistema completo comprendente sia le sorgenti presenti che i sistemi termodinamici che scambiano calore ed energia durante le trasformazioni termodinamiche. Nell'universo termodinamico l'energia interna totale non può variare a causa del I principio della termodinamico, per questa ragione fino a quando si parla della sola energia interna non si era introdotto tale concetto (l'universo termodinamico).

## Entropia ed irreversibilità

Consideriamo ora un sistema isolato che compie una trasformazione irreversibile adiabatica dallo stato A allo stato B (rappresentato dalla curva tratteggiata (I) che collega i due stati).

Un esempio di tale trasformazione potrebbe essere l'espansione libera di un gas o la messa a contatto di due oggetti a temperatura diversa (isolati termicamente dall'esterno). Riportiamo il sistema nello stato iniziale mediante una trasformazione reversibile II. Questo è quindi un ciclo termodinamico irreversibile per cui:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Scomponendo l'integrale:

$$\int_{A,I}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B,II}^A \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Essendo la trasformazione  $A \rightarrow B$  adiabatica reversibile (per ipotesi):

$$\int_{A,I}^B \frac{dQ}{T} \equiv 0$$

Mentre essendo II reversibile:

$$\int_{B,II}^A \frac{dQ}{T} = S(A) - S(B)$$

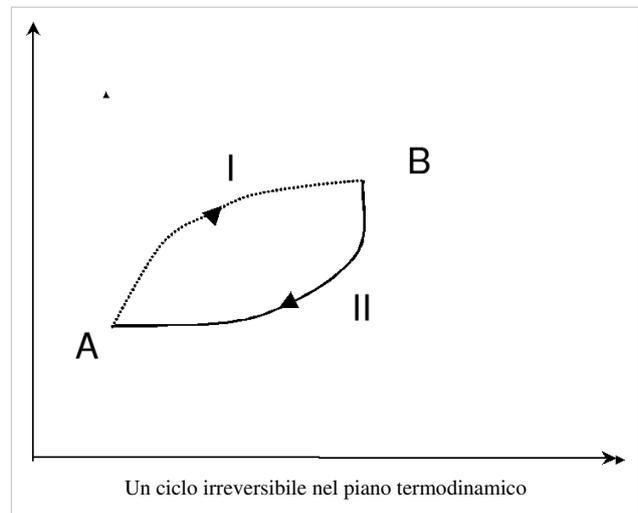
Quindi sostituendo:

$$S(B) \geq S(A)$$

Cioè le uniche trasformazioni adiabatiche spontanee possibili, sono quelle per cui l'entropia del sistema o aumenta o rimane eguale a se stessa.

L'aumento dell'entropia del sistema globale, detto spesso universo termodinamico, è una misura della irreversibilità della trasformazione fatta. Maggiore è tale aumento meno efficiente in senso lato è la trasformazione.

Notare come l'entropia come anche l'energia interna sia definita a meno di una costante arbitraria (l'arbitrarietà della costante nel caso dell'entropia viene rimossa dal III principio della termodinamica che stabilisce che allo zero



assoluto l'entropia di tutti i sistemi fisici sia nulla).

Il raggiungimento dell'equilibrio termodinamico comporta l'aumento dell'entropia a meno che non avvengano trasformazioni completamente reversibili.

Mentre l'energia dell'Universo non cambia con le trasformazioni, l'evoluzione del tempo ed il raggiungimento dell'equilibrio termodinamico sono accompagnati dall'aumento dell'entropia.

La produzione di calore per attrito si accompagna ad un aumento di entropia pari esattamente al lavoro diviso la temperatura di equilibrio del sistema.

La meccanica statistica definisce l'entropia come proporzionale al logaritmo del numero degli stati dinamici microscopici possibili del sistema. L'aumento dell'entropia nelle trasformazioni spontanee diventa quindi un fatto determinato dalla probabilità immensamente maggiore degli stati di equilibrio termodinamico rispetto a tutti gli stati macroscopici possibili. È possibile il concetto di entropia anche a tutti i sistemi complessi con un numero molto elevato di gradi di libertà.

### **Calcolo di variazione di entropia**

La degradazione del lavoro meccanico, ma anche di ogni altra forma di energia (chimica, elettrica, etc.) in calore porta ad una trasformazione di tale energia in calore alla temperatura in cui si trova il sistema. Calcolare in questo caso l'aumento di entropia dell'universo termodinamico durante il processo irreversibile è semplice. Infatti l'aumento di entropia si ottiene semplicemente dividendo l'energia trasformata in calore per la temperatura del sistema (nell'ipotesi che sia così grande la capacità termica del sistema da essere trascurabile l'aumento di temperatura). Infatti si potrebbe ottenere la stessa cosa in maniera reversibile fornendo all'universo termodinamico del calore alla stessa temperatura di equilibrio a cui si trova il sistema stesso.

---

# Elettromagnetismo

---

## Carica elettrica

---

L'elettromagnetismo rappresenta nel suo insieme una teoria completa che inquadra in un insieme estremamente compatto i fenomeni elettrici e magnetici. La costruzione di tale teoria è iniziata con le prime osservazioni fenomenologiche fatte al tempo dei greci, della esistenza e delle proprietà della magnetite ne abbiamo notizia già dalle opere di Talete. Nel tardo medioevo, verso il 1000 d.C., incomincia ad essere usata la bussola, probabilmente viene scoperta dai cinesi e riportata nell'area mediterranea dagli arabi, e secondo la tradizione italiana da Flavio Gioia. Data l'importanza della bussola nella navigazione il magnetismo terrestre e la sua fenomenologia sono state ben studiate sin dal tardo medioevo. Al contrario l'elettricità non ha avuto applicazioni fino al '700.

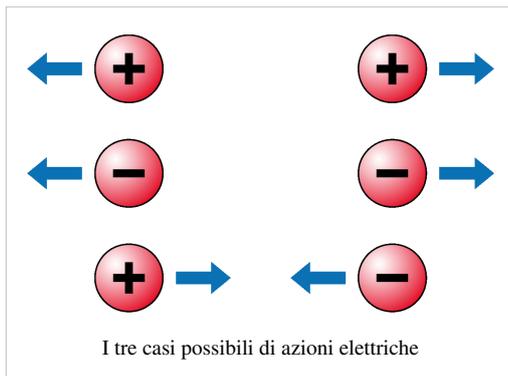
Le leggi che inquadrano perfettamente i fenomeni sono dette equazioni di Maxwell, che sono il frutto del lavoro sperimentale e teorico di un numero notevole di scienziati. Le leggi di Maxwell sono compatibili con la relatività, anzi si può dire che Einstein partendo dall'equazione dell'elettromagnetismo pose le basi della sua teoria. I fenomeni dell'elettromagnetismo sono stati infine inquadrati in maniera completa nella meccanica quantistica mediante la cosiddetta elettrodinamica quantistica. In questo libro di fisica classica ci limiteremo alla descrizione dovuta all'equazioni di Maxwell, quindi dando la spiegazione che storicamente era possibile dare fino alla fine dell'Ottocento.

### Fenomeni elettrici

Già nel VI secolo a. C. si era visto che strofinando oggetti di sostanze eguali ad esempio l'ambra, si esercitava tra di loro una azione a distanza repulsiva, come mostrato nella figura a fianco). L'effetto è più appariscente nella figura, di quanto sarebbe apparso ad un ricercatore del VI secolo a. C., in quanto le plastiche manifestano in maniera appariscente il fenomeno, a causa della loro bassissima resistenza elettrica che vedremo nel seguito. Mentre si può osservare che strofinando tra di loro due oggetti diversi, ad esempio vetro contro ambra, si aveva una forza attrattiva. Tale forza soddisfa il principio di azione e reazione. Le sostanze che per strofinio assumono la stessa carica dell'ambra sono dette cariche negativamente, mentre gli oggetti che si caricano come il vetro si dice che assumono carica elettrica positiva.



Dimostrazione della repulsione tra due nastri di plastica carichi negativamente



Il concetto nuovo dell'elettromagnetismo è il concetto di **carica elettrica**. La carica elettrica è un concetto chiave per comprendere i fenomeni elettromagnetici. Essa come la massa è una **proprietà della materia**. Questa proprietà si manifesta attraverso l'azione di forze a distanza (senza contatto dei corpi). Corpi carichi elettricamente interagiscono fra di loro manifestandosi forze di tipo elettrico (forza attrattiva o repulsiva). Le cariche si presentano in due forme (esprimibili grazie al segno + o -): positiva e negativa. La forza elettrica ha notevoli somiglianze con la forza gravitazionale, ma a differenza della gravità in cui esistono solo

masse gravitazionali positive, la presenza di due diversi tipi di cariche, rende la forza elettrica peculiare. Infatti due cariche dello stesso segno si respingono, mentre cariche di segno opposto si attraggono. La spiegazione microscopica del fenomeno risiede nella natura degli atomi, fatti da un numero eguale di elettroni (carichi negativamente) e da protoni (carichi positivamente). Le due cariche sono eguali ed opposte e tutti gli atomi hanno lo stesso numero di elettroni e protoni, quindi nello stato stabile sono neutri. Il nome elettrone deriva dal nome greco dell'ambra (in greco antico ἤλεκτρον, *elektron*). Gli elettroni orbitano intorno alla parte centrale dell'atomo, e sono quelli che possono essere o tolti o aggiunti per strofinio. Le dimensioni degli atomi di circa 0.2-0.4 nm dipendono dalle dimensioni degli orbitali degli elettroni. Il nucleo di dimensione dell'ordine di  $10^{-15}$  m contiene i protoni, assieme a delle particelle simili per quanto riguarda la massa, ma neutre dette neutroni.



Vi è una sostanziale differenza tra le sostanze isolanti in cui una volta strofinate le cariche in eccesso o in difetto rimangono per un tempo molto lungo dove sono state tolte o aggiunte e altre sostanze detti conduttori in cui le cariche sono apparentemente libere di muoversi tutti i metalli ma in genere quelli che vengono chiamati conduttori. Un conduttore può essere elettrizzato per strofinio ma anche mettendo in contatto con un altro corpo conduttore carico, in quanto le cariche libere si distribuiscono tra i due conduttori. Un ulteriore fenomeno che vedremo nel seguito è l'induzione elettrostatica in cui un conduttore isolato, a causa della presenza nelle sue vicinanze di un oggetto carico, ridistribuisce la carica sulla sua superficie, come vedremo per annullare il campo

elettrico nel suo interno, e quindi può con parico

## Legge di Coulomb

Sperimentalmente si verifica che due corpi puntiformi elettricamente carichi, fermi e posti nel vuoto, si scambiano una forza proporzionale al prodotto delle loro cariche ed inversamente proporzionale al quadrato della loro rispettiva distanza. Tale forza è diretta lungo la congiungente i due corpi ed è repulsiva se le cariche dei corpi sono di segno uguale ed in caso contrario attrattiva. La prima determinazione sperimentale delle proprietà sopra enunciate fu fatta da C. A. Coulomb che eseguì gli esperimenti tra il 1777 ed il 1785. Per tale ragione la forza che regola queste

interazioni è chiamata **legge di Coulomb**. Tale legge analiticamente si esprime come:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

Dove  $q_1$  e  $q_2$  sono le due cariche. La costante  $\epsilon_0$  ha il valore, determinato sperimentalmente, di:

$$\epsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$$

Il suo valore dipende dalla scelta dell'unità di misura della carica elettrica; questa non può essere ricavata da quantità meccaniche, ma ne è completamente indipendente. Di conseguenza, per potere misurare quantitativamente le interazioni fra cariche elettriche, è necessario definire l'unità di misura di una grandezza elettrica, presa come fondamentale. La grandezza scelta come fondamentale nel sistema internazionale (SI) è l'intensità di corrente, cioè la carica elettrica che attraversa una sezione di un circuito elettrico nell'unità di tempo. Tale unità di misura è chiamata Ampère (**A**). Quindi, nel SI, la carica elettrica è una grandezza derivata chiamata *Coulomb* (**C**)  $1 \text{ C} = \text{A} \cdot \text{s}$ .

Notiamo come la forza elettrica sia in genere molto più intensa di quella gravitazionale almeno a livello atomico. Con un semplice esempio di **confronto tra le due forze a livello atomico** si può dimostrare come il rapporto tra l'attrazione elettrica e la attrazione gravitazionale nell'atomo di idrogeno è di circa  $10^{39}$ , quindi a livello atomico in genere solo la forza elettrica genera effetti degni di nota. A livello nucleare l'interazione elettrica negli atomi di piccola massa è in genere meno importante della cosiddetta interazione forte che rappresenta un'altra delle forze fondamentali della natura.

## Quantizzazione della carica elettrica

Come è stato dimostrato nel 1909 da R. Millikan, con il famoso Esperimento di Millikan, tutte le cariche misurate in natura sono multiple intere di un valore di base, definito **quanto di carica** o **carica fondamentale**. Esso ha valore pari a  $e = 1.60217653 \times 10^{-19} \text{ C}$ . La carica elementare è una delle costanti fisiche della fisica moderna. La carica di un elettrone è pari a **-e**, mentre quella del protone è pari ad **e**.

Bisogna precisare che il modello standard della fisica moderna prevede l'esistenza di particelle con carica frazionaria, i quark, che hanno carica  $2/3$  e  $-1/3$  in unità di **e**, ma il modello prevede che i quark non possono essere separati e quindi esistono solo all'interno di particelle con carica intera. Il fatto che non siano state mai misurate singolarmente, a causa di tale proprietà intrinseca, fa sì che non possano essere considerate cariche elementari.

## Conservazione della carica elettrica

La legge di conservazione della carica stabilisce che la carica elettrica non può essere né creata né distrutta. Quindi la quantità di carica elettrica è sempre conservata. In nessun esperimento mai è stata rilevata la non conservazione della carica, la conservazione della carica vale sia in Fisica classica, in teoria della relatività che nella meccanica quantistica.

In pratica tale principio stabilisce che, dato un certo volume, la variazione di carica al suo interno può solo avvenire mediante una corrente elettrica che fluisce attraverso la superficie di separazione del volume stesso con il mondo esterno (se il flusso è entrante la carica cresce, se il flusso è uscente la carica decresce).

## La materia è elettricamente neutra

Gli atomi, nello stato di equilibrio, hanno un numero esattamente eguale di elettroni (carichi negativamente) e di protoni (carichi positivamente). Per cui, nello stato di equilibrio, gli atomi che sono le entità elementari che costituiscono la materia, nella credenza ottocentesca, sono neutri. La materia nello stato elementare sulla terra è composta da atomi, che essendo elettricamente e singolarmente neutri determinano la neutralità della materia.

Vi è da aggiungere che a temperatura ambiente, media della temperatura sulla terra, la probabilità che gli atomi perdano degli elettroni per agitazione termica è estremamente bassa, ma a temperatura elevata come ad esempio all'interno di una stella, l'agitazione termica rende molto probabile la non neutralità degli atomi: atomi che hanno perso o acquistato uno o più elettroni si chiamano ioni. Quindi lo stato più comune della materia nell'universo, all'interno delle stelle, è quello di plasma, cioè un fluido globalmente neutro in cui si muovono liberamente cariche elettriche positive e negative.

## Esercizi suggeriti

Esercizi suggeriti prima di proseguire, il primo riguarda la forza elettrica tra **tre cariche poste sulla stessa linea**, mentre il secondo considera il caso di **tre cariche disposte sui vertici di un triangolo**, in cui il carattere vettoriale delle forze elettriche va tenuto in considerazione, e infine uno sul **campo generato da quattro cariche di segno opposto sui vertici di un quadrato**.

Argomento seguente: I Campi Elettrici

# Campi elettrici

---

Argomento precedente: La carica elettrica

## Definizione di campo elettrico

Sia  $\vec{F}$  la forza coulombiana e  $q_0$  la carica elettrica di prova che intendiamo utilizzare.

Possiamo definire un campo vettoriale  $\vec{E}$  dato da:  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$

Possiamo definire il campo anche come  $\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0}$ , tenendo presente che il limite non è da intendere in

senso classico (poiché la carica è quantizzata e quindi non può essere fisicamente resa piccola a piacere) bensì significa che la carica  $q_0$  deve essere abbastanza piccola rispetto alle cariche che generano il campo, in maniera da modificare il meno possibile la distribuzione di carica che consideriamo.

La forza di interazione elettrostatica è una forza centrale e quindi conservativa. Cioè il lavoro fatto dalla forza elettrica non dipende dal percorso lungo il quale è stato calcolato, ma solo dagli estremi del percorso. Il campo elettrico ha le dimensioni di una forza diviso una carica elettrica, estendendo il concetto di conservatività dalle forze ai campi si può affermare che il campo elettrostatico è conservativo, cioè ammette l'esistenza di un campo scalare detto potenziale elettrico definito in maniera univoca a meno di una costante arbitraria, che vedremo nel seguito.

Le dimensioni fisiche del campo elettrico sono quelle di una forza divisa una carica. L'unità di misura è nel Sistema Internazionale il Newton per Coulomb ( $\text{N C}^{-1}$ ) o equivalentemente il Volt per metro ( $\text{V m}^{-1}$ ). Il Volt (simbolo V) verrà introdotto nel seguito.

Dal punto di vista del mondo fisico in realtà si ha che le forze tra oggetti distanti vengono mediate dai campi. Concettualmente la differenza è fondamentale, infatti mentre alla azione a distanza tra due oggetti non possiamo associare un tempo caratteristico di propagazione, il campo originato da una carica si propaga con una velocità

---

caratteristica del campo stesso. Nel caso del campo elettrico nel vuoto tale velocità è quella della luce, per cui nella maggior parte dei casi, essendo molto elevata rispetto alle altre velocità con cui siamo abituati a lavorare appare praticamente infinita. Ma nei fenomeni elettrici variabili nel tempo la velocità della luce gioca un ruolo importante per la comprensione dell'elettromagnetismo. Oltre al ruolo concettualmente essenziale del campo, la sua introduzione permette di studiare in maniera più semplice l'elettrostatica. Infatti la presenza di cariche di due segni presenta una ovvia difficoltà nel trattare la distribuzione generale di molte cariche.

## Campo Elettrico generato da una carica puntiforme

Consideriamo il caso di una carica puntiforme  $q$  posta nell'origine delle coordinate ed una carica  $q_0$  posta nel punto  $P$  a distanza  $r$  dall'origine.

Con la legge di Coulomb possiamo scrivere:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \hat{u}_n$$

dove  $\hat{u}_n$  è il versore del raggio. In questo semplice caso, dalla definizione data di campo elettrico segue che:

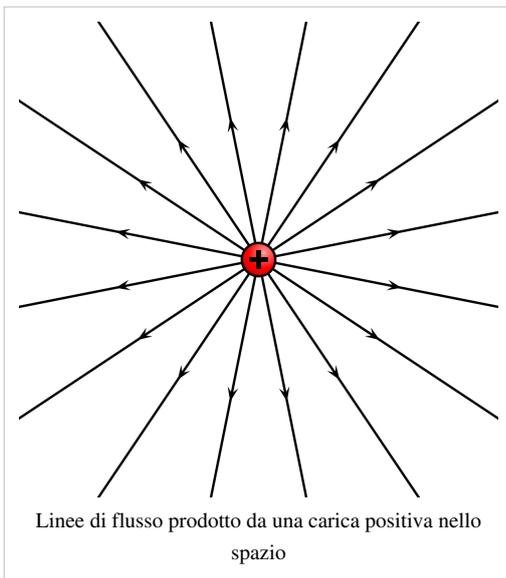
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_n$$

Se la carica  $q$  fosse stata non nell'origine, ma nel punto  $P'$  di coordinate  $r'$  semplicemente l'espressione del campo cambierebbe in:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r - r')^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Avendo indicato con  $\hat{u}_n = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{r - r'}$  il versore che identifica la direzione tra  $\vec{r}'$  ed  $\vec{r}$ .

## Rappresentazione mediante linee di campo



Per rappresentare i campi elettrici spesso si usa una utile rappresentazione grafica mediante le cosiddette linee del campo. In tale rappresentazione la tangente alla linea determina la direzione del campo. Quindi esce dalle cariche positive che sono quindi sorgenti del campo (come mostrato nella figura a sinistra) ed entra nelle cariche negative che si considerano dei pozzi (come mostrato nella figura a destra). La densità delle linee è una misura dell'intensità del campo stesso. Quindi nell'esempio mostrato vicino alle sorgenti o pozzi del campo vi un maggior numero di linee per unità di superfici, rispetto alle zone lontane dove il campo si attenua. La rappresentazione è utile per mostrare graficamente il campo elettrico e sarà usata nel seguito.

## Espressione del campo in coordinate cartesiane

La rappresentazione in coordinate cartesiane permette di calcolare in maniera analitica il problema. Viene fatto il calcolo esplicito per mostrare l'utilità della formula compatta appena indicata.

Sia  $P = (x_0, y_0, z_0)$  il punto in cui risiede la carica che genera il campo elettrico. Il punto dove calcoliamo un campo ha coordinate  $P = (x, y, z)$ .

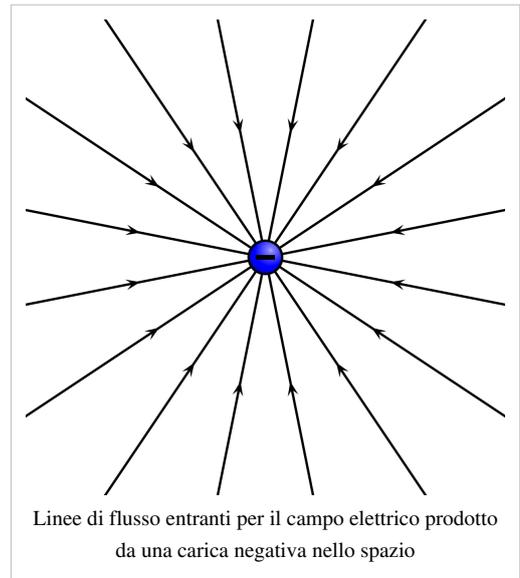
Il versore  $\hat{u}_n$  ha componenti:

$$\hat{u}_n = \left( \frac{x - x_0}{r - r'}, \frac{y - y_0}{r - r'}, \frac{z - z_0}{r - r'} \right).$$

Una volta ottenute le componenti del versore possiamo scomporre il campo in componenti lungo gli assi:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(x - x_0)}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(y - y_0)}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$



$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(z - z_0)}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

Questa è l'espressione esplicita del campo elettrostatico generato dalla carica  $q$  posta nel punto di coordinate  $r'$  nel punto di coordinate  $r$ .

## Sovrapposizione dei Campi Elettrici

Se invece di avere una singola carica avessimo più cariche il campo elettrico è semplicemente pari alla somma dei campi generati dalle singole cariche. Tale proprietà non è banale in quanto non tutti campi di forze godono di tale principio elementare di sovrapposizione.

Vi è da aggiungere che anche il campo elettrico in presenza di materia non rispetta più tale principio. Infatti, quando i campi raggiungono intensità molto elevate, la loro azione può produrre effetti irreversibili sulla materia stessa. Quindi a tale irreversibilità si accompagna una non sovrapposizione degli effetti. La ragione di questo fatto può dipendere da vari fenomeni:

- *La materia sulla terra è fatta di molecole, cioè aggregati di atomi, tenute insieme da forze di natura elettrica. Quando i campi esterni eguagliano o superano tali forze di coesione le molecole stesse vengono spaccate.*
- *Le forze elettriche determinano la coesione del nucleo con gli elettroni, quindi, quando i campi esterni sono confrontabili con i campi interni agli atomi, i campi esterni spaccano gli atomi.*
- *In presenza di cariche libere, queste vengono accelerate dai campi, e se nel processo raggiungono velocità così elevate che la loro energia cinetica è sufficiente a ionizzare gli atomi che urtano alla fine del loro cammino, tali elettroni liberati nel processo a loro volta vengono accelerati e quindi si produce una moltiplicazione a valanga.*

Vi è da osservare che la non sovrapposibilità degli effetti in ogni caso riguarda il mondo macroscopico con la sua complessità, ma a livello microscopico la sovrapposizione degli effetti è invece sempre valida per quanto riguarda il campo elettrico. In ogni caso la trattazione inizialmente riguarda i campi elettrici nel vuoto o con presenza molto scarsa di materia. Quindi tale principio generale di sovrapposizione lo considereremo inizialmente valido. Se non fosse valido non potremmo fare in maniera semplice somme o integrali come faremo nella trattazione seguente.

## Distribuzione discreta di carica

Nel caso di  $n$  cariche disposte nello spazio il principio di sovrapposizione si traduce dal punto di vista matematico, nell'espressione:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{u}_i$$

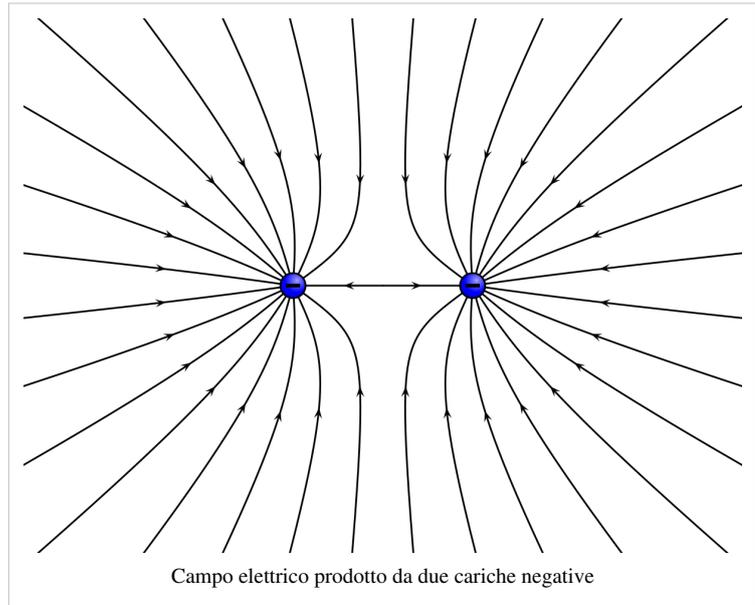
Dove indichiamo con  $q_i$  la  $i$ -esima carica della distribuzione con posizione  $r_i = (x_i, y_i, z_i)$

In modo del tutto analogo scriviamo le componenti del campo:

$$E_x = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i(x - x_i)}{\{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i(y - y_i)}{\{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i(z - z_i)}{\{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$



Campo elettrico prodotto da due cariche negative

## Esercizi utili

**Campo generato da quattro cariche eguali sui vertici di un quadrato, Il campo di un quadrupolo ed anche il campo elettrico di otto cariche elettriche poste sui vertici di un cubo**

## Caso di un sistema con una distribuzione continua di carica

Fino ad adesso abbiamo trattato casi in cui riuscivamo a contare le particelle cariche. Ma nelle esperienze pratiche si deve tenere conto che il numero di particelle è molto elevato. Quindi introduciamo una nuova entità:

Sia  $d\tau$  un volumetto infinitesimo tale che contenga un numero abbastanza elevato di cariche. Si definisce densità di carica la quantità:  $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ , ovvero la quantità di carica inclusa nel volumetto infinitesimo.

Supponiamo di voler misurare il campo in un punto di  $P \in \mathbb{R}^3$  di coordinate  $(x, y, z)$  e di avere una distribuzione di carica generatrice del campo. Isoliamo un volumetto che contiene una carica  $dq$  a coordinate  $(x', y', z')$ .

Abbiamo che il campo infinitesimo generato dalla distribuzione di carica sarà:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u} = \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}$$

Il campo totale sarà ottenuto con una quadratura su tutto lo spazio:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_{\tau} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}$$

Analogamente alla distribuzione discreta possiamo ottenere le componenti del campo:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(x', y', z')(x - x') dx' dy' dz'}{\{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(x', y', z')(y - y') dx' dy' dz'}{\{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

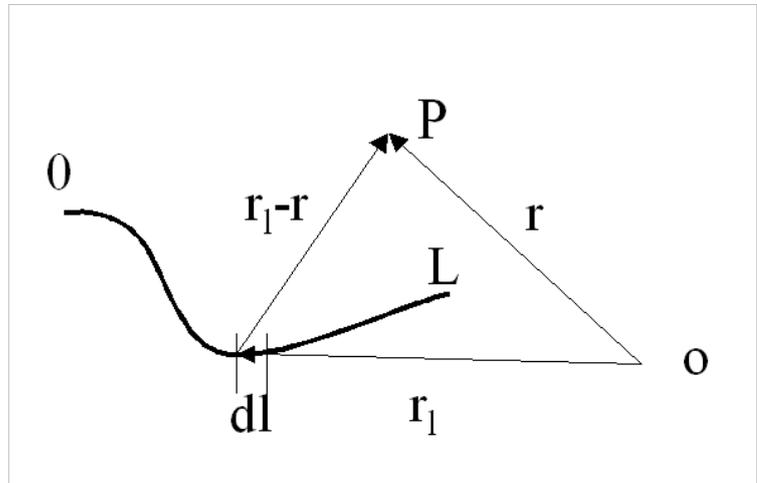
$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(x', y', z')(z - z') dx' dy' dz'}{\{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

Oltre alla densità di carica volumica si definiscono le densità di carica superficiale e lineare:

$$\sigma = \frac{dq}{d\Sigma}$$

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

Il campo elettrico generato in un punto  $P$  generico dello spazio, posto alla distanza  $\vec{r}$  dall'origine  $O$ , da una distribuzione lineare di lunghezza  $L$  vale:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda dl}{|\vec{r} - \vec{r}_l|^3} (\vec{r} - \vec{r}_l)$$

Dove  $\vec{r}_l$  è il vettore posizione del generico elemento  $dl$  della linea con densità di carica  $\lambda$

### Esempi su distribuzioni continue di carica

Per quanto riguarda la distribuzione lineare di carica gli esercizi suggeriti sono: **sbarretta isolata**, **due sbarrette allineate**, **due sbarrette perpendicolari** e **un anello carico**.

La distribuzione superficiale viene esaminata in due casi: **un disco isolante** ed **un disco conduttore**.

Argomento seguente: La legge di Gauss

# Legge di Gauss

---

Argomento precedente: Campo elettrico

## Introduzione al teorema di Gauss

Calcolare il campo generato da una distribuzione qualsiasi di carica può essere molto laborioso, anche se da un punto di vista concettuale è semplice. Infatti basta suddividere le cariche sorgenti in piccoli elementi e calcolare il campo risultante. Tale semplificazione è sempre possibile in condizioni statiche. Il teorema di Gauss che vale non solo per il campo elettrico, ma anche per quello gravitazionale, permette di determinare nel caso di situazioni di particolare simmetria il valore del campo.

## Flusso di un campo vettoriale

Dato un campo vettoriale  $\vec{A}$  ed un generico elemento infinitesimo di superficie  $d\vec{s}$  nello spazio in cui è definito  $\vec{A}$ , è possibile associare ad ognuno di tali elementi superficie una grandezza scalare:

$$d\Phi(\vec{A}) = d\vec{s} \cdot \hat{n}$$

che viene chiamata il flusso di  $\vec{A}$  attraverso la superficie  $d\vec{s}$ , avendo definito con  $\hat{n}$  il versore normale alla superficie. Fin quando la superficie è aperta, vi è un'indeterminazione nella direzione dell'elemento di superficie. Se l'elemento di superficie fa invece parte di una superficie chiusa, si assume per convenzione che la normale sia diretta nella direzione esterna alla superficie. Spesso si preferisce associare un campo vettoriale agli elementi di superficie definendo:

$$\vec{d}s = d\vec{s} \hat{n}$$

Quindi il flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa  $S$  del vettore  $\vec{A}$  è definito da:

$$\Phi(\vec{A}) = \int_S \vec{A} \cdot \vec{d}s$$

Il concetto di flusso deriva dall'idraulica, nel quale il flusso della velocità di un fluido attraverso una superficie è proporzionale alla portata, cioè la quantità di fluido che attraversa la sezione del condotto considerato. Se il fluido è incompressibile e la superficie attraverso cui si calcola la portata è chiusa, il flusso è identicamente nullo, altrimenti la materia non si conserverebbe.

## Enunciazione del teorema di Gauss

L'enunciato del teorema di Gauss è che **il fluire del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è pari alla somma algebrica delle cariche interne diviso la costante dielettrica del vuoto:**

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{\epsilon_0}$$

Eventuali cariche all'esterno della superficie chiusa non portano alcun contributo al flusso di  $\vec{E}$ .

Il teorema di Gauss vale per qualunque campo vettoriale additivo tale che, esistendo sorgenti puntiformi del campo stesso, abbia una dipendenza in modulo proporzionale all'inverso del quadrato della distanza. Il teorema di Gauss può essere applicato al campo gravitazionale.

Per somma algebrica s'intende che se all'interno della superficie la carica totale è nulla, il flusso è nullo. Se la somma delle cariche è positiva, il flusso è positivo, se la somma delle cariche è negativa, il flusso è negativo.

Se la distribuzione di cariche è continua (densità volumetrica, superficiale o lineare) alla somma algebrica si sostituirà l'integrale.

La dimostrazione segue direttamente dalla legge di Coulomb, secondo cui ogni carica puntiforme  $Q_i$  genera un campo radiale che varia come  $1/r_i^2$  (dove  $r_i$  è la distanza dalla carica stessa).

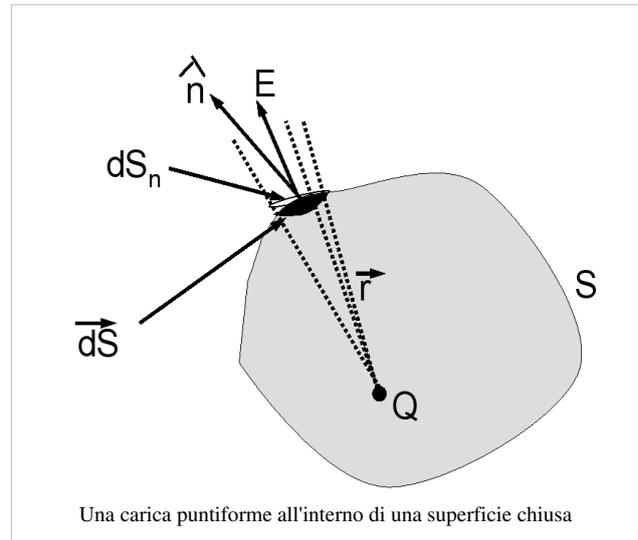
---

La scelta della forma della legge di Coulomb, in cui artificialmente abbiamo introdotto come costante moltiplicativa  $1/4\pi$ , dipende dal fatto che con tale definizione la legge di Gauss in elettrostatica assume la forma semplice fornita dall'equazione appena data.

La legge di Gauss è di notevole importanza in quanto consente, non solo di dedurre le cariche presenti una volta che si conosca il campo elettrico, ma anche di calcolare il campo elettrico in maniera semplice, quando la situazione fisica è dotata di particolare simmetria.

### Dimostrazione del Teorema di Gauss

Consideriamo una carica puntiforme positiva all'interno di una superficie  $S$  dello spazio (in un punto qualsiasi all'interno). Il flusso elementare del campo elettrico vale:



$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q dS_n}{r^2}$$

Dove  $dS_n$  è la proiezione dell'elemento di superficie  $\vec{dS}$  sulla sfera di raggio  $r$  e centro sulla carica  $Q$ .

L'estensione agli angoli nel piano sono gli angoli solidi. Si definisce angolo solido come rapporto tra l'elemento di superficie normale intercettato ed il quadrato della distanza:

$$d\Omega = \frac{dS_n}{r^2}$$

L'integrale lungo tutte le direzioni possibili in 3 dimensioni di un angolo solido vale  $4\pi$ . Da questa considerazione segue che:

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q d\Omega$$

Per calcolare il flusso totale attraverso  $S$  basta integrare su tutta la superficie  $S$ . Cioè:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{4\pi} d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

La superficie chiusa copre, intorno alla carica  $Q$ , l'intero angolo solido. Vediamo quindi che il flusso di  $\vec{E}$  non dipende dalla forma della superficie: se la superficie avesse delle rientranze tali rientranze verrebbero attraversate dal cono un numero dispari di volte e i vari contributi si elidrebbero due a due. Come appare nella figura a fianco.

Lo spostare la carica in un altro punto all'interno della superficie non cambierebbe in nessuna maniera il risultato. Se la carica all'interno fosse stata negativa il flusso sarebbe risultato negativo in quanto le linee del campo sarebbero dirette verso la carica stessa.

Se sono poste  $n$  cariche  $Q_i$  all'interno della superficie  $S$  potremo scrivere:

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left( \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n (\vec{E}_i \cdot d\vec{S}) = \sum_{i=1}^n d\Phi_i$$

Abbiamo applicato il principio di sovrapposizione dei campi generati dalle singole cariche. Integrando su tutta la superficie abbiamo quindi che:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S d\Phi = \int_S \sum_{i=1}^n d\Phi_i = \sum_{i=1}^n \int_S d\Phi_i = \sum_{i=1}^n \Phi_i = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{\epsilon_0}$$

Consideriamo ora il caso di una carica  $Q$  esterna alla superficie  $S$ , così come in figura.

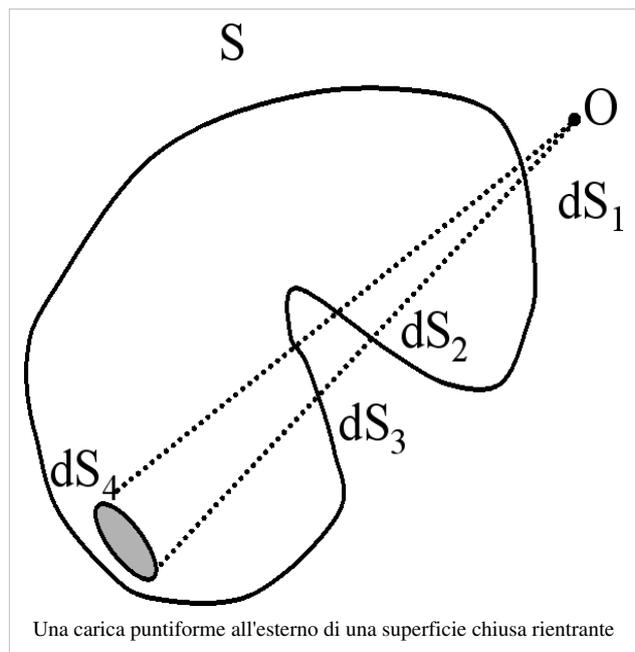
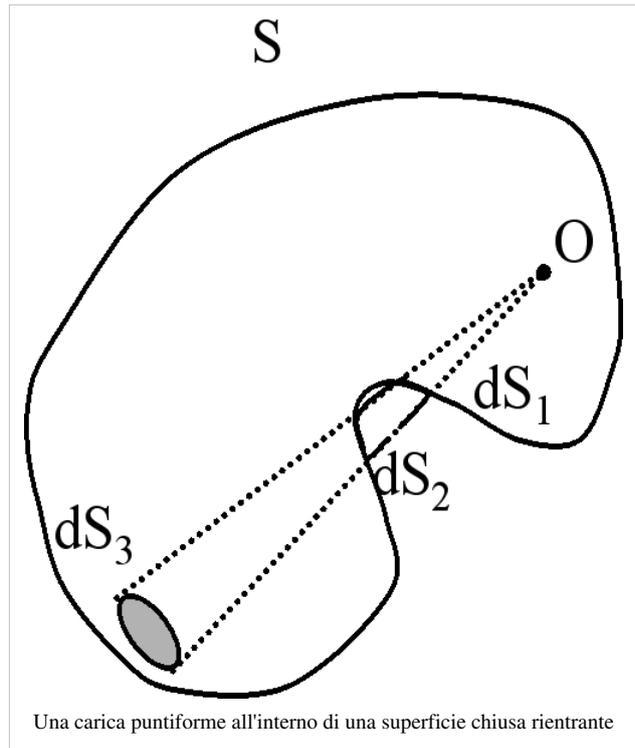
Il contributo al flusso degli elementi  $dS_1$  e  $dS_2$  è in modulo eguale, ma di segno opposto;

quindi il loro contributo si può omettere, come quello di  $dS_3$  e  $dS_4$ . In generale, partendo dal punto  $O$  ed andando in qualsiasi direzione, la superficie chiusa, attraverso la quale si vuole calcolare il flusso del campo elettrico, viene intersecata sempre un numero pari di volte.

I contributi delle varie intersezioni si elidono sempre due a due. Quindi, comunque sia fatta tale superficie, si ha sempre:

$$\Phi_S(\vec{E}) = 0$$

Il teorema di Gauss è conseguenza diretta della legge di Coulomb, quindi non aggiunge niente rispetto a tale legge. Tale teorema permette di determinare le cariche presenti in una regione di spazio una volta che si conosca il campo elettrico. D'altro canto quando si hanno condizioni di simmetria permette di calcolare esattamente il valore del campo.



Se le cariche fossero distribuite in maniera continua, ad esempio con densità di carica  $\rho$ , se si indica con  $T$  il volume racchiuso dalla superficie  $S$  e con  $d\tau$  l'elemento di volume:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_T \rho d\tau$$

### Casi con particolari simmetria

Alcuni esempi mostrano l'applicazione del teorema di Gauss, in genere gli esempi sono classificati in funzione delle proprietà di simmetria. La simmetria sferica è quella che permette maggior numero di esempi: nuvola sferica, guscio sferico, guscio con foro, campo elettrico sulla terra. Possono essere fatti altri esempi di simmetria cilindrica, due esempi con simmetria piana: doppio strato, giunzione p-n.

### Il teorema di Gauss in forma differenziale

Spesso tale teorema in forma locale viene chiamato *prima equazione di Maxwell*. Notiamo come tale espressione locale sia soggetta a delle limitazioni al contrario della forma integrale appena data. La dimostrazione si basa su un teorema di matematica, il teorema della divergenza. Tale teorema afferma che il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa  $S$  è pari all'integrale di volume della divergenza del campo stesso calcolato sul volume  $T$  racchiuso da  $S$ .

La divergenza di un campo vettoriale è uno scalare che misura in qualche maniera la variazione spaziale del campo stesso. La sua definizione è la seguente, dato un campo vettoriale  $\vec{A}$  e un operatore vettoriale, definito con  $\vec{\nabla}$ :

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Il prodotto scalare di  $\vec{\nabla}$  con tale generico campo vettoriale viene chiamata divergenza:

$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Tenuto conto di tale affermazione, il teorema di Gauss esteso ad una generica superficie  $S$  che racchiude il volume  $T$  si può riscrivere:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_T \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dT = \frac{1}{\epsilon_0} \int_T \rho dT$$

Dall'eguaglianza nell'ultima espressione dei due integrali, qualunque sia il volume di integrazione  $T$ , segue che gli integrandi coincidono, quindi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Questa espressione detta equazione in forma locale è formalmente equivalente alla legge di Gauss, da cui è stata ricavata con l'ipotesi implicita che nel dominio considerato (il volume  $T$ ) il campo elettrico sia derivabile in ogni punto. Quindi la limitazione della forma locale è proprio nei casi in cui si ha discontinuità del campo elettrico.

Ad esempio, nella separazione tra due mezzi, caso non del vuoto, il campo elettrico ha in genere una discontinuità. Tale limitazione non comporta nessun problema se si divide il dominio in sottodomini in cui tale discontinuità è rimossa. Il problema riguarderà il fatto di imporre le condizioni di raccordo tra i vari domini. Il teorema di Gauss in forma locale collega la divergenza del campo elettrico alla densità volumetrica di carica. Tale forma mal si adatta a considerare casi in cui la carica sia distribuita su superfici o lungo linee.

Argomento seguente: Potenziale elettrico

# Potenziale elettrico

Argomento precedente: La legge di Gauss

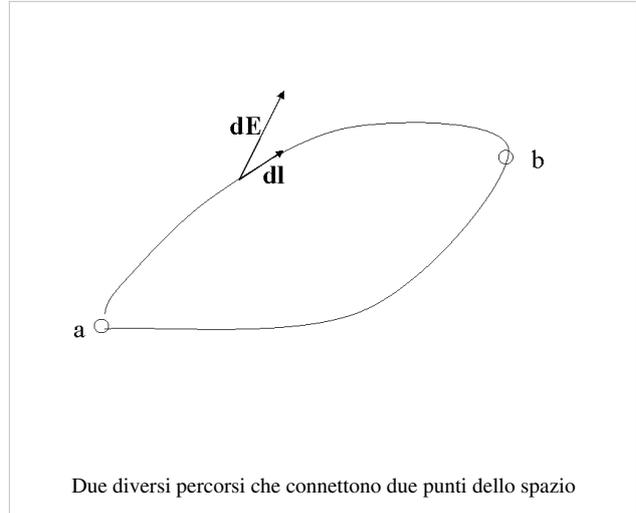
## Potenziale elettrico

Estendendo il concetto di conservatività definito per le forze ai campi è facile mostrare come il campo elettrico generato da una carica puntiforme sia conservativo, cioè con riferimento alla figura a fianco, l'integrale di linea per andare da un punto a ad un punto b:

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

non dipende dal percorso seguito, ma solo dagli estremi di integrazione. Questa è una conseguenza del fatto che la forza elettrica è centrale. Quindi, analogamente all'energia potenziale, possiamo definire **differenza di potenziale elettrico** (d.d.p)  $V_b - V_a$  presente tra i punti a e b:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



## Carica puntiforme

Consideriamo, un caso particolare, il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da una carica puntiforme  $Q$  posta nell'origine delle coordinate, come abbiamo visto vale:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Sostituendo, questa espressione, nella equazione precedente:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b |\vec{E}| \cdot |d\vec{l}| \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo compreso tra i vettori  $\vec{E}$  e  $d\vec{l}$ . Il prodotto  $dl \cos \theta$ , rappresenta la proiezione lungo  $r$  di  $dl$ , quindi  $dl \cos \theta = dr$ :

$$V_b - V_a = - \int_a^b |E| dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{r_b}^{r_a} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left[ \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right]$$

Quindi:

$$V_b = V_a + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left[ \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right]$$

Se  $r_a = \infty$  e poniamo che  $V(r_a) = 0$ :

$$V_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_b}$$

Quindi assunto che all'infinito il potenziale sia nullo (una scelta arbitraria) e cambiando il nome di  $r_b$  in  $r$ :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

### Varie cariche puntiformi

Se la distribuzione delle cariche è limitata nello spazio è sempre possibile assumere che il potenziale all'infinito sia nullo. Immaginando di avere  $n$  cariche  $Q_i$  disposte ciascuna nella posizione di raggio vettore  $\vec{r}_i$  (applicando il principio di sovrapposizione degli effetti) l'espressione del potenziale elettrico, nel punto individuato dal raggio vettore  $\vec{r}$ , diventa:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Essendo  $V$  una funzione scalare, il calcolo del potenziale è molto più semplice.

### Caso continuo

Con ovvie estensioni al caso continuo, nel caso di distribuzione di cariche su una linea con densità lineare  $\lambda$ :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda dl}{|\vec{r} - \vec{r}_l|}$$

Dove  $\vec{r}_l$  è il vettore posizione del generico elementino  $dl$ .

Con ragionamenti analoghi per distribuzione superficiale:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma ds}{|\vec{r} - \vec{r}_s|}$$

e per distribuzione volumetrica:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_T \frac{\rho d\tau}{|\vec{r} - \vec{r}_\tau|}$$

Queste relazioni sono analoghe alle equazioni ricavate per il campo elettrico.

### Dal potenziale elettrico al campo elettrico

Quando abbiamo definito il potenziale elettrico siamo in realtà partiti dalla relazione infinitesima:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Cioè la d.d.p. elettrico tra 2 punti, in coordinate cartesiane  $(x,y,z)$  e  $(x+dx,y+dy,z+dz)$ , è pari all'opposto del prodotto scalare tra il campo elettrico e lo spostamento infinitesimo sulla traiettoria:

$$dV = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

Ma d'altro canto, secondo la definizione di differenziale, vale:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Quindi:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z};$$

Ricordando che abbiamo definito  $\vec{\nabla}$  (detto *Nabla*) come:

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Si ha che le equazioni precedenti si possono scrivere in maniera più compatta come:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

## Il dipolo elettrico

Si chiama dipolo elettrico un insieme di due cariche eguali ed opposte:  $+q$  e  $-q$ , poste come nella figura a fianco a distanza  $2a$ . Un sistema di questo genere viene chiamato dipolo elettrico ed è caratterizzato dal suo momento di dipolo elettrico  $\vec{p}$ :

$$\vec{p} = 2q\vec{a}$$

Orientato dalla carica negativa a quella positiva. Il dipolo elettrico è tra le più semplici distribuzioni di cariche, solo la carica puntiforme è più semplice. Mentre in natura le cariche elementari non sono quasi mai isolate, in quanto la materia è neutra, esistono a livello elementare dipoli molecolari.

Il calcolo del potenziale elettrico di un dipolo a distanza molto maggiore della separazione tra le cariche è una espressione molto utile. Il potenziale elettrico (supposta nulla la d.d.p. rispetto all'infinito) in un punto  $P$  distante  $r$  dall'asse del dipolo posto nell'origine delle coordinate lungo un asse cartesiano (vedi figura a fianco) vale:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Se  $r_1$  ed  $r_2$  (moduli delle distanze) sono molto maggiori della distanza tra le cariche  $2a$ , e se indichiamo con  $\theta$  l'angolo formato tra l'asse del dipolo con la direzione  $\vec{r}$ , si può scrivere:

$$r_2 - r_1 \approx 2a \cos \theta$$

ed anche:

$$r_1 r_2 \approx r^2$$

Quindi possiamo riscrivere l'equazione precedente come:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{2a}{r^2} \cos \theta$$

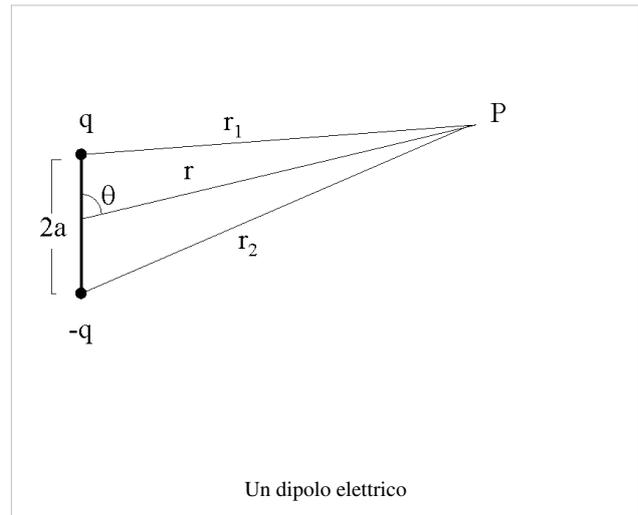
Dalla definizione del momento di dipolo elettrico come vettore potremo scrivere in maniera compatta:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Tale espressione è valida solo per punti a distanza grande rispetto alla separazione delle cariche, nei punti vicini bisogna usare l'espressione esatta.

Nel caso particolare mostrato nella figura assunto come asse delle  $z$  la direzione del dipolo, in coordinate cartesiane, essendo  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , tale espressione diventa:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$



Da tale espressione esplicita è possibile calcolare le tre componenti del campo elettrico secondo i tre assi cartesiani, sempre nell'approssimazione di distanza grande rispetto alle dimensioni del dipolo stesso:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pzx}{r^5}$$

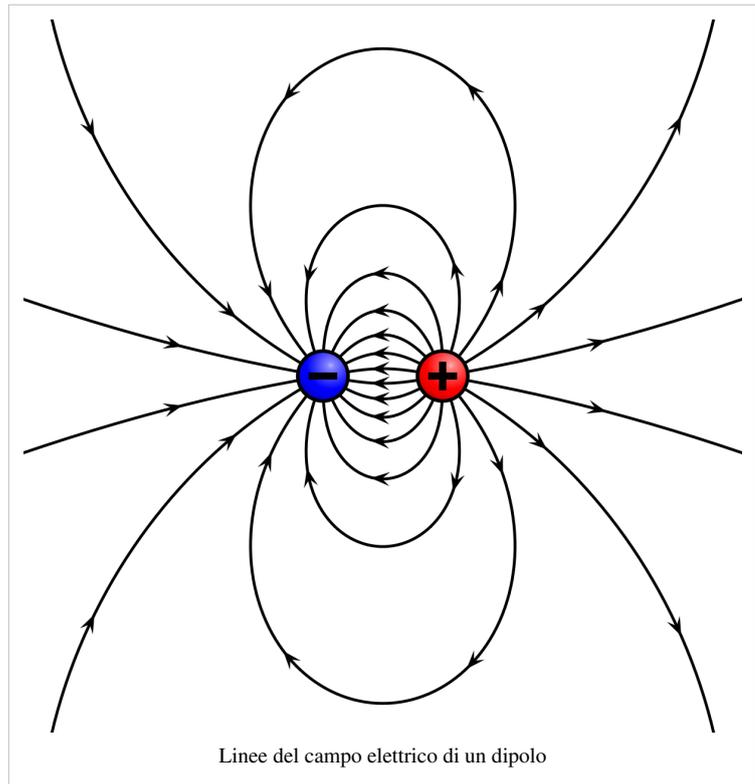
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pzy}{r^5}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^5} (3z^2 - r^2)$$

Nella figura accanto sono mostrate le linee del campo elettrico di un dipolo. È possibile scrivere una espressione del campo elettrico in forma più generale che non dipende dall'aver orientato il dipolo secondo l'asse delle z:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} [3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}]$$

Due esercizi A, B possono servire a chiarire il concetto di dipolo.



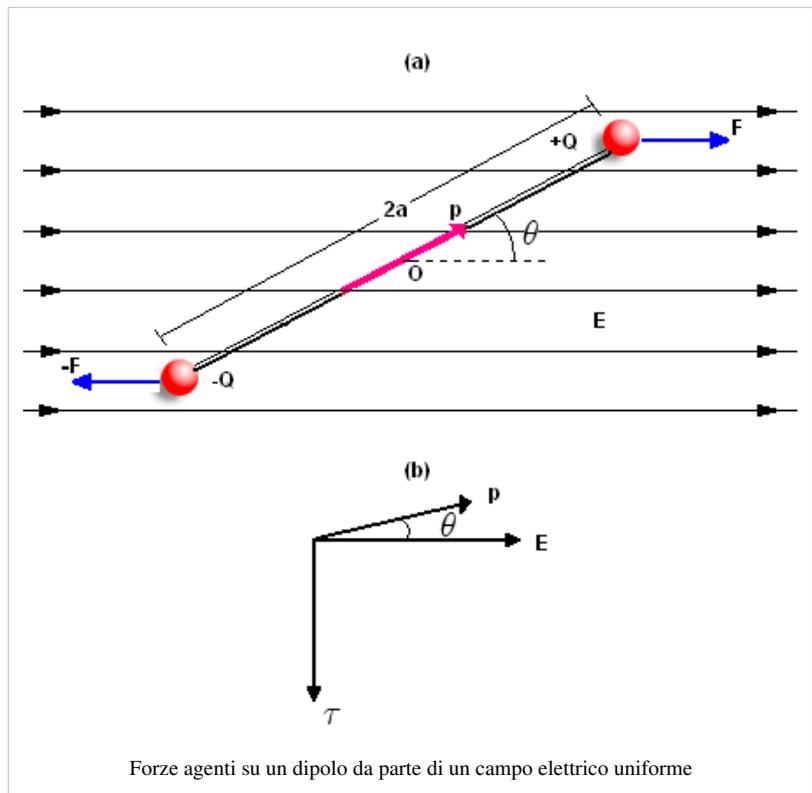
### Azione dei campi elettrici sui dipoli elettrici

Dato un dipolo elettrico rigido posto in un campo elettrico esterno come tutti i sistemi rigidi bisogna considerare la forza risultante ed il momento risultante. Se il campo elettrico è uniforme la risultante delle forze è chiaramente nulla in quanto la forza agente sulla carica positiva è esattamente eguale e contraria a quella agente sulla negativa. Ben diverso è il caso del momento infatti se il dipolo ha un angolo  $\theta$  con la direzione del campo, sul sistema agirà una coppia di forze, data da due volte la forza per il braccio:

$$|\tau| = 2|F|(a \sin \theta) = 2a|F| \sin \theta$$

Il momento si è indicato con la notazione anglosassone  $\tau$ , per non generare confusione con grandezze che si studieranno nel magnetismo. Poichè  $|F| = q|E|$  e  $|p| = (2a)(q)$ , si ha che:

$$|\tau| = 2aq|E| \sin \theta = pE \sin \theta$$



Per questa ragione un dipolo elettrico immerso in un campo esterno uniforme  $\vec{E}$ , è soggetto a un momento che tende ad allinearlo alla direzione del campo:

$$\boldsymbol{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Si deve fare un lavoro (positivo o negativo) mediante una azione esterna per cambiare la direzione relativa del dipolo rispetto al campo esterno. Essendo il campo elettrico conservativo, posso associare a tale lavoro una energia potenziale  $U$ .

Se  $\theta$  nella figura (a) ha il valore iniziale  $\theta_0$ , il lavoro necessario a ruotare il dipolo fino ad un angolo  $\theta$  è:

$$U = W = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} pE \sin \theta d\theta = pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = -pE[\cos \theta - \cos \theta_0]$$

Se si assume che l'energia potenziale è nulla per  $\theta_0=90^\circ$ . Tale scelta corrisponde ad assumere che il potenziale minimo si ha con il dipolo allineato nel verso e direzione del campo ed il massimo quando è allineato nella direzione del campo ma con verso opposto. Si ha che:

$$U = -pE \cos \theta$$

O in forma vettoriale

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Se il campo elettrico non è uniforme la dinamica è chiaramente più complicata in quanto la risultante delle forze non è più nulla a meno che il dipolo sia orientato nella direzione in cui il campo elettrico non varia. Ma chiaramente questa non è una situazione di equilibrio in quanto il momento sarà massimo in tale posizione e farà ruotare il dipolo allineandolo alle linee del campo. In generale la dinamica è molto complicata. Si semplifica il comportamento dinamico se si assume che l'allineamento del dipolo con le linee del campo avviene rapidamente rispetto al moto di trascinamento. Vi sarà un moto di trascinamento, in quanto se viene assunto come asse delle  $x$  la direzione locale del campo elettrico su cui si allineato il dipolo. Assunta l'origine sul centro del dipolo, la posizione della carica negativa sarà  $-a$  e quella della positiva  $a$ . La risultante della forza sarà quindi:

$$F_x = qE_x(a) - qE_x(-a)$$

Se la variazione di  $E_x$  non è troppo brusca:

$$E_x(-a) \approx E_x(0) - \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{x=0} a$$

$$E_x(a) \approx E_x(0) + \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{x=0} a$$

Quindi:

$$F_x \approx 2qa \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{x=0} = p \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

Cioè i dipolo sono trascinati nella regione dove più intenso è il campo elettrico. Tale forza di trascinamento viene utilizzata nelle fotocopiatrici per trascinare il toner sulla carta.

## Unità di misura ed ordini di grandezza

La dimensione fisica del potenziale elettrico equivale al rapporto tra l'energia e la quantità di carica elettrica, quindi l'unità di misura nel Sistema Internazionale è detto Volt ed equivale a Joule diviso Coulomb:

$$[V] = \frac{[Energia]}{[Carica]} = \frac{[J]}{[C]}$$

Di conseguenza l'unità di misura del campo elettrico, che ha le dimensioni di una forza divisa una carica, non è normalmente scritta come  $N/C$ , ma si preferisce indicarla in  $V/m$ .

$$[E] = \frac{[Forza]}{[Carica]} = \frac{[V]}{[m]}$$

I campi elettrici sono estremamente difficili da misurare in quanto la presenza di materia li modifica sostanzialmente. Campi elettrici dell'ordine di qualche  $10^6 V/m$  nell'aria sono considerati campi molto intensi. Infatti con campi di questo ordine di grandezza l'aria cessa di essere un mezzo simile al vuoto e si comporta come un plasma. I fulmini, l'effetto più appariscente dell'elettromagnetismo dagli albori della civiltà umana, sono una tipica manifestazione di tali campi intensi. Durante una giornata serena vi è naturalmente un campo elettrico la cui intensità al livello del mare è di circa un centinaio di  $V/m$ . Quindi un campo di questo ordine di grandezza presente naturalmente è considerato un campo elettrico di piccola intensità.

Il potenziale elettrico è invece una grandezza che è entrata nell'uso comune, differenze di potenziale tra oggetti carichi isolati sono facilmente misurabili, tra frazioni di Volt a centinaia di Volt. Differenze di potenziali statiche di qualche nV sono estremamente difficili da misurare, mentre differenze di potenziale di molte centinaia di Volt possono essere estremamente pericolose per la salute umana se applicate tra due differenti parti del corpo umano: in realtà la pericolosità è legata alla corrente, di cui parleremo nel seguito.

La carica dell'elettrone di circa  $1,6 \times 10^{-19} C$ , la minima carica possibile, indica chiaramente cosa sia una carica piccola. Il Coulomb rappresenta una grossa carica se distribuita su volumi di qualche  $m^3$ , ma se invece consideriamo la carica contenuta in una media nuvola di pioggia, che ha dimensioni di qualche Km, facilmente la carica accumulata è di qualche decina di C. Ma dato il volume in gioco la densità volumetrica di carica è di solito inferiore a  $10^{-9} C/m^3$ , la densità di carica presente nell'aria in una giornata serena è di appena un ordine di grandezza inferiore a tale unità.

## Energia potenziale elettrica

In condizioni statiche, l'intera energia del sistema di cariche esiste solo come energia potenziale. Tale energia è il lavoro richiesto per formare una certa distribuzione di cariche.

Se possiedo semplicemente due cariche  $q_1$  e  $q_2$  proviamo ad avvicinarle alla distanza  $r_{12}$  a partire da una distanza infinita, la differenza di energia potenziale posseduta dal sistema, nella condizione finale rispetto alla condizione iniziale è evidentemente:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Si può estendere il ragionamento ad un sistema di  $n$  cariche  $q_i$  poste a distanza reciproca  $r_{ij}$ . Per tale sistema l'energia totale è, per semplice estensione del caso precedente eguale a:

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad i \neq j \quad (1)$$

Il valore  $1/2$  è stato introdotto per eliminare le coppie considerate due volte, una volta scambiati  $i$  e  $j$ . Nel caso di distribuzione continua di cariche la formula generale è di poca utilità ed è più semplice affrontare il problema da un punto di vista fisico.

### Caso di una sfera uniformemente carica

Immaginiamo di voler costruire una sfera uniformemente carica di raggio  $R$  e carica totale  $Q$ . Immaginiamo di assemblarla successivamente aggiungendo via via dei gusci sferici infinitesimi di volume  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ . Il processo di costruzione inizia con la sfera di raggio  $r = 0$  e finisce con la sfera di raggio  $R$ .

La densità di carica vale ovviamente:

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Quindi quando la sfera ha un raggio  $r$  con  $0 \leq r \leq R$  il lavoro necessario ad aggiungere un guscio di spessore infinitesimo  $dr$  vale:

$$dU = V_r \rho d\tau \quad (2)$$

Dove  $V_r$  è la differenza di potenziale tra la superficie della sfera e l'infinito quando il suo raggio vale  $r$ :

$$V_r = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

Esplicitando l'eq. 2:

$$dU = \frac{\rho^2 4\pi r^4 dr}{3\epsilon_0}$$

Quindi integrando l'ultima espressione tra 0 ed  $R$  si ha:

$$U = \int_0^R \frac{\rho^2 4\pi r^4 dr}{3\epsilon_0} = \frac{\rho^2 4\pi R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi \epsilon_0 R} \quad (3)$$

### Conservatività del campo elettrostatico

A causa della conservatività del campo elettrostatico abbiamo che  $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$  è indipendente dal percorso che seguiamo per andare da  $a$  a  $b$ . Se in particolare  $a$  coincide con  $b$ , cioè il cammino è una linea chiusa si ha che:

$$\oint_i \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Cioè la circuitazione del campo elettrostatico lungo una linea chiusa è identicamente nullo. Tale proprietà è una proprietà integrale cioè riguarda una porzione macroscopica in cui tale campo è definito, ma vale qualunque sia la linea chiusa che noi consideriamo.

Il prodotto vettoriale di  $\vec{\nabla}$  con il generico vettore  $\vec{A}$  viene chiamato rotore:

$$rot \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Il rotore di un campo vettoriale dà una misura dei vortici presenti nel campo stesso. Se abbiamo un corpo rigido che ruota con velocità angolare costante  $\omega$  attorno ad un asse, il rotore del campo delle velocità istantanee è un vettore diretto lungo l'asse di rotazione con intensità  $2\omega$ . Mentre se lo stesso oggetto si muove di moto traslatorio il vettore del campo vettoriale velocità è nullo,

Si dimostra analiticamente, Teorema di Stokes che la circuitazione di un generico vettore  $\vec{A}$  attraverso una linea chiusa  $L$  che delimita una superficie aperta  $S$  vale esattamente:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S rot \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Questa equazione permette di trasformare un integrale di linea in uno di superficie.

Nel caso specifico della circuitazione del campo Elettrostatico:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Dove  $S$  è una qualsiasi superficie aperta che ha come contorno la linea  $l$ .

Ma poiché l'ultima identità vale qualsiasi sia la superficie  $S$ , per verificare tale condizione occorre che l'integrando sia identicamente nullo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Questa è la relazione locale del campo elettrostatico.

Argomento seguente: Conduttori

## Conduttori

---

Argomento precedente: Potenziale elettrico

Tutta la trattazione finora eseguita escludeva la presenza di materia. L'aria con buona approssimazione è equiparabile al vuoto per quanto riguarda l'elettrostatica, quindi la trattazione fatta finora si applica bene a un mezzo a cui siamo abituati. La materia modifica sostanzialmente il comportamento dei campi elettrici, esiste una quantità che definiremo nel seguito detta resistività elettrica che varia di oltre 20 ordini di grandezza andando da un conduttore ideale (i metalli in generale) ad un isolante ideale (che chiameremo anche dielettrico). Qui limitiamo la nostra trattazione ad un conduttore. Ovviamente, come spesso avviene in natura, la distinzione tra i conduttori e gli isolanti non è così netta: un caso tipico è l'acqua che nella forma naturale è un discreto conduttore, ma una volta privata dei sali in essa disciolti e quindi deionizzata rappresenta un buon isolante. Ma sicuramente i metalli, le leghe sono tutti dei conduttori per cui valgono le leggi che stiamo per descrivere.

Si definisce conduttore un corpo entro il quale siano presenti portatori di carica elettrica liberi di muoversi (al suo interno e sulla superficie). Come sappiamo tutti i corpi sono costituiti da particelle cariche (i nuclei degli atomi e gli elettroni), tuttavia la gran parte di queste non è libera di muoversi su distanze macroscopiche, ma occupa posizioni fisse. Nei metalli, dalle conoscenze microscopiche, sappiamo che gli elettroni più esterni sono liberi di muoversi, questo comporta un numero grandissimo di elettroni liberi, vincolati solo dalla superficie esterna del conduttore. Supponiamo di introdurre un conduttore in una regione di spazio nel quale è presente un campo elettrico. In tal caso, ognuna delle cariche libere del conduttore *sentirà* il campo elettrico e di conseguenza tenderà a spostarsi sulla superficie del conduttore stesso.

Nella situazione di equilibrio in un conduttore, le cariche si dispongono sulla superficie, sia quando il conduttore possiede una carica netta, che quando, pur non essendo carico, è posto in una regione di spazio dove vi sono campi elettrici esterni. Tale fenomeno prende il nome di *induzione elettrostatica* e le cariche che si trovano sulla superficie del conduttore vengono definite *cariche indotte*. Naturalmente, all'interno del conduttore si avrà una condizione di equilibrio quando le cariche superficiali generano all'interno del conduttore un campo elettrico indotto, che sommato a quello inducente dà risultante nulla.

### Campo elettrico all'interno e sulla superficie di un conduttore

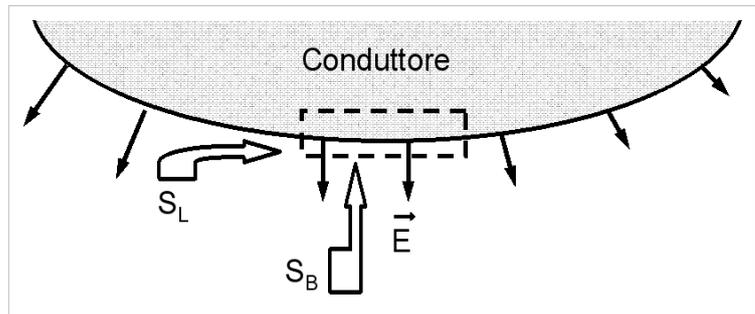
Il campo elettrico all'interno di un conduttore è nullo solo in condizioni elettrostatiche, cioè quando le cariche, comunque presenti, sono in una posizioni fissa nello spazio. Se non fosse nullo il campo elettrico, allora all'interno gli elettroni liberi sarebbero soggetti alla forza elettrica e quindi si muoverebbero sotto la sua azione. Chiaramente questo è in contraddizione con l'ipotesi di staticità.

Notiamo inoltre che il campo elettrico nelle immediate vicinanze di un conduttore deve essere perpendicolare alla superficie. Non vi possono essere componenti tangenziali. Se vi fossero tali componenti, allora gli elettroni si muoverebbero lungo la superficie del conduttore violando ancora la condizione di staticità. Come conseguenza, un conduttore continuo rappresenta un volume equipotenziale ed, in particolare, è equipotenziale la sua superficie.

### Teorema di Coulomb

Tale teorema derivabile dalla legge di Gauss mette in relazione il campo elettrico nelle immediate vicinanze di un conduttore con la densità di carica superficiale  $\sigma$ .

Consideriamo un conduttore, come nella figura a fianco, ed un cilindro retto di base infinitesima  $S_B$ , parallela alla superficie del conduttore e di superficie laterale  $S_L$  di altezza infinitesima.



A causa della costruzione geometrica, il flusso del campo elettrico sarà nullo attraverso la superficie laterale di tale cilindro infinitesimo, ma anche attraverso la base interna al conduttore, quindi l'unica parte del flusso totale diversa da zero sarà attraverso la base  $S_B$  esterna al conduttore. Quindi detta  $E_n$ , la componente normale alla superficie (l'unica diversa da zero) del campo, il teorema di Gauss in questo caso si riduce a :

$$E_n S_B = \frac{\sigma S_B}{\epsilon_0}$$

Quindi:

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Il numero delle cariche libere in un conduttore è estremamente elevato, in genere maggiore di  $10^{28} m^{-3}$  in un comune conduttore. Questo fa sì che uno spostamento di pochi fm delle cariche positive, rispetto alle cariche negative, riesce a generare campi estremamente intensi sulla superficie dei conduttori. Quindi è talmente sottile lo strato di conduttore, in tutte le situazioni, in cui non sono esattamente compensate le cariche negative con quelle positive, che sempre si parla di densità superficiale di carica quando si descrivono le proprietà dei conduttori.

Un esempio chiarisce come in realtà, essendo molto elevata la densità volumetrica degli elettroni liberi in un metallo conduttore, lo spostamento di tale nuvola è di uno spessore inferiore alle dimensioni del nucleo.

### Induzione elettrica

A causa del fatto che in un conduttore, in condizioni elettrostatiche, il campo elettrico nel suo interno sia nullo e che esistono cariche elettriche positive e negative, si ha questo fenomeno che consiste nella redistribuzione sulla superficie di un conduttore delle cariche (positive e negative) per annullare il campo nel suo interno. Quindi, in particolare, se pongo un oggetto carico nelle vicinanze di un conduttore, sulla superficie affacciata del conduttore al corpo carico si posizioneranno delle cariche di segno opposto in maniera da neutralizzare il campo all'interno del conduttore.

La neutralità del conduttore e la conservazione della carica rendono necessario il fatto che una carica eguale a quella esterna, che ha indotto la ridistribuzione delle cariche, si distribuisca sulla superficie lontana dal corpo inducente. Tale carica sarà esattamente eguale alla carica indotta sulla superficie vicina. Il fenomeno dell'induzione elettrostatica è tanto più forte quanto i conduttori sono vicini ad oggetti carichi. Ad esempio, se ho una sfera conduttrice carica positivamente lontana da altri oggetti carichi, la carica si distribuirà uniformemente sulla sua superficie, mentre invece se tale sfera si trova nelle vicinanze di un oggetto carico negativamente, la carica positiva si addenserà maggiormente nelle vicinanze dell'oggetto carico. Il caso opposto si avrà in corrispondenza di un oggetto carico dello stesso segno.

Nella maggior parte dei casi, la determinazione della densità di carica indotta in un conduttore è un problema di difficile soluzione analitica. Esiste un metodo di calcolo detto metodo della carica immagine che spesso è utilizzato per risolvere problemi di questo tipo.

### Effetto punta

L'effetto è un fenomeno che si osserva nei conduttori carichi e consiste nella formazione di un campo elettrico più intenso in prossimità delle zone in cui la superficie del conduttore presenta un raggio di curvatura minore. Quindi le punte sono sede di campi elettrici elevati. A causa di tale effetto i fulmini colpiscono in maniera preferenziale le zone appuntite come gli alberi, le punte aguzze delle montagne e le guglie.

Per mettere in evidenza tale effetto consideriamo due sfere conduttrici di raggio  $R_1$  ed  $R_2$ ; immaginiamo che il raggio della prima sia minore della seconda:  $R_1 < R_2$ . Se le due sfere sono connesse elettricamente, esse costituiscono un unico conduttore, per semplificare la trattazione immaginiamo che siano abbastanza distanti da potere trascurare i fenomeni di induzione (in realtà tale ipotesi non è necessaria, ma solo utile per semplificare il ragionamento). Se poniamo una carica  $Q$  su tale sistema tale carica si distribuirà ( $Q_1$  sulla prima e  $Q_2$  sulla seconda) con:

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

Trascurando la carica sul circuito che interconnette le sfere. Ma inoltre le sfere debbono avere lo stesso potenziale cioè:

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

Quindi:

$$Q_1 = Q_2 \frac{R_1}{R_2}$$

Ma le densità di carica saranno pari a:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}$$

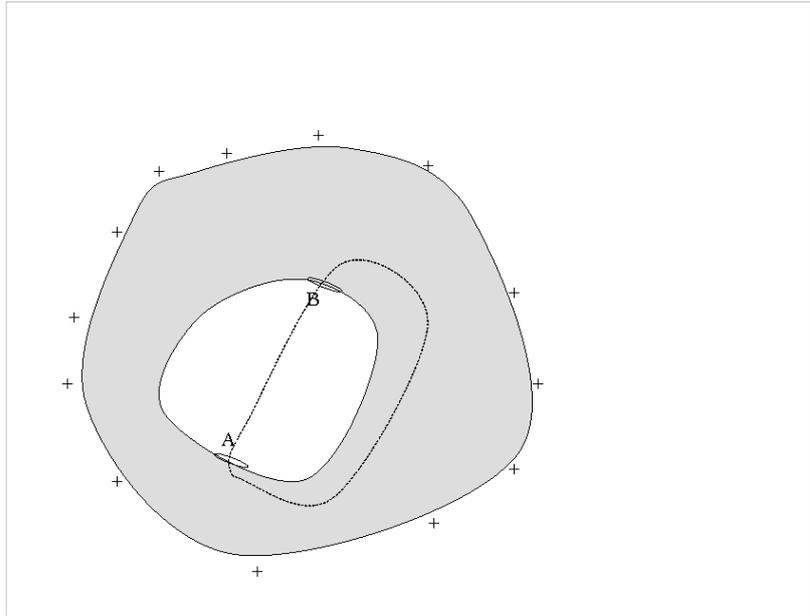
Quindi:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Ma la densità di carica per il teorema di Coulomb è proporzionale al campo elettrico e quindi più piccolo è il raggio di curvatura maggiore sarà il campo elettrico.

### Il campo all'interno di un conduttore cavo

Consideriamo un conduttore cavo, come nella figura, con ad esempio una carica positiva sulla superficie esterna come mostrato nella figura a fianco. Tale carica si dispone sulla superficie esterna addensandosi maggiormente nelle zone con minore raggio di curvatura. Preoccupiamoci della superficie interna. Vogliamo mostrare che, se la cavità è vuota (non vi sono cariche), sulla superficie interna non vi possono essere cariche.



Si dimostra con un ragionamento per assurdo. Immaginiamo che una zona carica (A) ed una zona carica (B) (con carica eguale ed opposta) siano su due posizioni della superficie interna. Il fatto che debbano necessariamente essere eguali ed opposte, deriva dalla conservazione della carica. Il teorema di Gauss applicato ad una superficie interna al conduttore che comprenda la cavità non esclude tale eventualità, infatti il flusso del campo elettrico sarebbe nullo se esistessero due zone cariche. Ma consideriamo l'integrale di linea lungo la linea indicata in figura:

Il fatto che debbano necessariamente essere eguali ed opposte, deriva dalla conservazione della carica. Il teorema di Gauss applicato ad una superficie interna al conduttore che comprenda la cavità non esclude tale eventualità, infatti il flusso del campo elettrico sarebbe nullo se esistessero due zone cariche. Ma consideriamo l'integrale di linea lungo la linea indicata in figura:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

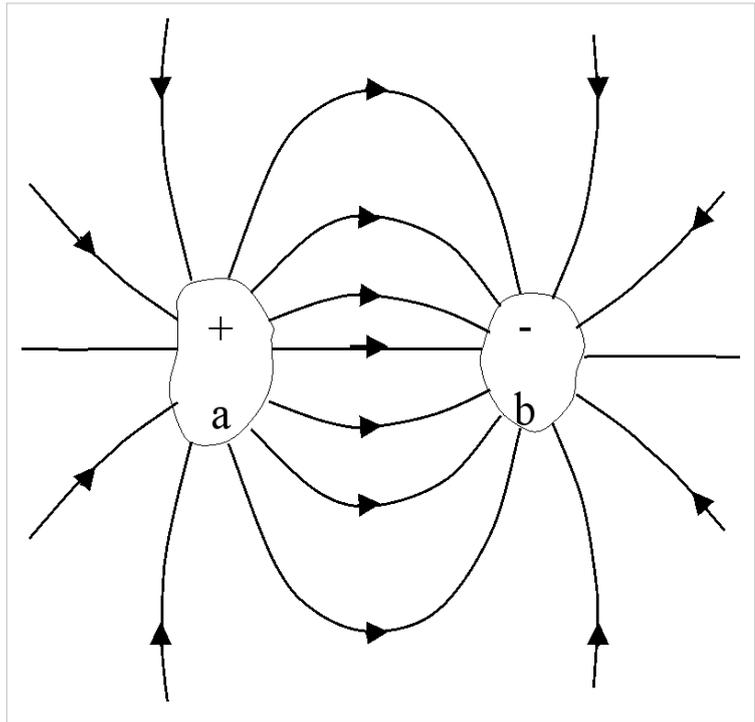
Tale linea è in buona parte all'interno del conduttore dove l'integrale è identicamente nullo, mentre se eseguiamo il calcolo di tale integrale nella cavità, dal punto A al punto B, dove sono presenti cariche eguali ed opposte, necessariamente tale integrale sarebbe non nullo. Infatti stiamo muovendoci da una zona con una carica A ad una zona B carica di segno opposto (sappiamo che le linee del campo partono dalle cariche positive e vanno a finire su quelle negative). Si avrebbe quindi la contraddizione che l'integrale attraverso una linea chiusa del campo elettrostatico sarebbe diverso da zero. Ma questo contrasta con la conservatività del campo elettrostatico. Quindi l'ipotesi che si possano generare cariche eguali e di segno opposto sulla superficie interna porta ad una conseguenza assurda che si può escludere.

Bisogna puntualizzare che l'ipotesi iniziale è che la cavità sia vuota, cioè priva di qualsiasi carica libera. La cosa cambia se delle cariche sono piazzate in qualche posizione fissa all'interno della cavità, o sopra un isolante o un conduttore isolato dal conduttore principale, in tal caso ci può essere un campo elettrico all'interno della cavità. Notiamo che in questo caso sulla superficie interna del conduttore si accumulerà una carica eguale a quella all'interno della cavità. Ed una carica eguale a quella all'interno della cavità apparirà sulla superficie esterna. Ma anche in questo caso le cariche esterne o i campi esterni non riescono in nessuna maniera ad influenzare le cariche all'interno della cavità.

Notiamo che ben prima di dimostrare la cosa con un ragionamento logico, M. Faraday aveva condotto degli esperimenti su conduttori cavi e tuttora delle camere chiuse metalliche che sono degli ottimi schermi non solo per campi elettrostatici, ma anche radiazione elettromagnetica, vengono chiamate gabbie di Faraday.

### Condensatori

La figura mostra un condensatore, cioè un oggetto formato da due conduttori isolati *a* e *b* di forma arbitraria (dette *armature* del condensatore). Supponiamo che sulle due armature vengano disposte cariche eguali ed opposte  $+Q$  e  $-Q$ . Nel caso più semplice i conduttori sono immersi nel vuoto.



Chiamiamo *V* la d.d.p. tra i due conduttori. A causa del principio di sovrapposizione degli effetti, se moltiplichiamo per *n* la carica di ciascuno dei conduttori, anche la d.d.p. aumenterà della stessa quantità.

Questo vuol dire che una volta fissate le condizioni geometriche del sistema, la d.d.p. è direttamente proporzionale alla carica (in valore assoluto) sulle due armature. Quindi possiamo definire la costante di proporzionalità tra carica e d.d.p. come *C* che è detta **capacità** del condensatore:

$$C = \frac{Q}{V}$$

La capacità di un condensatore dipende dalla forma e dalla posizione relativa dei conduttori e non dal materiale di cui sono costituiti i conduttori stessi.

Nel sistema SI le dimensioni fisiche della capacità sono  $[Carica]/[d.d.p]$  e quindi l'unità di misura della capacità elettrica è il *C/V* che viene chiamato **Farad** (simbolo **F**). Una capacità di un *F* è di difficile realizzazione pratica, per cui in pratica si usano spesso i sottomultipli di tale quantità elementare: *pF*, *nF*, *μF* e *mF*. I condensatori rappresentano un elemento circuitale fondamentale per immagazzinare cariche elettriche e sono presenti in un numero enorme di applicazioni pratiche.

I condensatori usati nella pratica presentano il fenomeno dell'induzione completa tra le armature, presupporremo sempre nel seguito che tale condizione sia verificata. Cioè le due armature sono tali che l'unico campo elettrico, generato nel porre la carica positiva su una armatura e la negativa sull'altra, è compreso solo nello spazio tra le due armature. Tale condizione si verifica quando le due armature sono, o molto vicine, o sono un conduttore cavo chiuso con all'interno un alto conduttore o un conduttore isolato con l'altra armatura all'infinito. Per quanto riguarda quest'ultimo caso il concetto di capacità si può estendere ad un conduttore isolato, che venga caricato con una carica *Q* e il potenziale che assume sia calcolato rispetto all'infinito.

Ad esempio se si pone una carica *Q* su una sfera conduttrice di raggio *R* nel vuoto, il campo elettrico generato nello spazio è radiale e vale (all'esterno della sfera, il cui centro si è assunto come origine delle coordinate):

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad r > R$$

mentre all'interno è nullo.

Di conseguenza la d.d.p. tra *R* e  $\infty$  vale:

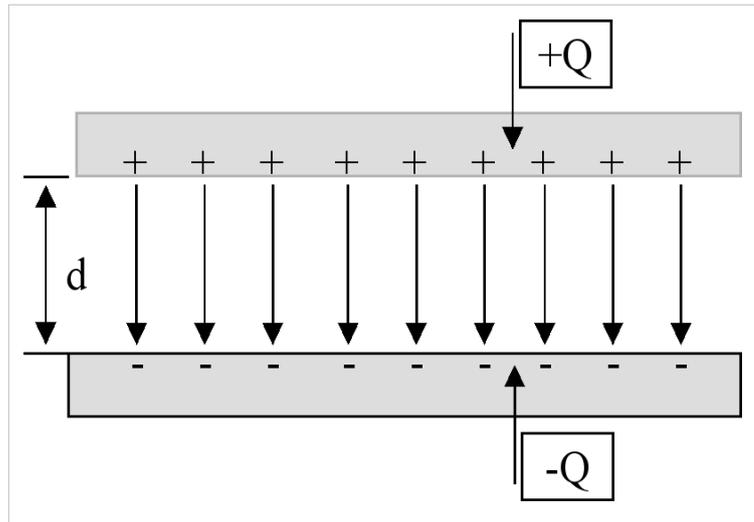
$$V = \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

quindi:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Un conduttore isolato ha una capacità elettrica estremamente piccola, come si evince dalla formula precedente. Se ad esempio  $R$  è il raggio della Terra,  $6350 \text{ km}$ , risulta  $C$  di appena  $706 \mu\text{F}$ .

La figura a fianco mostra il più elementare dei condensatori (anche il più usato), il condensatore piano. In questo caso le armature sono due superfici piane parallele di area  $S$  separate da una distanza  $d$  (piccola rispetto alle dimensioni laterali delle armature).



Se poniamo una carica  $+Q$  sull'armatura superiore e  $-Q$  su quella inferiore, a causa dell'induzione elettrostatica completa (in quanto  $d$  è piccola), le cariche si disporranno con buona approssimazione uniformemente sulla sola parte interna delle armature. Per cui il campo esterno è praticamente nullo, mentre quello interno è uniforme e diretto come indicato in figura, esso vale in modulo:

$$|E| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0}$$

Quindi la d.d.p. tra le armature vale semplicemente (considerando un cammino che vada da una armatura all'altra):

$$V = Ed = \frac{Qd}{S\epsilon_0}$$

Quindi dalla definizione di capacità, un condensatore a facce piane e parallele ha una capacità di:

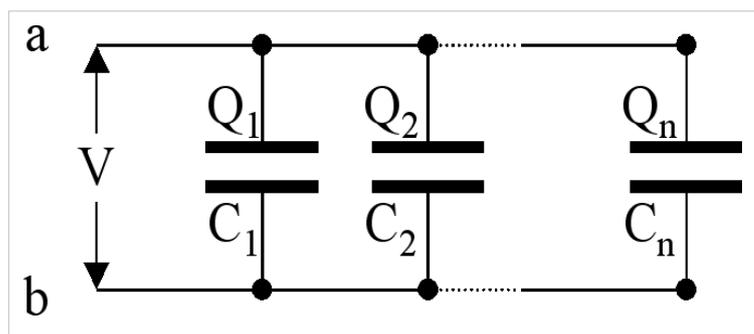
$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Alcuni esempi chiariscono quanto detto Esempio A, Esempio B.

### Condensatori in parallelo

La figura seguente mostra  $n$  condensatori in parallelo. Calcoliamo la capacità equivalente.

Equivalentente significa che possiamo a tutti gli effetti sostituire agli  $n$  condensatori un condensatore  $C_e$  indistinguibile ai fini delle proprietà elettriche degli  $n$  condensatori. La differenza di potenziale ai capi di ciascun condensatore sarà la stessa  $V$  (in quanto le



varie armature costituiscono un unico conduttore semplicemente connesso), come mostrato in figura, mentre le cariche sulle armature dei singoli condensatori saranno dipendenti dalla capacità del condensatore stesso:

$$Q_i = C_i V \quad \text{con } i = 1, n$$

La carica totale del sistema vale:  $Q = \sum_{i=1}^n Q_i = V \sum_{i=1}^n C_i = VC_e$

quindi, per  $n$  condensatori in parallelo:

$$C_e = \sum_{i=1}^n C_i$$

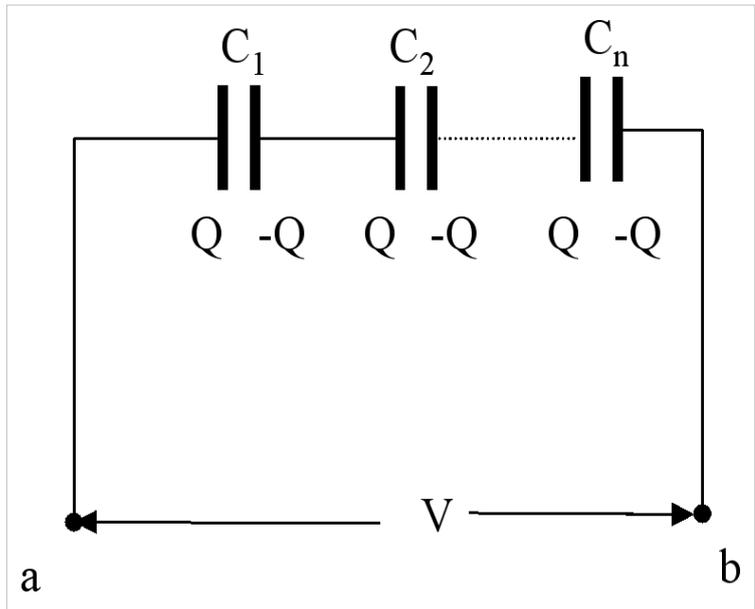
**Condensatori in serie**

La figura mostra  $n$  condensatori posti in serie. Calcoliamo la capacità equivalente di tale sistema.

Immaginando di avere posto una carica  $+Q$  e  $-Q$  sulle armature estreme dei condensatori. A causa dell'induzione elettrostatica sulle armature opposte di ogni condensatore si deve formare una carica eguale e contraria.

Ma poiché la carica totale nel contatto tra la II armatura del condensatore 1 e la I del condensatore 2 deve essere nulla (in caso contrario si violerebbe il principio di conservazione della carica) sulla I armatura del condensatore 2 si deve avere una carica  $+Q$  e di seguito nella stessa maniera per i

vari elementi della serie. In questo caso la stessa carica (in modulo) si ha su tutte le armature dei condensatori, mentre la d.d.p. ai capi dei singoli condensatori è diversa:



$$V_i = \frac{Q}{C_i} \quad \text{con } i = 1, n$$

La differenza di potenziale ai capi della serie di elementi è data dalla somma matematica delle d.d.p.:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{Q}{C_e}$$

Quindi:

$$C_e = 1 / \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Quindi la capacità equivalente nel collegamento in serie è sempre minore della più piccola delle capacità della catena. In particolare se sono due condensatori eguali in serie la capacità equivalente vale la metà della capacità di ognuna dei condensatori della serie.

Due esempi esempio C, esempio D possono aiutare nella comprensione di quanto detto.

## Energia immagazzinata nel campo elettrico

Calcoliamo il lavoro necessario a caricare un condensatore di capacità  $C$  con una carica  $+Q$  su una armatura e  $-Q$  sulla altra. Supponiamo che ad un certo istante  $t$  la carica sulla prima armatura sia  $0 < q' < Q$  di conseguenza la d.d.p. tra le armature sarà:

$$V' = \frac{q'}{C}$$

Se vogliamo aumentare la carica di  $dq'$  dovremo fare un lavoro infinitesimo (da un punto di vista termodinamico aumenta l'energia interna del sistema), pari a:

$$dW = V'dq' = \frac{q'}{C}dq'$$

Quindi se si calcola il lavoro totale per caricare il condensatore da scarico fino alla carica  $Q$ :

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q'}{C}dq' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Facendo uso del fatto che  $Q = CV$  si può anche scrivere come:

$$W = \frac{1}{2} CV^2$$

In realtà l'energia accumulata è contenuta nel campo elettrico tra le armature. La densità di energia del campo elettrico, si ricava dal caso del condensatore piano; infatti in tale caso, il campo elettrico ha il medesimo valore in tutti i punti compresi tra le armature, se si trascurano gli effetti dei bordi. Ricordando quanto visto per il condensatore piano nel vuoto:

$$|E| = \frac{Q}{S\epsilon_0}$$

Si può scrivere:

$$Q = |E|S\epsilon_0$$

ma anche:

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Sostituendo le eq. 7 e 8 nella eq.5:

$$W = \frac{1}{2} \frac{E^2 S^2 \epsilon_0^2}{\epsilon_0 S} d = \frac{1}{2} E^2 S d \epsilon_0$$

Ma  $Sd$  è il volume di spazio compreso tra le armature, l'energia elettrica per unità di volume,  $u_E$ , vale:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Argomento seguente: Dielettrici

# Dielettrici

Argomento precedente: Conduttori

Si chiamano isolanti o dielettrici i materiali che non hanno cariche libere e quindi non conducono l'elettricità. M. Faraday si rese conto che inserendo un materiale isolante tra le armature di un condensatore a facce piane e parallele la capacità del condensatore aumentava. Ora giacché la capacità di un condensatore è data dal rapporto tra la carica e la differenza di potenziale, la carica sulle armature rimane la stessa, come anche la distanza e la superficie, di conseguenza il campo elettrico deve ridursi nel dielettrico. La costante adimensionale di cui viene ridotto il campo elettrico in un condensatore a facce piane e parallele dipende dal materiale di cui è fatto il dielettrico e viene chiamata costante dielettrica relativa ed è una grandezza adimensionale che si indica con il simbolo  $\epsilon_r$ .

Materiale	$\epsilon_r$	Rigidità dielettrica (V/m)
Aria	1.0006	$3 \cdot 10^6$
Carta	3.7	$5 \cdot 10^7$
Gomma	7	$1.6 \cdot 10^7$
Vetro	4.7	$3 \cdot 10^7$
Porcellana	6.5	$1.5 \cdot 10^7$
Acqua	80	

Quindi un condensatore a facce piane parallele di distanza  $d$  tra le armature, superficie affacciata  $S$  riempito totalmente con un dielettrico avrà una capacità pari a:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$$

## Il vettore Polarizzazione

La spiegazione del fenomeno non differisce di molto da quello che avviene in un conduttore, infatti si genera sulla superficie affacciata del dielettrico una densità di carica superficiale dovuta ai dipoli indotti nel dielettrico. La polarizzazione dipende molto sia dal materiale che dallo stato della materia e qui non viene descritto in dettaglio il meccanismo microscopico. Quindi sulle superfici del dielettrico sarà presente una carica di polarizzazione che non annulla, come nel caso dei conduttori, integralmente il campo elettrico, ma ne riduce gli effetti. Poiché l'effetto è dovuto ai dipoli elettrici o allineati o provocati dal campo elettrico esterno, per studiare compiutamente un dielettrico all'interno di un campo esterno dobbiamo definire un nuovo campo vettoriale, diverso da zero solo all'interno e sulla superficie del dielettrico, il vettore di Polarizzazione  $\vec{P}$ . Tale vettore è proporzionale al numero dei dipoli presenti per unità di volume per la loro intensità:

$$\vec{P} = n\vec{p}$$

Dove  $n$  è la densità di materia (il numero di atomi per unità di volume) e  $\vec{p}$  è il dipolo magnetico medio del generico atomo (o molecola) dovuto al campo presente.

Il vettore  $\vec{P}$  ha le dimensioni di una carica superficiale, ed in effetti sulla superficie del dielettrico si ha una densità di carica di polarizzazione (di segno opposto alla carica sulla armatura vicina) il cui valore è pari a:

$$\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Maggiore è l'intensità del vettore di polarizzazione maggiore è la densità di carica di polarizzazione. La polarizzazione del dielettrico deve essere proporzionale al campo  $\vec{E}$  (elettrico) localmente presente. Il condensatore a facce piane parallele riempito da un dielettrico è un buon esempio per trovare il legame tra campo elettrico e vettore di polarizzazione. Distinguiamo tra la densità di cariche libere  $\sigma_L$  e la densità di cariche di polarizzazione  $\sigma_{pol}$ .

L'ipotesi più ragionevole, spesso non verificata in alcuni mezzi, è che il vettore polarizzazione sia proporzionale al campo  $\vec{E}$  presente localmente:

$$\vec{P} = \epsilon_o \chi \vec{E}$$

Mostriamo come  $\chi$  detta normalmente la suscettività del mezzo sia pari a  $\epsilon_r - 1$ . Tale cosa è chiara nel caso unidimensionale (eliminiamo il simbolo di vettore). Infatti nel condensatore a facce piane parallele, ripetendo il ragionamento fatto per mostrare il teorema di Coulomb (considerando un cilindro gaussiano con una faccia dentro il metallo e l'altra dentro il dielettrico, e facendo il flusso del campo elettrico) si ricava che:

$$ES = \frac{(\sigma_L - \sigma_{pol})S}{\epsilon_o}$$

Quindi semplificando e sostituendo:

$$E = \frac{\sigma_L - \epsilon_o \chi E}{\epsilon_o}$$

$$E(1 + \chi) = \frac{\sigma_L}{\epsilon_o}$$

Detto  $E_o$  il campo elettrico senza dielettrico:

$$E = \frac{E_o}{(1 + \chi)}$$

Quindi poiché dentro il dielettrico:

$$E = \frac{E_o}{\epsilon_r}$$

segue che:

$$\chi = \epsilon_r - 1$$

generalizzando:

$$\vec{P} = \epsilon_o(\epsilon_r - 1)\vec{E}$$

### Carica volumetrica di polarizzazione

Immaginiamo di porre un dielettrico con una certa superficie di contorno in un campo elettrico esterno senza aggiungere cariche esterne. Si genereranno sulla superficie esterna delle cariche di polarizzazione la cui densità vale, come abbiamo visto:  $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}$ . Se il flusso del vettore  $\vec{P}$  attraverso la superficie esterna del dielettrico è identicamente eguale a 0 non vi è da aggiungere altro per quanto riguarda le cariche di polarizzazione. Se invece tale flusso è diverso da zero, a causa della conservazione della carica vi saranno anche delle cariche di polarizzazione all'interno del volume, in maniera da garantire che la carica totale si conservi. Detta  $S$  la superficie esterna del dielettrico che delimita il volume  $T$  deve essere:

$$\int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} + \int_T \rho_{pol} d\tau = 0$$

Ma applicando il teorema della divergenza al primo membro si ha che:

$$\int_T \vec{\nabla} \cdot \vec{P} d\tau = - \int_T \rho_{pol} d\tau$$

ma i due vettori debbono coincidere qualsiasi sia la forma del dielettrico di volume  $T$ , quindi solo se gli integrandi coincidono può verificarsi tale possibilità:

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Quindi il vettore  $\vec{P}$  fornisce informazioni sia sulla carica superficiale che su quella volumetrica.

## Il vettore spostamento dielettrico

Se è nota la carica elettrica può essere utile definire un campo vettoriale:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

detto spostamento dielettrico. Tale campo che ha le stesse dimensioni di  $P$  (densità di carica superficiale) è collegato alle sole cariche libere. Infatti riscrivendo l'equazione di Gauss locale, artificialmente distinguendo tra densità volumetrica di cariche libere  $\rho_L$  e quelle di polarizzazione  $\rho_{pol}$  si ha che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_L + \rho_{pol}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_L - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_L$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L$$

Ciò è l'equazione di Gauss in forma locale introducendo il vettore  $\vec{D}$  si scrive solo in funzione della densità delle cariche libere.

## Interfaccia tra due dielettrici

Dall'ultima espressione locale, utilizzando il teorema della divergenza in maniera inversa rispetto a quanto fatto nel vuoto, si ricava che:

$$\int_{S \text{ chiusa}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{lib}$$

Inoltre anche in presenza di materia continua a valere in condizioni elettrostatiche:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Quindi immaginiamo un cammino chiuso che passi da un mezzo (1) ad un altro (2), parallelo alla superficie di separazione, ma che si discosti dal bordo di uno spostamento infinitesimo, per garantire che sia verificata la equazione precedente occorre che la componente tangenziale del campo elettrico alla superficie di separazione sia eguale nei due mezzi, algebricamente:

$$E_{t1} = E_{t2}$$

Mentre invece, se non vi è carica libera nell'interfaccia tra i due mezzi, considerando una superficie gaussiana, cilindrica di altezza infinitesima con le facce parallele alla superficie di separazione dei due mezzi per metà in un dielettrico, il fatto che il flusso dello spostamento dielettrico sia nullo attraverso tale superficie (che non contiene cariche libere), ha come conseguenza che:

$$D_{n1} = D_{n2}$$

## Rigidità dielettrica

Tutti i dielettrici presentano un certo numero di cariche libere, in proporzioni assolutamente trascurabili rispetto a un buon conduttore, ma sempre presenti. Infatti la radiattività naturale e i raggi cosmici ionizzano continuamente tutti i materiali. Ovviamente maggiore è la densità, maggiore è la probabilità di tali eventi. Tali cariche libere a differenza dei conduttori sono in presenza di un campo elettrico dentro il dielettrico e quindi subiscono una forza di trascinamento e tra un urto e quello successivo possono acquistare tanta energia cinetica da ionizzare l'atomo che incontrano nel loro cammino. Se tali eventi avvengono con sufficiente frequenza il dielettrico smette di essere un isolante e si creano con una moltiplicazione a valanga un numero enorme di portatori di carica. Nel caso dei fluidi, la perdita della qualità di isolamento è temporanea e il dielettrico una volta rimosso il campo elettrico esterno ritorna nello stato di partenza. Nei solidi al contrario tale evento è in genere distruttivo in quanto viene modificato strutturalmente il solido stesso. Il campo elettrico esterno per cui un dielettrico perde le sue proprietà isolanti viene chiamato rigidità elettrica ed il suo valore è molto dipendente dalla storia del materiale, dall'umidità e da un numero

elevato di concause. Per cui il suo valore non è una grandezza fissa ma è soggetta a notevoli fluttuazioni. All'inizio di questo capitolo sono dati alcuni valori indicativi della rigidità dielettrica alcuni dielettrici.

Un esempio è utile per chiarire quanto detto.

Argomento seguente: Elettrodinamica

## Elettrodinamica

---

Argomento precedente: Dielettrici

### Elettrodinamica

In elettrostatica per definizione le cariche sono immobili e si studiano i fenomeni elettrici in condizione di equilibrio delle distribuzioni di cariche. Il raggiungimento dello stato di equilibrio viene raggiunto dal movimento delle cariche libere. Un conduttore è attraversato da una corrente elettrica ogni qual volta delle cariche si spostano da un punto all'altro del conduttore. Il movimento caotico dovuto alla agitazione termica non comporta nessuna corrente netta. Si chiama velocità di deriva la velocità media dei vari portatori di carica all'interno del conduttore in condizioni dinamiche a causa del campo elettrico localmente presente. L'insieme delle velocità di deriva delle varie cariche comporta una corrente macroscopica di conduzione. Si definisce corrente di conduzione  $I$  la quantità carica totale  $dQ$  che attraversa una sezione del conduttore nel tempo  $dt$  :

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

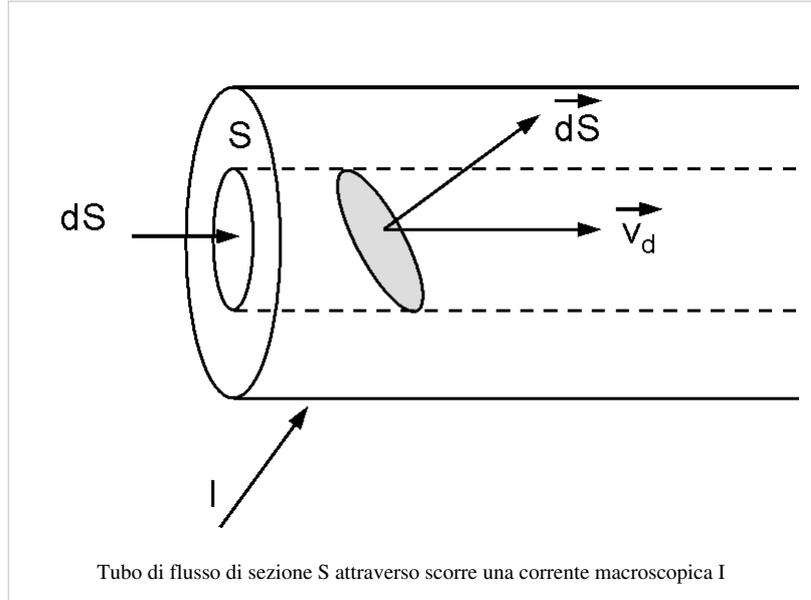
Nel sistema SI l'unità di misura della corrente è l'Ampere (simbolo  $A$  ) definito come:

$$[A] = \frac{[C]}{[s]} \quad (2)$$

Nel sistema SI l'ampere è una unità di misura fondamentale. La ragione pratica del considerare l'ampere come una grandezza fondamentale, deriva dal fatto che le correnti elettriche sono più facilmente misurabili e producibili delle cariche elettriche libere. Se in maniera opportuna si mantiene la d.d.p. costante nel tempo, una volta che si sono stabilizzati i parametri del sistema la corrente non varia più nel tempo. In questo caso si parla di *corrente stazionaria*, cioè una corrente che non varia nel tempo. Notare che la presenza netta di una corrente in un conduttore non significa che il conduttore diventa carico, ma solo che si ha un flusso dei portatori di carica. La convenzione che si usa è quella che i portatori di carica siano positivi e che quindi la corrente fluisca dai punti a potenziale più alto verso quelli a potenziale più basso. Per fare scorrere una corrente in un conduttore sono necessari dei generatori o di corrente o di differenza di potenziale che verranno trattati nel seguito: in questa prima parte consideriamo di avere a disposizione oggetti ideali che ci forniscono le correnti o le differenze di potenziale che vogliamo.

### Densità di corrente

Consideriamo un conduttore, all'interno del quale si abbiano  $n$  portatori di carica liberi per unità di volume ciascuno di carica  $q$ . Al moto caotico dovuto all'agitazione termica, con una velocità quadratica media molto elevata, si sovrappone un moto di deriva caratterizzato da una velocità di deriva  $\vec{v}_d$ . Le velocità di deriva sono parallele o antiparallele al campo  $\vec{E}$  localmente presente nel conduttore, a seconda se  $q$  è positiva o negativa. Notiamo che a differenza del caso elettrostatico il campo elettrico è non nullo all'interno dei conduttori.



Le  $\vec{v}_d$  costituiscono un campo vettoriale, definito all'interno del conduttore la cui sezione è  $S$ . Dentro il conduttore, consideriamo un tubo di flusso elementare del campo vettoriale  $\vec{v}_d$  e sia  $d\vec{S}$  una sezione, non necessariamente normale al tubo di flusso. La quantità di carica  $dq$  che nel tempo  $dt$  passa attraverso la sezione  $d\vec{S}$  vale:

$$dq = nq\vec{v}_d \cdot d\vec{S}dt = nqv_d dS_n dt \quad (3)$$

dove  $dS_n$  rappresenta la proiezione di  $d\vec{S}$  normale al tubo di flusso.

Alla quantità:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \quad (4)$$

si dà il nome di densità di corrente. Le dimensioni fisiche di  $\vec{J}$  sono:

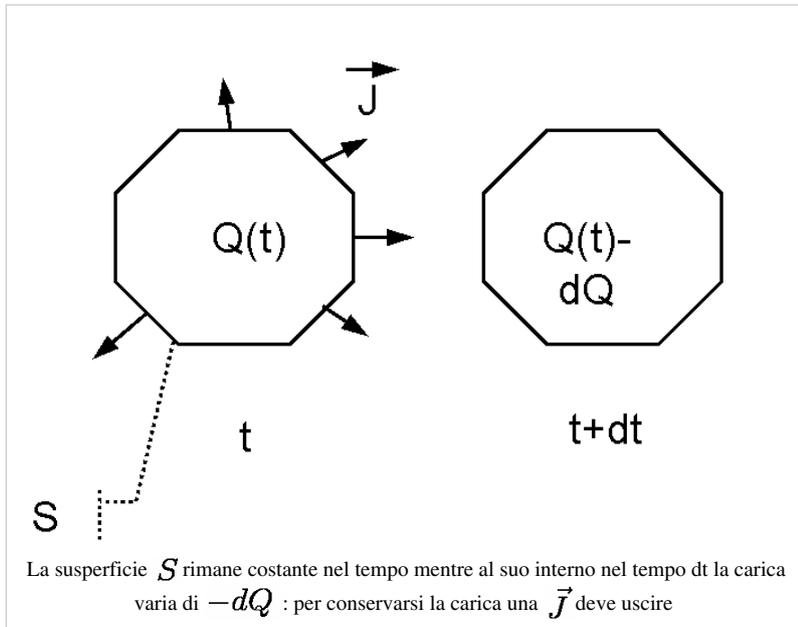
$$[J] = [L]^{-3}[C][L][t]^{-1} = [I][L]^{-2}$$

cioè di una corrente su una superficie e nel SI l'unità di misura è:

$$[J] = \left[ \frac{A}{m^2} \right]$$

Possiamo anche scrivere che:

$$dI = \frac{dq}{dt} = nq\vec{v}_d \cdot d\vec{S} = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



Integrata sull'intera sezione  $S$  del conduttore si ha che la corrente:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5)$$

Quindi la corrente è il flusso della densità di corrente elettrica attraverso la superficie  $S$ .

### Conservazione della carica elettrica

Abbiamo visto che la carica elettrica si conserva. L'applicazione di tale principio si può esprimere matematicamente con l'introduzione della densità di corrente. Consideriamo la figura a fianco in cui viene rappresentata la sezione di una superficie  $S$  chiusa che al tempo  $t$  racchiude la carica totale  $Q(t)$ .

Se trascorso un tempo  $dt$  la carica diminuisce di  $-dQ$ . Per la conservazione della carica una corrente elettrica (rappresentata dalle frecce nella figura) deve avere attraversato la superficie  $S$ . In maniera che:

$$-dQ = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} dt \quad (6)$$

Quindi posso scrivere, se la superficie non varia nel tempo:

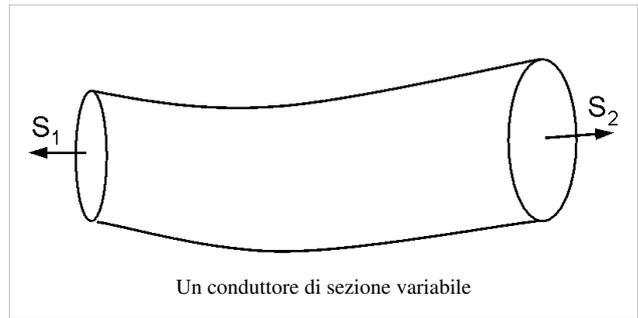
$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (7)$$

Tale equazione è spesso indicata con il nome di *equazione di continuità in forma integrale*. In condizioni stazionarie, cioè quando la carica all'interno del volume considerato non varia nel tempo, l'equazione diviene:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8)$$

Questo vuole dire che il flusso della corrente attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo. In conseguenza di questo se consideriamo un filo conduttore, essendo per definizione nullo il flusso uscente dalla superficie laterale. Si ha che:

La equazione di continuità (7) può essere espressa in forma locale se il campo vettoriale  $\vec{J}$  è derivabile. Infatti definendo  $T$  il volume che ha come contorno la superficie  $S$  si ha che usando la definizione di  $Q$  ed il teorema della divergenza:



$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_T \rho d\tau = \int_T \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d\tau \quad (9)$$

La scelta del volume  $T$  è arbitraria, quindi l'unica possibilità è che gli integrandi siano eguali:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (10)$$

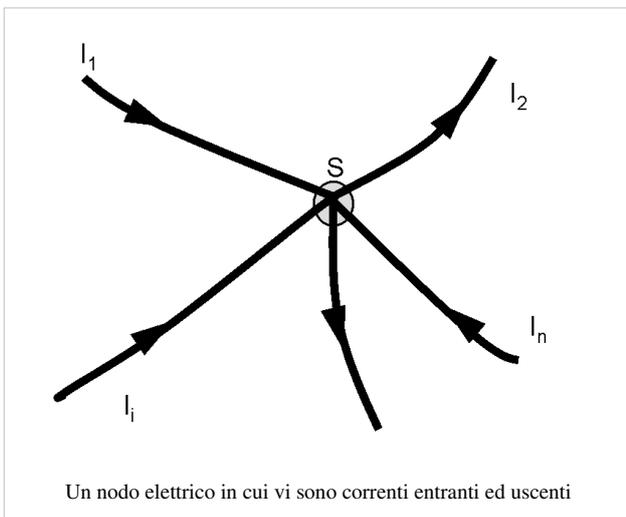
Che è equazione di continuità in forma locale.

Ritornando alla espressione integrale, eq. 8, nel caso stazionario applicato alla figura del conduttore a sezione variabile:

$$\int_{S1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

Ma

$$\int_{S1} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -I_1 \text{ ed } \int_{S2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_2, \text{ quindi:}$$



$$I_1 = I_2$$

Cioè la corrente attraverso le due sezioni è la stessa.

Se la regione di spazio in cui convergono più fili conduttori non ha capacità elettrica anche in condizioni non stazionarie la carica contenuta nella regione di spazio non può variare essendo identicamente nulla. Tale regione di spazio viene detto *nodo*. L'applicazione della (7) comporta che :

$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = 0 \quad (11)$$

La somma delle correnti che convergono su un nodo è nulla: la somma delle correnti entranti eguaglia le uscenti. Questa legge viene detta prima legge di Kirchhoff.

## Legge di Ohm

Nei conduttori le cariche libere si muovono come in un fluido molto viscoso. Come sappiamo dalla meccanica del punto se la viscosità è molto elevata il sistema raggiunge la condizione di velocità di deriva in un tempo molto rapido. La fase di accelerazione del moto avviene in un tempo trascurabile e la forza di trascinamento  $q\vec{E}$  viene bilanciata dalla forza di attrito viscoso  $-m\vec{v}_d/\tau$ . Dove  $m$  è la massa dei portatori di carica (gli elettroni in genere) e  $\tau$  è il tempo medio tra gli urti. Ma essendo:

$$\vec{v}_d = \frac{\vec{J}}{nq}$$

Posso scrivere che:

$$q\vec{E} = m \frac{\vec{J}}{nq\tau}$$

da cui risulta:

$$\vec{E} = \frac{m}{nq^2\tau} \vec{J} = \rho \vec{J} \quad (12)$$

Tale legge viene chiamata legge di Ohm in forma microscopica. La legge di Ohm vale sempre nei conduttori, mentre per quanto riguarda le altre sostanze: semiconduttori, isolanti (gas, liquidi solidi) ha un intervallo limitato di validità. Infatti in genere in queste sostanze solo se il campo elettrico è inferiore ad un certo valore (dipendente dal mezzo e spesso dalla sua storia) si ha una proporzionalità diretta tra campo elettrico e densità di corrente. La quantità:

$$\rho = \frac{m}{nq^2\tau}$$

è detta resistività elettrica ed è una grandezza che dipende dal mezzo considerato. Inoltre tale quantità nei metalli varia approssimativamente in maniera lineare con la temperatura secondo la legge:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha T) \quad (13)$$

Con  $\alpha$  detto coefficiente di temperatura,  $\rho_0$  la resistività alla temperatura di riferimento (comunemente  $0^\circ C$ ).

Tipo	Sostanza	$\rho$ ( $\Omega \cdot m$ )	$\alpha(^{\circ}C)$
Conduttore	Ag	$1.6 \cdot 10^{-8}$	0.0038
Conduttore	Cu	$1.7 \cdot 10^{-8}$	0.0039
Conduttore	Al	$2.8 \cdot 10^{-8}$	0.0039
Conduttore	Fe	$1 \cdot 10^{-7}$	0.005
Conduttore	NiCr	$1 \cdot 10^{-6}$	0.0004
Semiconduttore	Si	0.001 – 640	-0.075
Isolante	Legno	$\approx 10^8$	
Isolante	Vetro	$\approx 10^{12}$	
Isolante	Quarzo	$7.5 \cdot 10^{17}$	
Isolante	Teflon	$10^{22} - 10^{24}$	

In tabella sono date le resistività ed i coefficienti di temperatura di alcune sostanze a temperatura ambiente. Volutamente sono state messe nella tabella dei metalli, tutti con resistività molto bassa, ed altri materiali. La distinzione tra conduttori ed isolanti diventa quantitativa con la definizione di resistività elettrica come appare chiaro dalla tabella. Mentre la legge di Ohm, vale senza limitazione nei conduttori, purché la temperatura sia mantenuta costante, nelle altre sostanze la validità è limitata al fatto che il campo elettrico localmente non ecceda la rigidità

dielettrica del mezzo.

La espressione data in eq.12 è poco utilizzabile in pratica poiché nei conduttori è più facile misurare la d.d.p. macroscopica che il campo elettrico locale. Consideriamo un cilindro conduttore di lunghezza  $l$ , sezione normale  $S$  e resistività  $\rho$ . Se applichiamo una d.d.p.  $V$  tra gli estremi:

$$|E|l = V$$

Inoltre:

$$|J|S = I$$

Sostituendo tale quantità nella eq.12, proiettando nella direzione della velocità di deriva, risulta:

$$\frac{V}{l} = \frac{\rho I}{S} \quad (14)$$

Da cui se definisco:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (15)$$

la resistenza del conduttore, posso riscrivere la eq.14 come:

$$V = IR \quad (16)$$

Che è detta di Ohm in forma macroscopica ( o semplicemente legge di Ohm). Se il conduttore non è a sezione costante ed al limite la resistività varia con la posizione la generalizzazione della eq.15 porta a:

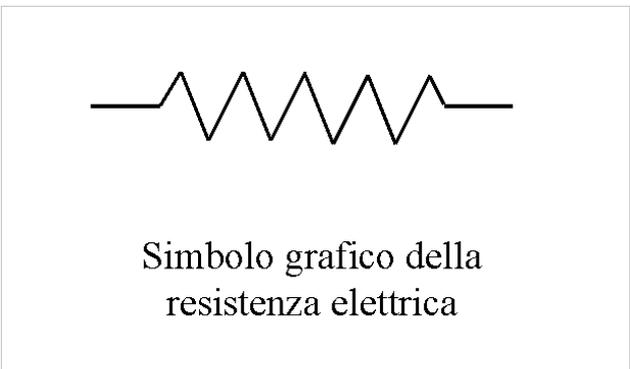
$$R = \int_0^l \rho(x) \frac{dx}{S(x)} \quad (17)$$

Le dimensioni fisiche di una resistenza sono quelle di una d.d.p divisa una corrente, l'unità di misura utilizzata nel SI per misurare le resistenze è l'Ohm ( $\Omega$ ):

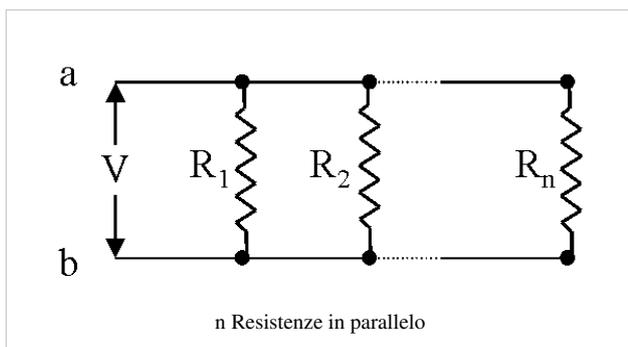
$$[\Omega] = \frac{[V]}{[A]}$$

Le resistenze sono dei componenti circuitali rappresentati dal simbolo mostrato in figura.

Alcuni esempi esempio A, esempio B,



### Resistenze in parallelo



Immaginiamo di avere  $n$  resistenze ciascuna di valore  $R_i$  poste in parallelo come mostrato in figura.

Definiamo come  $I_i$  la corrente che scorre in ciascun resistore. La d.d.p.  $V_i$  ai capi di ogni resistenza sarà eguale (come nel caso dei condensatori in parallelo), mentre la corrente totale  $I$  è data dalla somma delle correnti che scorrono nei vari resistori, a causa della I legge di Kirchhoff:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i$$

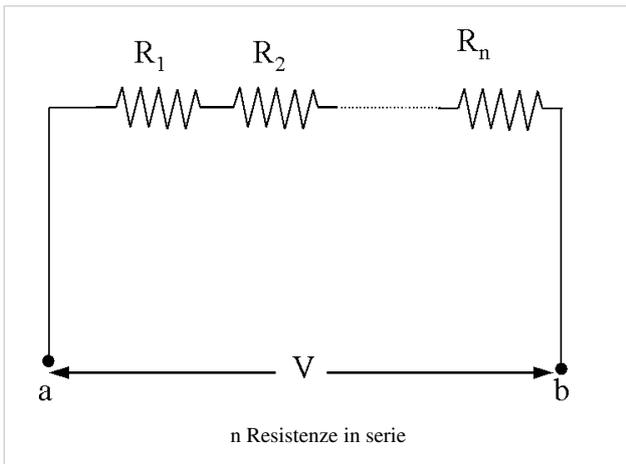
Ma dalla legge di Ohm applicata ad ogni resistore:

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{V}{R_i} = V \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

Quindi il parallelo di  $n$  resistori si comporta come una unica resistenza equivalente di valore eguale a:

$$R_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} \quad (18)$$

### Resistenze in serie



Immaginiamo di avere  $n$  resistenze in serie di valore  $R_i$  come mostrato in figura. Definiamo con  $V_i$  la d.d.p. ai capi di ogni resistenza. La d.d.p. totale è pari alla d.d.p. ai capi del sistema sarà la somma delle d.d.p. dei singoli elementi. La corrente che scorre nei vari resistori è eguale a causa di quello che abbiamo visto nelle condizioni stazionarie per i fili percorsi da corrente.

Da cui segue che:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = I \sum_{i=1}^n R_i$$

Quindi la serie di  $n$  resistenze equivale ad una

resistenza equivalente pari alla somma dei singoli elementi:

{ {Equazioneleq=

$$R_e = \sum_{i=1}^n R_i \quad (19)$$

Si noti come le resistenze elettriche si comportano in maniera opposta ai condensatori per quanto riguarda la serie ed il parallelo.

### Legge di Joule

In un generico conduttore (non necessariamente rispettante la legge di Ohm), in cui scorre una corrente  $I$  e ai cui capi vi è una d.d.p. pari a  $V$ , tutta l'energia elettrica ceduta al conduttore viene dissipata o in calore o in altre forme di energia. Quantitativamente la potenza elettrica dissipata è pari al lavoro compiuto sulla carica  $dQ$  che nel tempo  $dt$  va tra il punto  $a$  e  $b$  la cui d.d.p. vale  $V$ .

$$P = V \frac{dQ}{dt} = VI \quad (20)$$

In particolare, se per il conduttore vale la legge di Ohm, la eq.20 si può scrivere come:

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (21)$$

Da un punto di vista microscopico, considerando i singoli portatori di carica a causa del moto viscoso la potenza dissipata è pari secondo le leggi della meccanica del punto per ogni portatore a :

$$P = q\vec{E} \cdot \vec{v}_d$$

Anche se non valesse la legge di Ohm eq.12 potrei scrivere tale espressione. Esplicitando  $v_d$  in termini di  $\vec{J}$  e moltiplicando per le  $dN = n dT$  cariche presenti nel volume  $dT$ :

$$dP_T = dT n q \vec{E} \cdot \vec{v}_d = dT \vec{E} \cdot (n q \vec{v}_d) = dT \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (22)$$

Quindi per unità di volume:

$$P_u = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (23)$$

Quindi in un volume  $T$  la potenza totale dissipata vale:

$$P = \int_T \vec{E} \cdot \vec{J} dT$$

Se vale la legge di Ohm la eq.\ref{Joulelo} si riduce a:

$$P_u = \rho J^2 = \frac{E^2}{\rho} \quad (24)$$

A temperatura ambiente, come regola generale, si può affermare che una potenza dissipata maggiore di qualche decina di  $W/cm^3$  richiede in genere metodi di dissipazione particolari per evitare che i conduttori si scaldino eccessivamente.

La potenza per unità di volume massima che ha dei limiti imposti dal meccanismo di dissipazione della energia, in genere di natura termica, porta al fatto che le linee elettriche vanno dimensionate (sezione proporzionale alla corrente massima) in funzione della corrente massima. Inoltre si realizzano semplici limitatori di corrente elettrica, mediante fili sottili, sospesi, detti nel linguaggio comune fusibili: sono degli elementi che per effetto Joule quando sono attraversati da una corrente superiore ad un certo valore si spezzano interrompendo i circuiti elettrici.

Alcuni esempi possono aiutare a capire meglio Esempio di un faro una macchina, Resistenza di un filo di rame a sezione conica.

Argomento seguente: Leggi di Kirchhoff

# Le leggi di Kirchhoff

Argomento precedente: Elettrodinamica

## Generatori di f.e.m

Lo studio e l'utilizzo delle correnti elettriche è stato possibile solo con la scoperta da parte di Alessandro Volta nel 1799 della prima pila, basata sulla trasformazione di energia chimica in energia elettrica. Una pila elementare è semplicemente costituita da due metalli diversi (ad esempio nel caso della pila di Volta zinco e rame) immersi in una soluzione acida (acido solforico). Il rame diventa positivo rispetto allo zinco e si genera una d.d.p. di circa 1.5 V. Quindi collegando i due elettrodi fluisce una corrente elettrica (il cui valore è limitato dalla reazione chimica che avviene). Fino al 1869, data della scoperta della dinamo le batterie, anche se modificate rispetto alla scoperta iniziale di Volta, sono state l'unico elemento in grado di generare corrente elettrica.

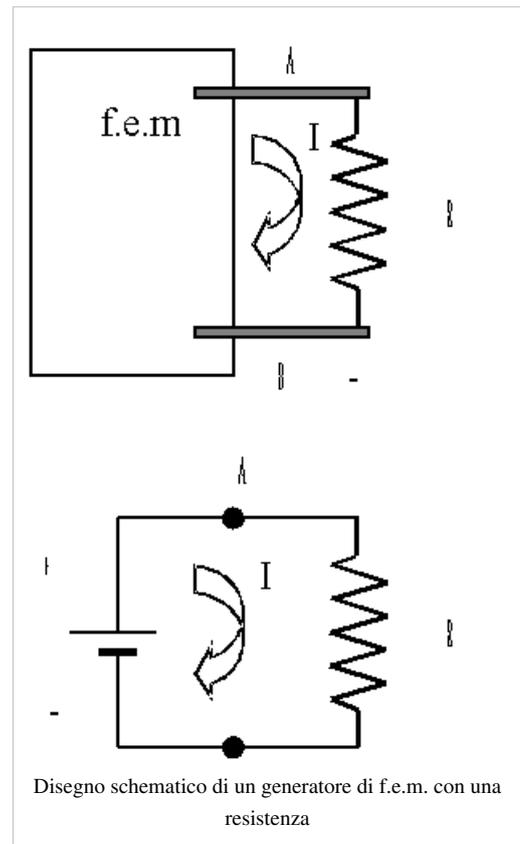
Si chiamano generatori di forza elettromotrice tutti i dispositivi che producono energia elettrica trasformando energia di altro tipo. Infatti per potere far circolare della corrente elettrica (in maniera permanente) in un circuito elettrico è necessario di avere a disposizione forze non elettriche che spostino le cariche. Tali forze devono opporsi alle forze elettriche ed essere in grado di accumulare le cariche elettriche di segno opposto in particolari zone dello spazio (che in seguito chiamerò i morsetti del generatore di f.e.m). Se le zone dello spazio dove si accumulano le cariche elettriche sono connesse tra di loro tramite circuiti elettrici, le forze elettriche tenderanno a riequilibrare la distribuzione delle cariche, tramite spostamento di cariche e quindi generando un corrente elettrica.

La corrente elettrica circolante nel circuito sarà eguale a quella prodotta dalle forze non elettriche nel generare la separazione di cariche.

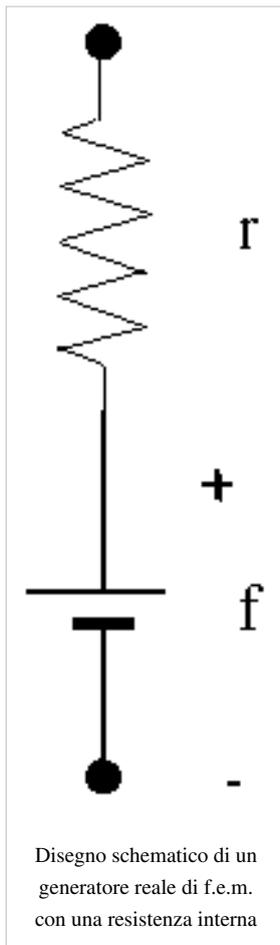
Se invece le zone non sono elettricamente connesse la situazione di equilibrio viene raggiunta quando le forze elettriche che nascono dalla separazione delle cariche si bilanciano esattamente con le forze non elettriche che spostano le cariche. Tali forze si possono immaginare generate da un campo di forze, definito come il campo elettrico, cioè per unità di carica, detto campo elettromotore (tale campo è in genere non conservativo, ma questo non influenza la definizione in quanto interessa solo l'integrale di linea da un morsetto all'altro all'interno del dispositivo).

Un qualsiasi dispositivo di questo genere si chiama generatore di f.e.m.: è in realtà un dispositivo attivo che converte energia di natura non elettrica (chimica per le batterie e le celle a combustibile, solare per le celle solari, meccanica per le dinamo o gli alternatori ecc.) in energia elettrica.

Il più semplice circuito che si può immaginare è costituito da un generatore di f.e.m (una batteria ad esempio) tra i cui morsetti è posta una resistenza  $R$  come indicato in alto e in maniera schematica in basso. In tale figura è anche mostrato il simbolo di un generatore di f.e.m. Il generatore genera una d.d.p.  $V_A - V_B$ , ai capi della resistenza  $R$ , in questa circola una corrente  $I$  in senso orario (se invertissi i morsetti sarebbe in senso antiorario) e valendo la legge di Ohm posso scrivere:



$$V_A - V_B = IR \quad (1)$$



L'integrale di linea del campo elettromotore (forza di natura non elettrica) tra i due morsetti viene chiamata forza elettromotrice del generatore, spesso rappresentata con  $f$ , e ha le dimensioni di un lavoro per unità di carica, quindi nel SI si misura in  $V$  (Volts). Un generatore di forza elettromotrice è caratterizzato dalla sua d.d.p. a morsetti aperti (non connessi a nessun circuito). Il generatore è connesso ad un circuito esterno che può essere una semplice resistenza o qualcosa di più complicato: che viene indicato con il nome generico di carico.

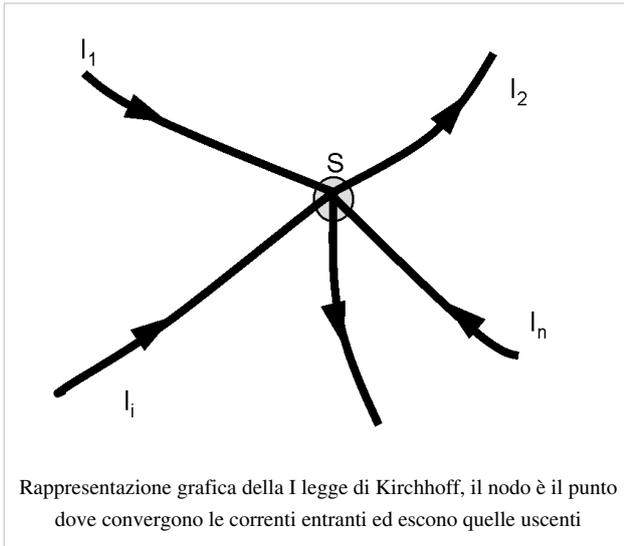
Non si possono trascurare i fenomeni dissipativi elettrici all'interno del generatore, come anche il fatto che non possa essere generata una corrente troppo grande; questo fatto in maniera empirica viene rappresentato con una resistenza in serie interna al generatore chiamata appunto resistenza interna. Quindi un generatore reale viene rappresentato come nella figura a fianco. Quindi dato un generatore di f.e.m.  $f$  e resistenza interna  $r$  collegato ad un carico semplice costituito da una semplice resistenza elettrica  $R$  la corrente circolante sarà:

$$I = \frac{f}{R + r} \quad (2)$$

Ovviamente se  $R \gg r$  l'effetto della resistenza interna è trascurabile. Il funzionamento interno di un generatore di f.e.m. solo idealmente è rappresentabile nel modo indicato.

Ad esempio in una batteria reale la  $f$  diminuisce via via che la batteria eroga corrente ed aumenta la sua resistenza interna. In ogni caso a meno che la sorgente non abbia limiti (come una batteria ricaricabile che venga continuamente ricaricata) un generatore è caratterizzato anche dalla sua capacità di carica: cioè la carica in essa contenuta quando è perfettamente carica. Per tale capacità l'unità di misura nel sistema SI è il Coulomb, nella pratica, di uso commerciale, si usa l'ampere ora (un'unità di misura non SI 3600 volte più grande del Coulomb).

Le batterie ricaricabili sono dei sistemi più complessi che presentano anche isteresi, per cui la capacità dipende dal meccanismo di carica e scarica: tale fenomeno va sotto il nome di memoria delle batterie (le batterie ricaricabili al NiCd vengono sostituite in questi anni da altri tipi di batteria proprio a causa di tale comportamento indesiderato).



## La prima legge di Kirchhoff

La prima legge di Kirchhoff la abbiamo già vista ed è conseguenza della conservazione carica. Tale legge stabilisce che in un nodo la somma delle correnti entranti  $I_{in,i}$  è pari a quella delle correnti uscenti  $I_{out,j}$ :

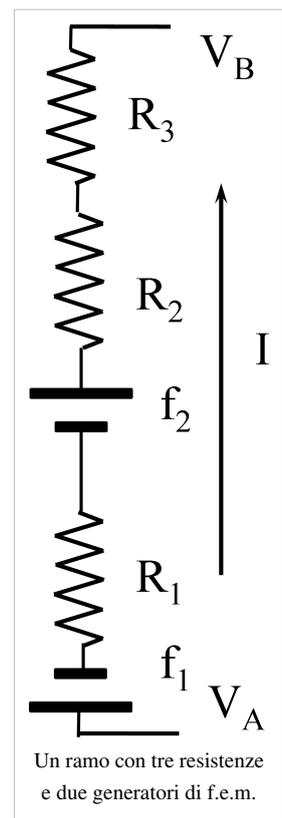
$$\sum_i I_{in,i} = \sum_j I_{out,j} \quad (3)$$

Un nodo è un punto fisico in cui convergono più fili conduttori, privo di capacità elettrica. Notare che questa ultima condizione è essenziale, in quanto se il punto fisico avesse capacità elettrica nei fenomeni transitori la legge non sarebbe valida. Infatti la prima legge di Kirchhoff vale sia per i fenomeni stazionari (quelli che stiamo studiando), ma ha una validità più generale per fenomeni transitori o in genere per fenomeni in cui le correnti variano nel tempo. Tale legge ha un carattere generale per molti altri campi, ad esempio in idraulica se si ha che convergono più tubature in un unico punto, da cui si dipartono altre tubature, la quantità di acqua entrante è eguale a quella uscente, a meno che nel punto in cui convergono le tubature non sia presente un serbatoio, che ha la stessa funzione di un condensatore nei fenomeni non stazionari.

## La seconda legge di Kirchhoff

### Ramo

Una serie di vari elementi circuitali, resistenze, generatori di forza elettromotrice, elementi non ohmici, condensatori eccetera costituiscono un ramo. Tali elementi sono attraversati dalla stessa identica corrente (la ragione di ciò per quanto riguarda i condensatori sarà giustificata nel seguito quando parleremo di corrente di spostamento). In ogni caso limitiamo le considerazioni al caso in cui siano presenti solo resistenze e generatori di forza elettromotrice. Se conosciamo la corrente, le resistenze e i generatori di f.e.m.



Possiamo in maniera algebrica calcolare cosa succede in un caso particolare

Esaminiamo la figura subito sopra, immaginando che il verso della corrente  $I$  sia come indicato dall'alto verso il basso ricavare la tensione  $V_B$  a partire da quella in  $V_A$ .

$$V_B = V_A - f_1 - IR_1 + f_2 - IR_2 - IR_3$$

Notare che mentre  $f_1$  è disposto in maniera opposta alla corrente

(cioè corrisponde ad un generatore che assorbe corrente), l'altro generatore favorisce la circolazione della corrente. Mentre ad ogni resistenza corrisponde una caduta di potenziale. Se il verso della corrente fosse stato l'opposto si sarebbe avuto una inversione di tutti i segni.

In generale dato un ramo, in cui sono presenti  $N$  generatori di f.e.m.  $f_i$ , ed  $M$  resistenza  $R_j$  possiamo scrivere che:

$$V_A - V_B + \sum_{i=1}^N f_i = \sum_{j=1}^M IR_j \quad (4)$$

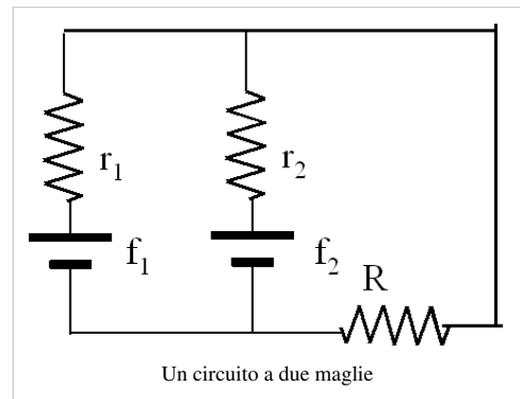
Questa relazione è chiamata legge di Ohm generalizzata.

## Maglia

Un insieme di rami che formano un circuito chiuso si chiama maglia. Ad esempio nella figura a fianco si hanno due maglie. Una maglia non è altro che un insieme di molti rami per ciascuno dei quali può scriversi l'equazione, che quindi diventa un sistema di equazioni pari al numero dei rami che compongono la maglia. Se sommiamo tra di loro tutte queste equazione le somme di tutte le differenze di potenziale si annullano (se si vuole a causa della conservatività del campo elettrostatico).

## Definizione della seconda legge di Kirchhoff

Quindi la seconda legge di Kirchhoff stabilisce che per ogni maglia composta da  $N$  generatori di forza elettromotrice  $f_i$ , ed  $M$  resistenze  $R_j$  possiamo scrivere:



$$\sum_{i=1}^N f_i = \sum_{j=1}^M R_j I_j \quad (5)$$

Si noti che in questo le correnti nei vari rami sono in generale differenti, mentre in un singolo ramo erano eguali.

Le legge di Kirchhoff consentono di scrivere apparentemente un numero di equazioni superiore alle incognite, in realtà si dimostra che le equazioni indipendenti sono pari al numero delle incognite. Ad esempio nel caso mostrato il Le regole di Kirchhoff si estendono alle maglie in cui sono presenti condensatori, infatti anche per i condensatori vale la legge di continuità della corrente.

L'esempio che segue basato sul circuiti a due maglie appena mostrato chiarisce il problema. Se le incognite sono  $I_1$  (corrente in  $r_1$ ),  $I_2$  (corrente in  $r_2$ ) e  $I_3$  (corrente in  $R$ )

per il nodo superiore posso scrivere (correnti entranti = corrente uscente):

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Il nodo inferiore definisce una equazione eguale algebricamente:

$$I_3 = I_1 + I_2$$

Per quanto riguarda le maglie possiamo scrivere tre equazioni:

$$f_1 = I_1 r_1 + I_3 R$$

$$f_2 = I_2 r_2 + I_3 R$$

$$f_1 - f_2 = I_1 r_1 - I_2 r_2$$

ma chiaramente l'ultima equazione si ottiene dalla differenza delle due che la precedono, quindi il sistema completo di tre equazioni in tre incognite è solo quello fatto da:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

$$f_1 = I_1 r_1 + I_3 R$$

$$f_2 = I_2 r_2 + I_3 R$$

## Teorema di Thevenin

Dalle leggi di Kirchhoff segue il teorema Thevenin utile nella pratica del calcolo dei circuiti elettrici.

*Il Teorema di Thevenin afferma che qualunque rete lineare attiva, facente capo a due terminali  $AB$ , si comporta, nei riguardi del carico su cui è chiusa, in modo del tutto equivalente ad un generatore di opportuna f.e.m. ed una opportuna resistenza interna*

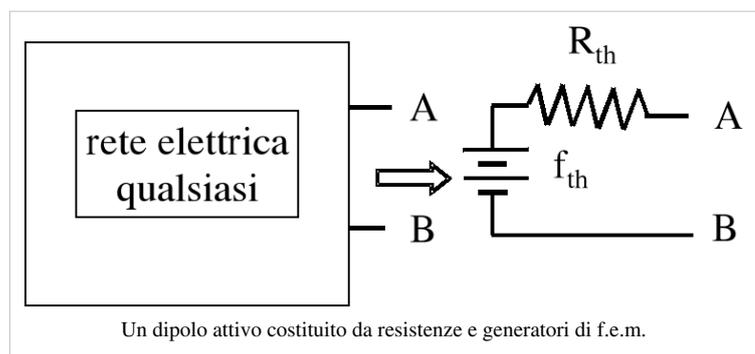
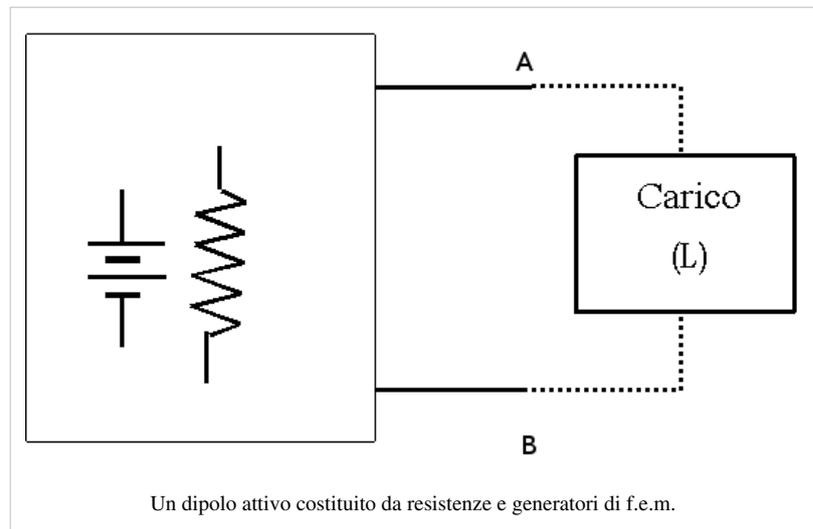
Consideriamo una rete elettrica comunque complessa, costituita da generatori di f.e.m. e resistenze

(variamente collegati tra di loro). Supponiamo di inserire tra due punti qualunque  $A$  e  $B$  della rete un qualunque elemento circuitale (chiamiamo tale elemento circuitale, esterno alla rete, carico).

Tale sistema è schematizzato in figura, in cui il blocco rettangolare contenente i simboli della resistenza e del generatore di f.e.m. rappresenta la rete in esame, di cui sono lasciati in evidenza solo i punti  $A$  e  $B$  ed il carico  $L$  (che può essere una resistenza, un condensatore, una induttanza, un generatore di f.e.m., un elemento attivo quale i transistor eccetera, oppure una combinazione qualunque di tali elementi).

Una rete così fatta è chiamata bipolo attivo ed i punti  $A$  e  $B$  sono i morsetti del bipolo attivo.

Il teorema di Thevenin afferma che qualunque bipolo attivo si comporta nei riguardi del carico su cui è chiuso in modo del tutto equivalente ad un generatore di tensione avente opportuna f.e.m. ed opportuna resistenza interna. Risulta cioè che agli effetti della tensione ai capi del carico e della corrente che lo attraversa, il bipolo attivo, comunque complesso, è equivalente ad un generatore di tensione  $f_{th}$  ed una resistenza in serie  $R_{th}$  ad esso.  $f_{th}$  non è altro che la d.d.p. che si presenta ai capi del bipolo attivo, quando non è chiuso sul carico.  $R_{th}$  invece è la resistenza vista dai morsetti  $A$  e  $B$  del dipolo attivo, quando in esso tutti i generatori sono stati soppressi e sostituiti dalle loro resistenze interne (o se sono trascurabili da un corto circuito).



## Generatori di f.e.m. in serie e in parallelo

Dal teorema di Thevenin si dimostra facilmente che se ho  $n$  generatori di f.e.m.  $f_i$  in serie con una resistenza interna  $r_i$  è equivalente ad avere un unico generatore di f.e.m. con:

$$f_e = \sum_{i=1}^n f_i$$

e resistenza interna:

$$r_e = \sum_{i=1}^n r_i$$

Sempre dal teorema di Thevenin, per quanto riguarda il parallelo di due soli generatori ( $f_1, r_1, f_2, r_2$ ) (si generalizza facilmente il caso a  $n$  generatori) che siano disposti con i morsetti concordi si dimostra il sistema equivale ad un generatore di:

$$f_e = f_1 - \frac{f_1 - f_2}{r_1 + r_2} r_1$$

$$r_e = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

Alcuni esempi sono di aiuto per comprendere quanto detto: Resistenze serie e parallelo, due maglie, tre maglie, carica di un telefonino, due generatori reali su un carico variabile.

## Carica e scarica dei condensatori

### Scarica

Immaginiamo di avere un condensatore carico con una carica iniziale  $Q_0$  (positiva sulla armatura superiore) e al tempo  $t = 0$  mettiamo in contatto le due armature cariche attraverso la resistenza  $R$  (indicato simbolicamente nella figura dall'interruttore che connette i punti più a destra). Ad ogni istante la carica presente sulla armatura positiva sarà  $Q(t)$  ed una corrente  $I(t)$  scorrerà nella resistenza  $R$ , ma dovendo essere nulla la circuitazione del campo elettrico nella maglia costituita dai due elementi circuitali detti le differenze di potenziale ai loro capi devono essere eguali istante per istante:

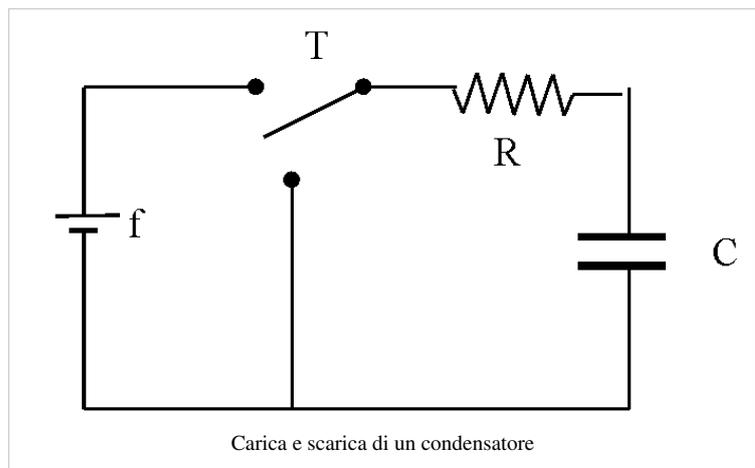
$$\frac{Q(t)}{C} = I(t)R$$

Avendo scelto come verso della corrente il senso contro orario (dal potenziale maggiore l'armatura superiore a quello inferiore). La derivata cambiata di segno della carica istantanea è pari a tale corrente, omettendo per semplicità la dipendenza dal tempo:

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

Quindi l'equazione della maglia diventa

$$\frac{Q(t)}{C} = -R \frac{dQ}{dt}$$



Separando le variabili:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

Se definiamo la costante di tempo :  $RC = \tau$  e integriamo dall'istante iniziale al tempo generico  $t'$ , quando la carica ha un valore  $Q'$  :

$$\int_{Q_0}^{Q'} \frac{dQ}{Q} = - \int_0^{t'} \frac{dt}{RC}$$

$$Q' = Q_0 e^{-t'/\tau}$$

cambiando di nome alle variabili mute:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$$

La costante di tempo, data dal prodotto della resistenza per la capacità, determina la velocità con cui si scarica il condensatore la cui carica diminuisce con legge esponenziale, chiaramente la tensione ai capi del condensatore  $V_C$  diminuisce anche essa esponenzialmente nel tempo:

$$V_C(t) = \frac{Q_0}{C} e^{-t/\tau}$$

Come anche la corrente circolante nella maglia:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau}$$

Dal punto di vista del bilancio energetico, l'energia totale dissipata per effetto Joule, nella resistenza, è pari a:

$$E_d = \int_0^\infty I(t)^2 R dt = R \frac{Q_0^2}{(RC)^2} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$$

Ciò tutta l'energia immagazzinata nel condensatore inizialmente viene dissipata per effetto Joule nella resistenza (rispettando la conservazione dell'energia).

## Carica

Il processo inverso corrisponde (fare sempre riferimento alla figura) al connettere un condensatore inizialmente scarico ad un generatore di forza elettromotrice. In questo caso il segno scelto per la corrente è quello orario e l'equazione della maglia è:

$$f = RI(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

In questo caso ovviamente la corrente è la semplice derivata della carica nel tempo:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Quindi l'equazione della maglia diventa:

$$f = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$$

separando le variabili:

$$\frac{dQ}{Q - Cf} = -\frac{dt}{\tau}$$

Che integrata:

$$\int_0^{Q'} \frac{dQ}{Q - Cf} = \int_0^{t'} -\frac{dt}{\tau}$$

$$Q(t) = Cf (1 - e^{-t/\tau})$$

Quindi la tensione ai capi del condensatore cresce con la stessa legge:

$$V_C(t) = f (1 - e^{-t/\tau})$$

Mentre la corrente di carica sarà:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{f}{R} e^{-t/\tau}$$

Dal punto di vista del bilancio energetico, il sistema non è isolato e quindi mentre l'energia totale fornita dal generatore di f.e.m. vale:

$$E_f = \int_0^\infty f I(t) dt = \frac{f^2}{R} \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt = C f^2$$

L'energia immagazzinata nel condensatore vale come già visto:

$$E_c = \frac{1}{2} C f^2$$

Che è la metà di quella fornita dal generatore in quanto il resto dell'energia viene dissipata per effetto Joule nella resistenza, infatti:

$$E_d = \int_0^\infty I(t)^2 R dt = R \frac{f^2}{R^2} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} C f^2$$

Riepilogando la carica e la scarica di un condensatore sono fenomeni che si svolgono in un tempo determinato dalla costante di tempo del circuito. Il condensatore nel processo di carica si comporta come una resistenza variabile nulla nell'istante iniziale e sempre maggiore via via che viene caricato. Nel processo di scarica si comporta come un generatore di f.e.m. variabile con f.e.m. iniziale eguale alla carica iniziale divisa la capacità.

Alcuni esempi: connessione di un condensatore carico ad uno scarico, carica di un condensatore, carica di un condensatore con generatore reale, carica di un condensatore con due resistenze nel circuito, scarica di un condensatore con due resistenze, due condensatori con una resistenza tra di loro.

Argomento seguente: Campi magnetici

# Campi magnetici

---

Argomento precedente: Elettrodinamica

## Cenni storici

Fenomeni magnetici sono ben noti fin dall'antichità. Al nome magnetismo si attribuisce un significato misterioso, anche se le sue leggi non offrono nessun problema concettuale nelle conoscenze scientifiche attuali. L'osservazione di alcuni fenomeni naturali dovuti a delle rocce ad alto contenuto di ferro, è all'origine di tale nome. Infatti dal punto di vista etimologico il nome magnetismo deriva dalla magnetite, un ossido di Ferro ( $FeOFe_2O_3$ ), che prende nome da una città greca dell'Asia Minore: Magnesia. Gli antichi greci nell'800 a.C. già parlavano di tali materiali.

L'uso della bussola, un ago magnetico sospeso per il suo centro di massa e libero di ruotare, comincia ad essere noto nel mediterraneo intorno al 1000 d.C., ma sembra che il suo uso fosse già noto ai cinesi e agli arabi. Le bussole risentono della azione del campo magnetico terrestre che esercita una coppia che allinea gli oggetti magnetizzati approssimativamente secondo il meridiano terrestre.

Gilbert nel 1600, scrisse un ponderoso trattato, *De magnete*, che rappresenta una fedele descrizione dei fenomeni dei magneti naturali e del magnetismo terrestre. Egli si rese conto pure che il ferromagnetismo sparisse al di sopra di una certa temperatura.

Successivamente Coulomb, nel 1785, usando una bilancia di torsione, stabilì la legge della forza che viene esercitata tra cariche elettriche e poli magnetici; tale forza va con il quadrato della distanza ed inoltre poli eguali si respingono e poli opposti si attraggono. E' ovvia la grande analogia tra le forze con cui si attraggono o respingono i poli, nord sud, dei magneti e le forze tra cariche elettriche, positive e negative. Notare come da un punto di vista sperimentale sia molto più semplice studiare le forze tra poli magnetici che rimangono tali nel tempo, e quelle tra cariche elettriche che tendono a scaricarsi a causa della conducibilità dell'aria e delle cariche libere in essa presente. Fino all'inizio del 1800 vi era una netta distinzione tra fenomeni elettrici e magnetici, che pur presentavano analogie.

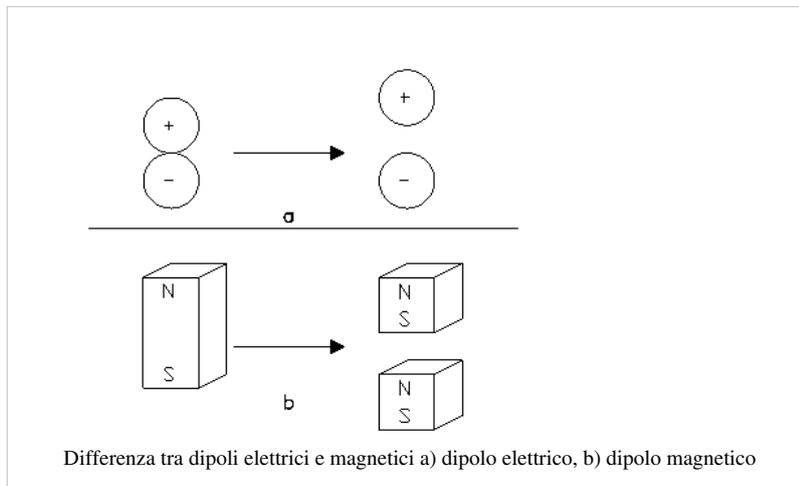
Il 1820 è un anno particolarmente felice per le scoperte sul magnetismo. H. C. Ørsted nel luglio di quell'anno scoprì che si esercitavano forze tra magneti permanenti e fili percorsi da corrente. In realtà la stessa scoperta era stata fatta nel 1802 da Gian Domenico Romagnosi, ma fu ignorata. Poche settimane dopo A. M. Ampère scoprì che una spira percorsa da corrente si comporta in maniera analoga ad un magnete permanente. Infine nell'ottobre J. B. Biot e F. Savart comunicano all'Accademia delle Scienze Francese le misure sulla dipendenza dalla distanza della forza magnetica prodotta da un filo percorso da corrente. Pierre de Laplace, un grande scienziato dell'epoca, basandosi su quest'insieme di fatti sperimentali formulò le leggi generali che permettono di calcolare sia il campo magnetico prodotto da un elemento di circuito percorso da corrente, che la forza che si esercita sullo stesso immerso in un campo magnetico.

Il quadro di insieme dei fenomeni elettrici e magnetici viene fatto nelle equazioni di Maxwell che furono presentate alla Royal Society nel 1864.

Solo la teoria della relatività ristretta sviluppata nel 1905 da A. Einstein, permise di mettere insieme in un quadro logico più ampio tutti i fenomeni. Tale teoria mostrava, che, essendo la velocità della luce la massima possibile in natura, anche l'azione elettrica a distanza tra oggetti carichi elettricamente non si propaga a velocità infinita, come invece abbiamo implicitamente supposto finora. Quindi, finché i fenomeni sono puramente statici la velocità di propagazione delle forze elettriche non è importante, ma, ogni qual volta si ha a che fare con cariche in moto, in particolare quando si hanno correnti elettriche, bisogna tenere conto della velocità di propagazione delle forze elettriche. Il magnetismo è causato dalla azione a distanza tra cariche in moto, se la velocità con cui si propagano le forze elettriche fosse infinita non si avrebbe il magnetismo. Ma siccome la velocità di propagazione delle azioni elettriche è quella della luce, per la descrizione della cinematica e dinamica delle forze elettriche in presenza di cariche in moto, non è possibile utilizzare le equazioni della meccanica classica, ma siamo costretti a utilizzare la

teoria della relatività ristretta. Questo approccio per quanto logico non viene qui seguito a causa della complessità dei ragionamenti.

## Campi magnetici in generale



La prima osservazione sperimentale riguarda i dipoli magnetici, che come vedremo rappresentano l'elemento di base dei campi magnetici. I dipoli magnetici generano a grande distanza un campo magnetico che ha un andamento analogo al campo elettrico generato da un dipolo elettrico. L'ago di una bussola è un tipico esempio di un dipolo magnetico, ma anche il magnetismo terrestre con una buona approssimazione è generato da un dipolo localizzato sul centro della terra

i cui poli magnetici sono approssimamente disposti come i poli geografici. La figura illustra l'osservazione sperimentale che i poli magnetici non sono separabili. Cioè se viene spezzato un magnete, se ne formano due nuovi con entrambi i poli magnetici. A differenza dei dipoli elettrici, in cui le due regioni di carica opposta di cui si compone sono separabili. Inoltre dalla regione positiva partono le linee del campo elettrico che terminano nelle regioni negative. Quindi le linee del campo elettrico sono delle linee con un inizio ed una fine. In natura non è stata mai trovata un polo magnetico isolato: il monopolio magnetico. La mancanza di monopoli magnetici, non ci permette di definire il campo magnetico in una maniera simile a quella usata per definire il campo elettrico. Infatti esistendo le cariche elettriche libere, abbiamo definito il campo elettrico come quella quantità data dal rapporto tra la forza elettrica locale e la carica elettrica di prova fatta tendere ad un valore molto piccolo. Se non disponessimo di cariche elettriche libere, ma di soli dipoli elettrici, avremmo potuto definire ugualmente il campo elettrico: la direzione del campo elettrico sarebbe stata quella in cui si sarebbe disposto un dipolo elettrico libero di ruotare, e la sua intensità sarebbe stata il rapporto tra il momento delle forze agenti su tale dipolo (quando venisse disposto ortogonalmente al campo) ed il valore del dipolo stesso. La quantità elementare conosciuta in magnetismo è il dipolo magnetico (ad esempio l'ago di una bussola). In presenza di un campo magnetico il dipolo tende ad allinearsi in una certa direzione, tale direzione è la direzione del campo elementare: l'induzione magnetica indicata come  $\vec{B}$ . Tale definizione ha senso purché il dipolo magnetico sia sufficientemente piccolo e debole da non perturbare il campo esistente. La intensità del campo magnetica può essere definita a partire dal momento della forza  $\vec{M}$  esercitata sul dipolo magnetico  $\vec{m}$ :

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

L'intensità del dipolo magnetico va definita mediante opportune unità di misura. La intensità del campo di induzione magnetica non può essere ancora quantificata in quanto non abbiamo ancora definito le unità di misura dei dipoli magnetici. In ogni caso a questo punto sia che  $\vec{B}$  sia prodotto da magneti permanenti, o come vedremo da circuiti elettrici, siamo in grado di definire in ogni punto dello spazio direzione, verso ed intensità a meno di un fattore di scala.

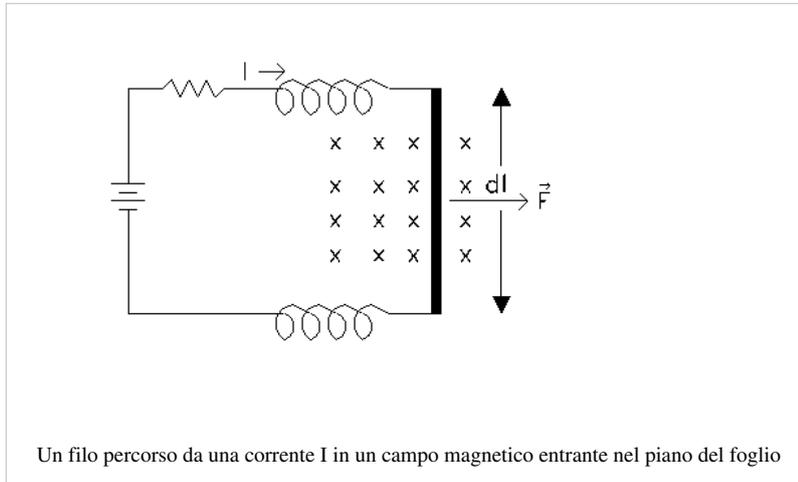
La mancanza di sorgenti del campo magnetico porta come conseguenza che le linee del campo magnetico siano sempre delle linee chiuse: questa è una differenza notevole con il campo elettrico per il quale esistono delle sorgenti specifiche le cariche elettriche e le linee del campo partono dalle cariche positive e convergono su quelle negative.

Argomento seguente: Leggi di Laplace

# Leggi di Laplace

Argomento precedente: Magnetismo

## La seconda legge di Laplace



Una osservazione sperimentale dovuta a Gian Domenico Romagnosi, permette di collegare il campo di induzione magnetica alla corrente elettrica.

Consideriamo un campo di induzione magnetica entrante nel foglio (le croci indicano tale fatto per definizione: la coda di una freccia)

Consideriamo un filo percorso da una corrente  $I$  lungo  $\vec{dl}$  come in figura: se la direzione del filo è ortogonale alla direzione del campo magnetico

sperimentalmente si trova che la forza che agisce su di esso sarà mutuamente perpendicolare sia alla direzione del campo magnetico che alla direzione del filo e proporzionale all'intensità della corrente ed alla lunghezza del filo.

In pratica è mostrato un generatore di f.e.m. fa scorrere la corrente nel circuito indicato, nel piano normale al filo vi è un campo magnetico di intensità  $|B|$  entrante nel foglio, per questo indicato con le  $x$ , una parte del circuito di lunghezza  $dl$  è mobile e tenuta da delle molle, si misura una forza nella direzione indicata schematicamente.

Si può quindi definire il campo di induzione magnetica, a partire da tale forza  $\vec{F}$  misurabile, come:

$$|B| = \frac{|F|}{I|dl|}$$

quindi nel sistema MKSA il campo di induzione magnetica si misura in Tesla definito come:

$$[B] = \frac{[N]}{[A][m]} = [T]$$

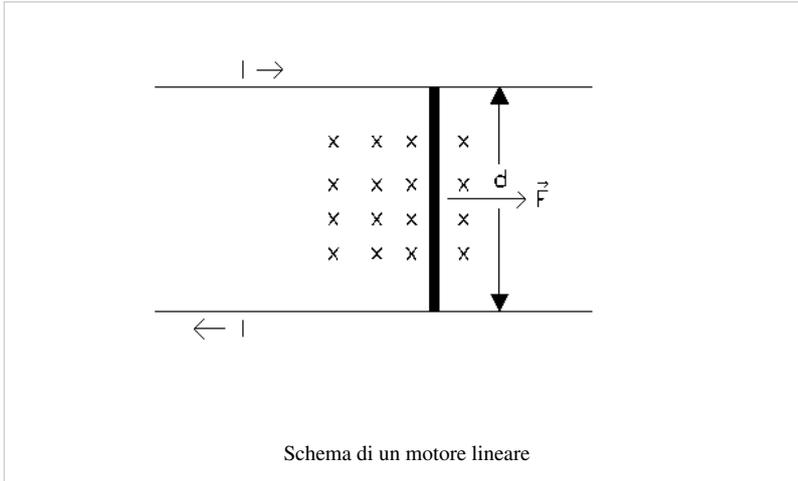
Se il filo è parallelo alle linee del campo su di esso in generale non agisce nessuna forza. Si deve a Laplace l'espressione matematica della forza di un campo magnetico su un filo percorso da corrente, detta seconda legge di Laplace:

$$\vec{dF} = I \vec{dl} \times \vec{B}$$

La così detta regola della mano destra può essere di aiuto nel calcolo della direzione della forza agente. Infatti se la direzione della corrente è quella dell'indice della mano destra e quella del campo magnetico è il medio, la direzione della forza è data dalla direzione del pollice.

Il campo magnetico terrestre può dare un'idea dell'intensità tipiche: alla nostra latitudine ( $42^\circ$ ) vale circa  $6 \times 10^{-5} T$ . Il campo magnetico prodotto da un magnete permanente tradizionale difficilmente supera il valore di  $1 T$ . Campi magnetici più intensi si raggiungono mediante magneti superconduttori, ma difficilmente in condizioni statiche si riescono ad avere intensità maggiori di  $25 T$ .

### Il motore lineare



L'applicazione più semplice della II seconda equazione di Laplace è il motore lineare. Cioè due rotaie percorse da una corrente  $I$  come in figura, in cui il vagono conduttore chiude la corrente circolante. Un campo magnetico uniforme viene applicato nella direzione normale al piano. Sul vagono agisce una forza di trascinamento  $F$  proporzionale all'intensità del campo, alla corrente ed alla distanza tra le rotaie.

Treni superveloci basati su questo principio sono allo studio in alcune nazioni (Giappone e Germania).

I motori elettrici in generale, che funzionano sull'estensione a geometrie più complesse dei principi di funzionamento del motore lineare, sono basati sulla conversione della energia prodotta dai generatori di f.e.m. in energia meccanica: notare che il campo magnetico non fa lavoro, ma solo il generatore di f.e.m.

### Forza di Lorentz

L'espressione della seconda legge di Laplace ci permette di trovare la forza agente su una singola carica in moto.

Dal modello microscopico sappiamo che il prodotto di una corrente elettrica per il tratto di filo elementare  $d\vec{l}$  in cui scorre, può essere scritta come:

$$I d\vec{l} = \vec{J} \cdot \vec{S} d\vec{l} = nq\vec{v}|S|dl = dNq\vec{v}$$

dove  $\vec{J}$  è la densità di corrente,  $\vec{S}$  è un vettore normale alla sezione del filo di modulo pari alla sezione stessa,  $n$  è il numero dei portatori di carica per unità di volume,  $\vec{v}$  la loro velocità,  $q$  la loro carica ed infine  $dN = nSdl$  il loro numero nel volume  $Sdl$ .

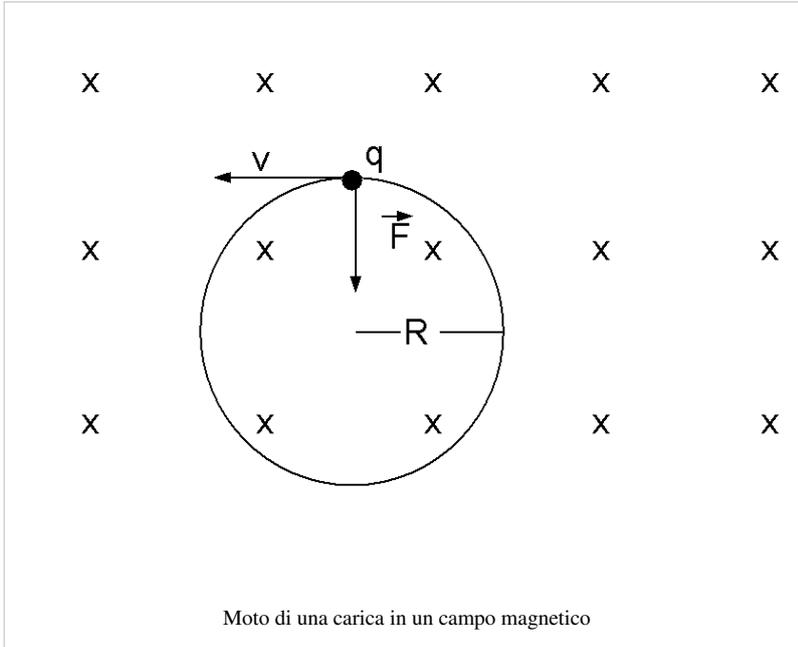
Sostituendo questa equazione nella seconda legge di Laplace, troviamo che la forza che agisce su una singola carica  $q$ , che si muova con velocità  $\vec{v}$  in campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  sia:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

In generale se quindi la particella carica si muove in un campo elettrico  $\vec{E}$  e magnetico  $\vec{B}$  l'espressione generale della forza, detta di Lorentz, che agisce su di essa, vale:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

### Moto di cariche in campi magnetici



Supponiamo di avere una regione di spazio, dove  $\vec{B}$  è costante, se in essa si trova una particella di massa  $m$ , carica  $q$  (positiva) e con velocità  $v$  normale alla direzione  $O$  di  $\vec{B}$  (entrante ne piano della figura). A causa della forza di Lorentz agirà su di essa una forza normale alla traiettoria, che non compie lavoro, quindi centripeta. In condizioni di equilibrio essendo l'accelerazione centripeta costante il moto nel piano normale al campo sarà un moto circolare uniforme con raggio di curvatura  $R$  facilmente ricavabile dalla relazione:

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

da cui:

$$R = \frac{mv}{qB}$$

la velocità angolare è:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

Al cambiare di segno della carica il raggio di curvatura cambia di segno e il moto, se era anti orario, diventa orario. Anche al cambiare del segno di  $\vec{B}$  il verso del moto si inverte.

La velocità angolare del moto non dipende dalla velocità della particella e prende nome di frequenza di ciclotrone. Gran parte delle conoscenze sulle particelle elementari dipende dallo studio del loro moto in presenza di campi elettrici e magnetici.

I raggi cosmici non raggiungono alle nostre latitudini la superficie della terra grazie all'esistenza del campo magnetico terrestre che ne incurva la traiettoria. Nei televisori la deflessione del fascio di elettroni che produce la scansione dell'immagine secondo righe e colonne viene fatta utilizzando dei campi magnetici perpendicolari alla traiettoria iniziale degli elettroni.

Se la velocità iniziale della particella ha una componente nella direzione di  $\vec{B}$  solo sulla componente di  $\vec{v}$  perpendicolare a  $\vec{B}$  agisce la forza di Lorentz, l'altra componente è non modificata, per cui il moto all'equilibrio diventa un moto elicoidale con asse la direzione di  $\vec{B}$ . La forza di Lorentz può essere nulla se:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$$

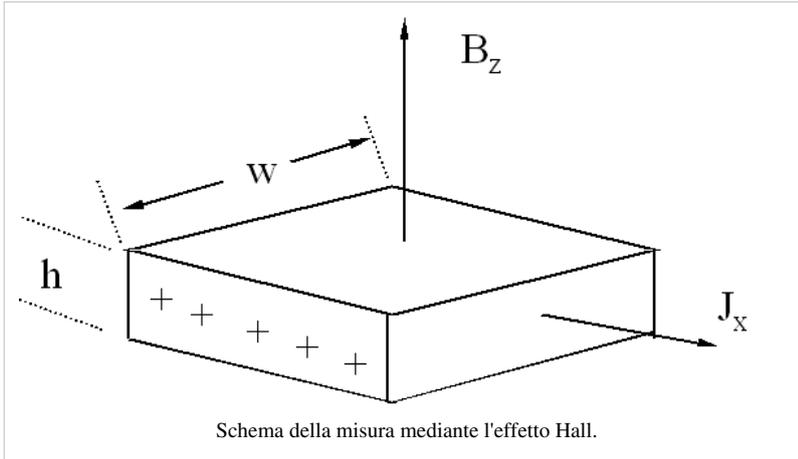
Cioè se  $\vec{E}$  è normale alla direzione di  $\vec{v}$  e di  $\vec{B}$  e inoltre in modulo:

$$v = \frac{|E|}{|B|}$$

Basato su questo principio si riescono a selezionare con estrema precisione ioni di massa qualsiasi in funzione della loro velocità. Infatti solo gli ioni che viaggiano su una traiettoria rettilinea riescono ad attraversare delle strette fenditure allineate.

L'esempio di un elettrone in moto dentro un campo magnetico chiarisce meglio quanto detto.

### Effetto Hall



Sperimentalmente si ha che in un metallo o meglio in un semiconduttore immerso in un campo magnetico, se viene percorso da una corrente nella direzione perpendicolare al campo magnetico, sulla faccia perpendicolare alla direzione sia della corrente che del campo magnetico si sviluppa una differenza di potenziale. La forza di Lorentz spiega in maniera semplice tale effetto.

Per semplicità consideriamo un caso di facile studio, una lastra di metallo o semiconduttore di spessore  $h$ , larghezza  $w$  e lunghezza  $l$  (non mostrata nella figura a fianco) attraversata nella direzione  $x$  da una corrente elettrica (caratterizzata per quanto abbiamo visto da una velocità di drift  $\vec{v}_d$ ). Se nella direzione dello spessore della lastra applichiamo un campo magnetico, questo tende a deviare la traiettoria degli elettroni aumentando la loro densità nella direzione della lastra non visibile in figura. Tale processo di accumulo di cariche genera nella direzione  $y$  un campo elettrico che si oppone alla forza di Lorentz; si raggiunge la condizione di equilibrio dinamico quando:

$$E_y - v_d B_z = 0$$

Il segno  $-$  in  $\vec{v}_d$  tiene conto del fatto che gli elettroni essendo di carica negativa hanno una velocità di drift opposta alla direzione della corrente elettrica. Sostituendo l'espressione della densità di corrente:

$$E_y = -\frac{J_x B_z}{ne}$$

Tale campo elettrico è costante nella direzione  $y$  e quindi integrandolo si ha che tra la faccia posteriore e anteriore della lastra si sviluppa una d.d.p. pari a:

$$V_y = -\frac{J_x B_z w}{ne}$$

Ma la densità di corrente è pari a:  $J_x = I/(wh)$ . Quindi:

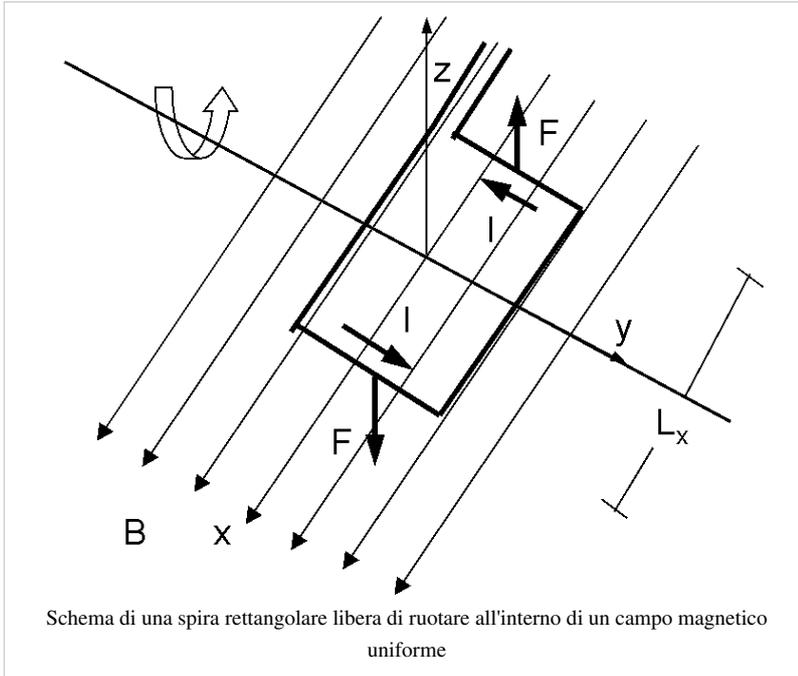
$$V_y = -\frac{I B_z w}{whne}$$

Dalla conoscenza del campo magnetico, dalla misura della differenza di potenziale e dalla corrente che scorre all'interno della piastrina è possibile misurare la quantità microscopica  $1/(ne)$ . Tale quantità viene chiamata costante di Hall  $R_H$  ed in maniera algebrica è pari a:

$$R_H = \frac{V_y h}{I B_z} = -\frac{1}{ne}$$

La costante di Hall dipende dal segno dei portatori di carica e nel caso dei semiconduttori l'effetto Hall, a causa del numero ridotto di portatori di carica l'effetto è particolarmente vistoso: cioè con correnti relativamente piccole e in presenza di campi magnetici abbastanza deboli le differenze di potenziale che si sviluppano possono essere facilmente misurate. Al contrario nei metalli l'effetto è poco visibile. L'effetto Hall oltre ad essere una misura di routine per determinare il drogaggio dei semiconduttori, viene usato per fabbricare semplici ed economici magnetometri che prendono il nome di sonde di Hall.

**Azione del campo magnetico su circuiti percorsi da corrente**



I motori elettrici in corrente continua utilizzano in pratica quanto viene descritto nel seguito.

Consideriamo il caso particolare mostrato in figura di una spira rettangolare di lato  $L_x$  ed  $L_y$  (non indicato nella figura per evitare confusione), percorsa da corrente  $I$  (circolante in senso antiorario) e con i lati paralleli agli assi  $x$  ed  $y$ . Immaginiamo che sia presente un campo magnetico  $\vec{B}$  diretto secondo l'asse  $x$ . Assumiamo la spira rigida e libera di ruotare intorno all'asse  $y$  della figura. Concentriamo la nostra attenzione sulla interazione tra spira e campo.

Sui due lati della spira di lunghezza  $L_x$  non agisce nessuna forza essendo paralleli al campo magnetico. Viceversa sugli altri due lati agiscono due forze eguali e contrarie dirette lungo l'asse  $z$  sul lato in alto:

$$F_z = IBL_y$$

sul lato opposto agisce una forza pari a:

$$F_z = -IBL_y$$

Quindi in totale agisce sul centro del sistema rigido una coppia di momento:

$$M_y = IBL_y \frac{L_x}{2} + IBL_y \frac{L_x}{2} = IL_x L_y B$$

Tale momento fa ruotare il sistema intorno all'asse  $y$ . Se infatti definiamo con  $\theta$  l'angolo che la normale al piano della spira forma con la direzione del campo magnetico. L'espressione del momento della forza diviene (il braccio diminuisce allontanarsi di  $\theta$  dalla direzione dell'asse delle  $z$ ):

$$|M| = I|B|L_x L_y \sin \theta$$

Sui lati inizialmente paralleli all'asse dell'  $x$  agiranno delle forze che tendono a deformare la spira e a cui si oppone la rigidità della spira. Se si definisce momento di dipolo di una spira percorsa dalla corrente  $I$  il vettore:

$$\vec{m} = IL_x L_y \vec{n} = IS\vec{n}$$

Dove  $S$  è la superficie della spira ed  $\vec{n}$  è la normale ad essa. La regola della mano destra ci può aiutare nel definire la direzione del dipolo magnetico. Se infatti la corrente elettrica si avvolge come fanno le dita della mano destra, la direzione di  $\vec{m}$  è quella del pollice della mano stessa. Ovviamente se il verso è opposto sarà la direzione del dipolo magnetico.

Le dimensioni del momento di dipolo magnetico sono quindi quelle di:

$$[corrente][superficie]$$

quindi nel sistema SI:

$$[A] \cdot [m]^2$$

La coppia di forze che agisce su una spira rettangolare è quindi esprimibile come, il prodotto vettoriale di  $\vec{m}$  con il vettore induzione magnetica  $\vec{B}$ :

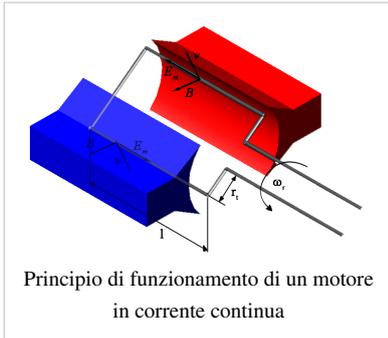
$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

L'effetto di un campo magnetico su un dipolo magnetico permanente è analogo a quello provocato su una spira percorsa da corrente. Tale equivalenza di comportamento risulta valida anche per i campi magnetici generati dai dipoli magnetici, cosa che vedremo nel seguito: tale equivalenza prende nome di teorema di equivalenza di Ampere.

Una spira di momento di dipolo magnetico  $\vec{m}$ , immersa in un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  è quindi soggetta ad una coppia di forze di momento  $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ .

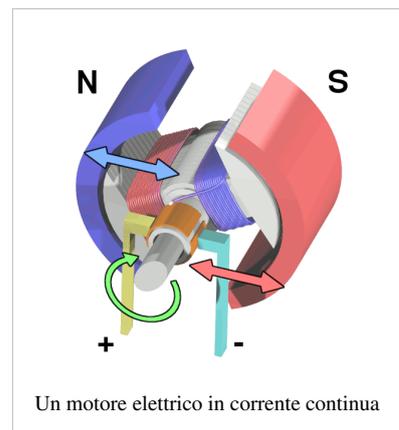
### Motore in corrente continua

L'applicazione più importante di tale proprietà è il motore in corrente continua, che permette di trasformare l'energia elettrica in energia meccanica.



La corrente elettrica passa in un avvolgimento di spire che si trova nel rotore. Si definisce rotore l'insieme delle parti rotanti, libere di ruotare attorno ad un asse comune, il rotore comprende una bobina di fili conduttori detta comunemente avvolgimento. Una corrente elettrica continua alimenta l'avvolgimento. Il rotore è immerso in un campo magnetico creato dallo statore: l'insieme delle parti fisse. Lo statore contiene le espansioni polari o di un magnete permanente con due o più poli o una elettromagnete.

Se il momento magnetico dell'avvolgimento del rotore non è diretto inizialmente nella direzione del campo magnetico dello statore, su di esso agirà una coppia di forze tale da farlo ruotare nel verso che corrisponde all'allineamento del momento magnetico dell'avvolgimento con il campo magnetico dello statore. Grazie alle spazzole, vedi dopo, ad ogni mezzo giro il verso della corrente circolante nell'avvolgimento cambia di verso, e quindi si ha continuità nella rotazione. L'inversione di polarità è garantita dal particolare disegno dell'avvolgimento che è in contatto mobile con i contatti fissi sullo statore: le cosiddette spazzole. La coppia agente sul rotore dipende dalla sua posizione angolare, ma il momento di inerzia del rotore media in qualche maniera il momento motore variabile. Un motore in corrente continua non può iniziare a ruotare se l'avvolgimento del rotore si trova in una posizione angolare non opportuna (punto morto). Ma vi sono accorgimenti tecnici per ovviare a tale inconveniente. Durante la trasformazione, una parte dell'energia viene dispersa per l'effetto Joule. Dato il principio di funzionamento, un motore elettrico fa sempre muovere l'albero motore di moto rotatorio.



### La prima legge di Laplace

J. B. Biot e F. Savart trovarono sperimentalmente che un filo rettilineo percorso da corrente  $I$  genera nello spazio circostante un campo magnetico. Le linee del campo sono delle circonferenze concentriche al filo e la loro intensità diminuisce linearmente con la distanza  $R$  dal filo. A partire da questa osservazione sperimentalmente Laplace ricavò una legge di valore più generale che lega la corrente  $I$  che scorre in un tratto infinitesimo  $d\vec{l}$  di circuito elettrico al campo di induzione magnetica  $d\vec{B}$  in un punto a distanza  $\vec{r}$  da filo:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{\mu}_r}{r^2}$$

Tale legge prende il nome di I legge di Laplace, chiamata anche legge di Biot-Savart, ed evidenzia come il campo di induzione magnetica vari con il quadrato dell'inverso della distanza, come la legge di Coulomb, ma con un carattere vettoriale molto differente. Infatti le componenti del campo di induzione magnetica sono nulle nella direzione radiale. Le linee del campo sono delle circonferenze concentriche alla direzione del filo.

La quantità  $\mu_o$  è chiamata permeabilità del vuoto le sue dimensioni sono:

$$\frac{[B][Lunghezza]}{[Corrente]}$$

nel sistema SI  $\mu_o$  vale:

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

Ma si ha anche:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}}$$

dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto. Siccome nel Sistema Internazionale la velocità della luce è una grandezza definita a priori in maniera esatta ( $c = 299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ), possiamo anche esprimere la permeabilità magnetica nel vuoto come:

$$\mu_o = \frac{1}{\epsilon_o c^2} T \cdot m/A$$

Il legame tra  $c$  e  $\epsilon_o$ ,  $\mu_o$  non è casuale ma implica il forte legame tra elettromagnetismo e teoria della relatività ristretta come appare più palese nella sezione che segue.

### Campo di una carica in moto

Se consideriamo che vale l'identità:

$$I \vec{dl} = \vec{J} d\tau$$

Dove  $d\tau$  è il volume infinitesimo di dimensione longitudinale  $dl$ . La I equazione di Laplace può anche essere scritta:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} d\tau = \frac{\mu_o n q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} d\tau$$

Dove  $n$  è il numero di cariche per unità di volume e quindi  $dN = n d\tau$  è il loro numero nel volume infinitesimo. Sostituendo anche a  $\mu_o$  la sua espressione in funzione di  $c$  si ha che il campo di induzione magnetica generato da una singola carica (dividendo per  $dN$ ) vale:

$$\vec{B} = \frac{1}{\epsilon_o c^2} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Ma il campo elettrico generato da una carica puntiforme in un punto a distanza  $r$  da essa vale:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \frac{q \vec{r}}{r^3}$$

Quindi:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$$

Se la velocità della luce fosse infinita, non vi sarebbe campo magnetico, in ogni caso l'intensità del campo magnetico è proporzionale al rapporto  $v/c^2$ .

### Campo di induzione magnetica di un circuito elettrico

Il campo di induzione magnetica prodotta da un circuito filiforme  $L$ , tale cioè che la densità di corrente si possa considerare costante sulla sua sezione, può essere ottenuto integrando la I formula di Laplace lungo  $L$ . Infatti se definiamo  $I$  la corrente che circola nel circuito segue che:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Tale espressione è una generalizzazione della I legge di Laplace e prende il nome di equazione di Biot-Savart (dal punto di vista storico è stata derivata per prima).

### Campo di induzione magnetica di un filo rettilineo

Un'applicazione classica della legge di Biot-Savart è il calcolo del campo prodotto da un filo rettilineo. Sia dato un filo rettilineo, come in figura, nel quale scorra una corrente  $I$ . Si voglia calcolare l'induzione magnetica in un qualsiasi punto  $P$  dello spazio a distanza  $R$  dal filo.

Scegliamo come asse  $z$  (con versore  $\vec{k}$ ) il filo stesso e come origine l'intersezione del filo con la normale passante per  $P$ . Se come asse  $x$  scegliamo la normale al filo passante per il punto  $P$  avremo che:

$$\vec{r} = (R, 0, z) \quad d\vec{l} = (0, 0, dz) \quad d\vec{l} \times \vec{r} = Rdz\vec{j}$$

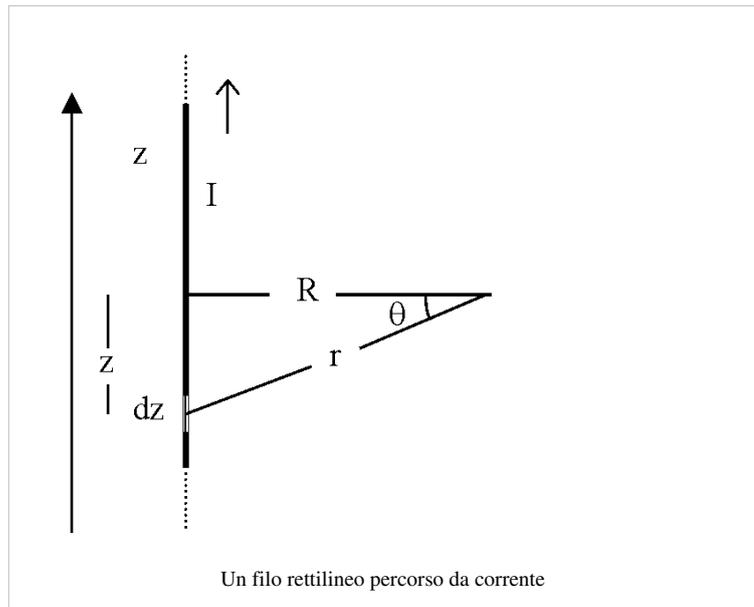
Il campo di induzione magnetica prodotto sarà quindi, applicando la equazione di Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Rdz\vec{j}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Sostituendo la espressione analitica dell'integrale precedente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \vec{j}}{4\pi R} \left[ \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{j} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{k} \times \vec{i}$$

Quindi il campo di induzione magnetica prodotto da un filo molto lungo e rettilineo genera un campo magnetico diretto lungo circonferenze concentriche al filo. Tale campo diminuisce linearmente con la distanza dal filo stesso. La regola della mano destra, anche in questo caso, può essere di aiuto; infatti se la corrente è indicata dal pollice della mano destra le linee del campo sono rappresentate dalle altre dita della stessa mano. In genere per un qualsiasi circuito filiforme, per punti estremamente vicini al filo, il campo di induzione magnetica è approssimabile con quello di un filo infinitamente lungo.



### Campo di una spira circolare

Consideriamo una spira di raggio  $R$  con asse  $z$  coincidente con l'asse della spira e con origine nel centro della spira stessa. In un punto a distanza  $z$  dall'origine. L'elemento  $d\vec{l}$  genera un campo:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Infatti  $d\vec{l}$  è sempre ortogonale a  $\vec{r}$ ; ma per ogni elemento  $d\vec{l}$  ne esiste uno diametralmente opposto che dà un contributo a  $d\vec{B}$  eguale in modulo al precedente, ma con componente ortogonale a  $z$  opposta.

Pertanto il campo  $\vec{B}$  risultante sarà diretto secondo l'asse delle  $z$  ed il suo valore sarà pari alla somma delle componenti  $dB_z$ . Essendo:

$$dB_z = |d\vec{B}| \sin \alpha = |dB| \frac{R}{r}$$

Quindi, in totale:

$$B_z = \oint dB_z = \oint \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|dl| R}{r^2} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} 2\pi R$$

Essendo:

$$r^2 = R^2 + z^2$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \pi I R^2$$

Che con la definizione data di  $\vec{m} = I\pi R^2 \vec{n}$  si può anche scrivere:

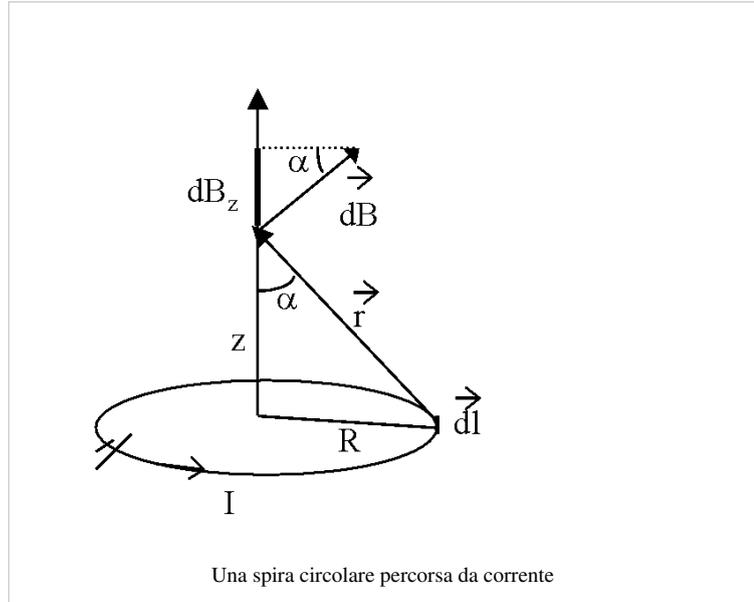
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

L'espressione a grande distanza è formalmente eguale a quella di un dipolo elettrico. In generale, una spira percorsa da corrente o un oggetto con momento magnetico  $\vec{m}$ , a distanza grande rispetto alle dimensioni fisiche dell'oggetto genera un campo di induzione magnetica pari a:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}]$$

A piccola distanza vi è una differenza sostanziale, infatti, mentre il campo elettrico nello spazio tra le cariche generanti il campo dipolare si inverte, Nel caso magnetico, non esistendo i monopoli magnetici le linee del campo sono continue senza invertirsi.

Alcuni esercizi es. Spira, es. Dipolo ruotante, es. spira quadrata, es. disco conduttore ruotante, es. Spira con un filo, es. Dipolo magnetico e spira, precisano meglio quanto detto.

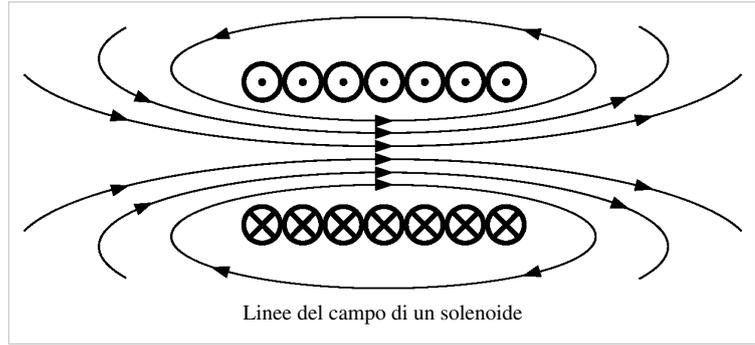


### Campo di un solenoide

Il campo all'interno di un solenoide può essere calcolato generalizzando quanto detto per una spira circolare. Se il solenoide ha  $N$  spire ed è lungo  $L$  ed ha un raggio  $R$

Detto  $z$  l'asse del solenoide definisco il numero di spire per unità di lunghezza come:

$$n = \frac{N}{L}$$



Assunto come origine delle coordinate il centro del solenoide. Un tratto infinitesimo del solenoide posto nel punto di coordinate  $-L/2 \leq z' \leq L/2$ , nell'intervallo infinitesimo  $dz'$ , vi sono quindi  $ndz'$  spire che producono sull'asse il campo:

$$dB_z = \frac{1}{2} \mu_o I R^2 \frac{ndz'}{[R^2 + (z' - z)^2]^{3/2}}$$

Integrando:

$$B_z = \frac{1}{2} \mu_o I n R^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[R^2 + (z' - z)^2]^{3/2}}$$

Sostituendo a  $z' - z = y$ ,  $dz' = dy$ :

$$B_z = \frac{1}{2} \mu_o I n R^2 \int_{z-L/2}^{z+L/2} \frac{dy}{[R^2 + y^2]^{3/2}} = \frac{1}{2} \mu_o I n R^2 \left[ \frac{y}{R^2 \sqrt{R^2 + y^2}} \right]_{z-L/2}^{z+L/2}$$

$$B_z = \frac{1}{2} \mu_o I n \left[ \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right]$$

Al centro per  $z = 0$  l'espressione si riduce a:

$$B_z = \mu_o I n \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}$$

che nel caso di  $L \gg R$  diventa:

$$B_z = \mu_o n I$$

Mentre a grande distanza  $z \gg R, L$  il solenoide si comporta come un dipolo magnetico di momento:

$$\vec{m} = NI\pi R^2 \hat{k}$$

### Azioni tra fili paralleli percorsi da corrente

Consideriamo due fili molto lunghi percorsi da correnti concordi  $I_1$  ed  $I_2$  posti a distanza  $d$ .

Assumiamo come asse delle  $z$  la direzione dei due fili e come asse delle  $x$  la congiungente i due fili ed origine sul primo filo. Il primo genererà un campo pari:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{2\pi d} I_1 \hat{j}$$

Quindi (usando la regola della mano destra) sul tratto  $l_2$  del II filo agirà una forza:

$$\vec{F} = I_2 l_2 \hat{k} \times \vec{B} = I_2 l_2 \frac{\mu_o}{2\pi d} I_1 \hat{k} \times \hat{j} = -I_2 l_2 \frac{\mu_o}{2\pi d} I_1 \hat{i}$$

Attrattiva nella direzione della congiungente. Mentre sarà repulsiva se i fili sono discordi (in poche parole va in maniera opposta alla forza elettrostatica di Coulomb in quanto cariche eguali si respingono mentre cariche di segno

opposto si influenzano: è anche questo un effetto relativistico infatti due cariche che si muovono alla velocità prossima a quella della luce non si influenzano in quanto le due forze l'attrattiva e la repulsiva si compensano).

La definizione di Ampère è basata su tale espressione. Infatti si definisce  $1 \text{ A}$  quella corrente che circolando su due fili rettilinei distanti  $d = 1 \text{ m}$  da luogo ad una forza di  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$  per metro.

Più in generale la forza che si esercita tra due circuiti (1 e 2), di lunghezza  $L_1$  e  $L_2$  vale:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \vec{dl}_1 \times \left( \frac{\vec{dl}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right)$$

### Interpretazione relativistica

Riprendendo l'espressione del campo di una carica puntiforme e l'espressione della Forza di Lorentz.

Se ho due cariche eguali, in moto parallelo con velocità eguale  $v$  a distanza  $r$  la forza (repulsiva che si esercita tra di loro) vale:

$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

L'interpretazione secondo la relatività ristretta è più logica. Se mi muovo con velocità eguale a quella delle cariche, in tale sistema di riferimento le cariche sono ferme ed ho solo il campo elettrico e la forza repulsiva è quella della forza di Coulomb. Mentre se sono fermo e le cariche si muovono con velocità  $v$ , la forza repulsiva elettrica viene ridotta della quantità  $\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$ . Poiché non abbiamo dato le basi della relatività ristretta, abbiamo chiamato la

parte che siamo andati a sottrarre, come campo magnetico:

$$|B| = -\frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r^2} = -\frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2}$$

Il campo magnetico è in realtà un effetto relativistico che dipende sia dal sistema di riferimento che dalla limitazione della velocità della luce. Cioè se la velocità della luce fosse infinita non avrei il campo magnetico e se le cariche nel mio sistema di riferimento sono ferme non ho effetti magnetici.

Argomento seguente: Legge di Ampère

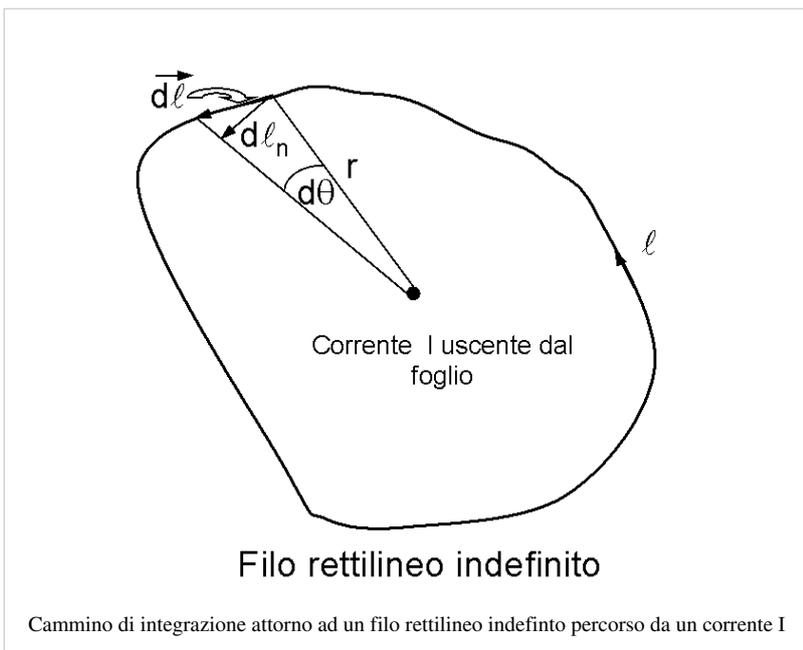
# Legge di Ampère

Argomento precedente: Campi Magnetici

L'assenza di monopoli magnetici magnetico comporta che le linee del vettore induzione magnetica siano sempre delle linee chiuse. Quindi data una qualsiasi superficie chiusa il numero di linee entranti è eguale a quello di quelle uscenti. Quindi il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa  $S$  sarà nullo:

$$\int_S d\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

Dobbiamo quindi scrivere per il magnetismo l'equazione analoga al teorema di Gauss dell'elettrostatica, che ci ha permesso di rimuovere tra l'altro la singolarità del campo elettrico nell'origine delle coordinate dove sia presente una carica puntiforme. Infatti se alla carica puntiforme sostituiamo una nuvola sferica (o un'altra qualsiasi distribuzione di carica di dimensione misurabile) il campo elettrico non andrebbe all'infinito nell'origine, ma tende a un valore finito (nullo per la sfera uniformemente carica). Il teorema di Gauss ci ha permesso inoltre di calcolare il campo elettrico in situazioni dotate di particolare simmetria: il teorema di Ampere che viene dimostrato nel seguito in un caso particolare rappresenta nel magnetismo l'analogo del teorema di Gauss per l'elettrostatica.



La figura a fianco mostra una linea qualsiasi  $\ell$  che racchiude un filo indefinito rettilineo percorso da una corrente  $I$ , tale filo attraversa in un punto qualsiasi l'interno dell'area delimitata da tale linea. Immaginiamo che la corrente del filo sia uscente dal piano del foglio, calcoliamo la circuitazione di  $\vec{B}$ :

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\ell} \frac{\hat{t} \cdot d\vec{\ell}}{r}$$

Dove  $\hat{t}$  è il versore tangente alla circonferenza di raggio  $r$  (quindi rappresenta la direzione di  $\vec{B}$ ), il prodotto scalare  $\hat{t} \cdot d\vec{\ell}$  rappresenta il tratto  $d\ell_n$  di circonferenza.

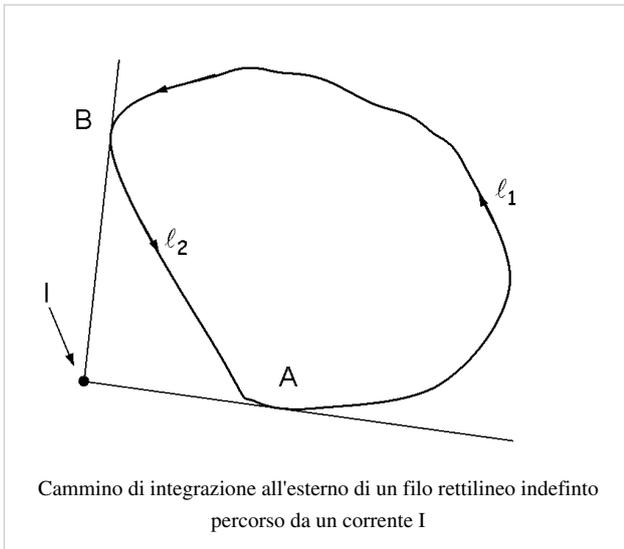
Quindi:

$$\frac{\hat{t} \cdot d\vec{\ell}}{r} = \frac{d\ell_n}{r} = d\theta$$

è pari all'angolo sotteso dall'elemento  $d\vec{\ell}$  della linea chiusa  $\ell$  si ha quindi che:

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\ell} d\theta = \mu_0 I$$

Infatti gli estremi di integrazione sono compresi tra un angolo qualunque di partenza  $\theta_0$  e  $\theta_0 + 2\pi$ .



Qualora la linea chiusa non sia concatenata con il filo, come nella figura a fianco, si ha invece:

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\ell_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\ell_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \int_{\ell_1} d\theta + \int_{\ell_2} d\theta \right) = 0$$

In termini più generali si può scrivere che:

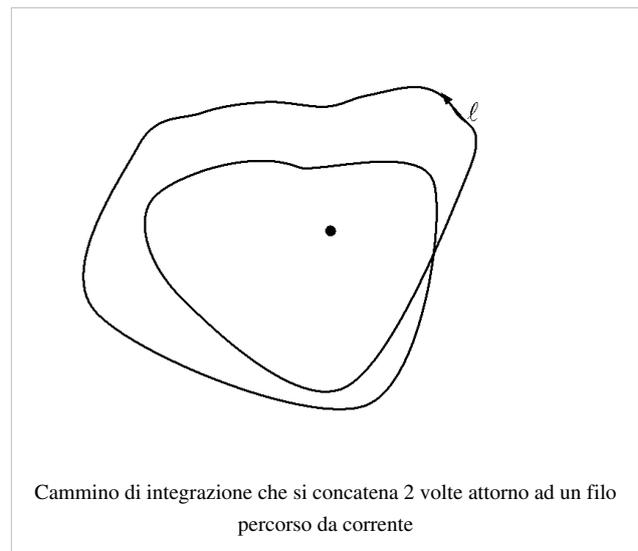
$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\ell} d\theta = N \mu_0 I$$

Dove  $N$  rappresenta il numero di volte per cui la linea  $\ell$  si concatena col filo percorso da corrente. Se la corrente non è concatenata ( $N = 0$ ) la circuitazione di  $\vec{B}$  è nulla; se la linea è concatenata una volta solo allora si ha la prima equazione vista. Se la linea è concatenata come nell'esempio a fianco due volte  $N = 2$  e così via. Osserviamo che la circuitazione non dipende dalla forma della linea  $\ell$  scelta. Ma solo dal grado di concatenazione con il filo scelto; in particolare si ottiene lo stesso risultato anche integrando su una linea chiusa che giri intorno al filo molto vicino al filo stesso. Poiché razionalmente quando andiamo molto vicino al filo il campo  $\vec{B}$  prodotto dipende principalmente da una porzione molto piccola del filo e che localmente può essere rappresentata come rettilinea, ci aspettiamo, che la relazione valga in un caso generale, qualunque sia la forma del filo percorso da corrente  $I$ . Se inoltre il campo  $\vec{B}$  viene generato da più circuiti tenendo conto della proprietà di additività del campo di induzione magnetica si ha che:

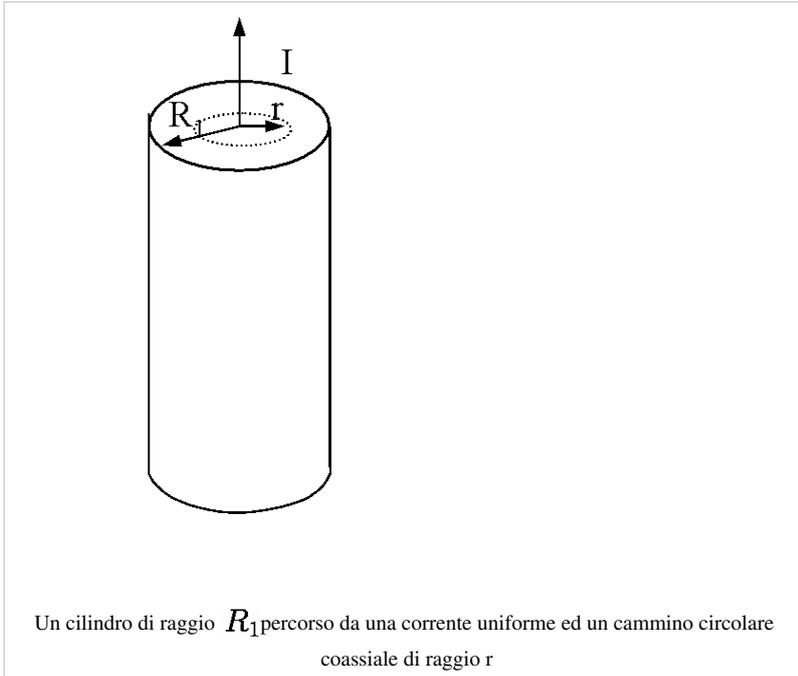
$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\ell} d\theta = \mu_0 \sum I_i$$

Dove  $\sum I_i$  è la somma delle varie correnti  $I_i$  ciascuna concatenata in maniera diversa con il circuito  $i$ . Nella sommatoria le correnti vanno prese col segno positivo o negativo a seconda del loro verso.

Il teorema della circuitazione nella sua forma completa è chiamata legge di Ampère.



### Campo di un filo di raggio non trascurabile



Consideriamo un filo rettilineo di raggio  $R_1$  percorso da una corrente  $I$  come in figura.

A distanza  $r > R_1$  abbiamo già visto l'espressione del campo di induzione magnetica (è tangente alle circonferenze coassiali con il filo e ha una direzione data dalla regola della mano destra) ed ha una intensità pari a:

$$|B| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r > R_1$$

Consideriamo una circonferenza concentrica al filo, tratteggiata nella figura, ma di raggio  $r < R_1$ , la densità di corrente elettrica vale:

$$|J| = \frac{I}{\pi R_1^2}$$

Quindi l'applicazione del

teorema di Ampere a questo circuito

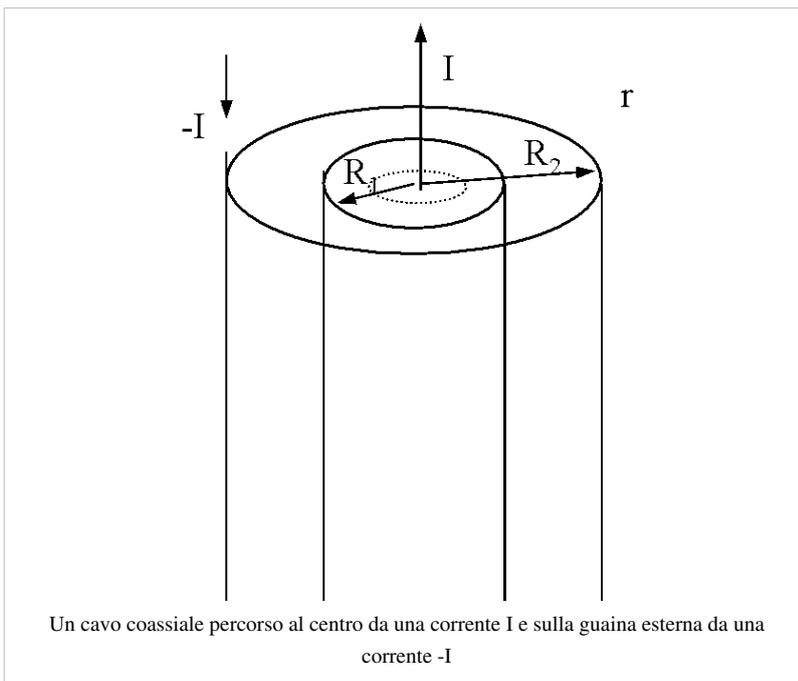
chiuso comporta che:

$$|B|2\pi r = \mu_0 |J| \pi r^2 = \mu_0 \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2 \quad r < R_1$$

$$|B| = \mu_0 \frac{I r}{2\pi R_1^2} \quad r < R_1$$

Ciò il campo di induzione magnetica non diverge, ma si annulla al centro del filo.

### Campo di un cavo coassiale



Analogamente dato un cavo coassiale percorso da una corrente  $I$  nel filo centrale di raggio  $R_1$  e da una corrente  $-I$  nel conduttore esterno di raggio  $R_2$  e spessore trascurabile.

Applicando il teorema di Ampere avrò rispettivamente:

$$|B| = \mu_0 \frac{I r}{2\pi R_1^2} \quad r < R_1$$

A distanza  $r > R_1$  abbiamo già visto l'espressione del campo di induzione magnetica (è tangente alle circonferenze coassiali con il filo e ha una direzione data dalla regola della mano destra) ed ha una intensità pari a:

$$|B| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r > R_1$$

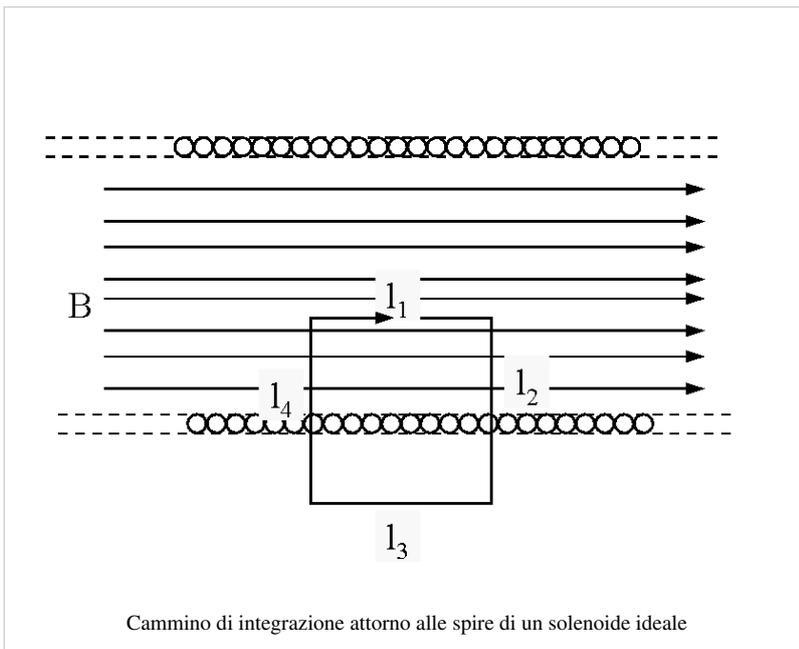
$$|B| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad R_1 < r < R_2$$

ed infine:

$$|B| = 0 \quad R_2 < r$$

In quanto la corrente totale all'interno di una circonferenza di raggio  $r > R_2$  è nulla infatti ho al suo interno sia l'andata della corrente su filo interno che il ritorno sul filo esterno. Un cavo coassiale oltre a concentrare nel suo interno le linee del campo elettrico, concentra anche le linee del campo magnetico, delimitando al suo interno la regione di spazio in cui è presente il campo.

### Campo di un solenoide ideale



Cammino di integrazione attorno alle spire di un solenoide ideale

Il solenoide è caratterizzato oltre che dal suo raggio  $R$ , dal numero di spire per unità di lunghezza  $n$ . Il caso ideale qui considerato prevede che la lunghezza del solenoide è molto grande rispetto al raggio e che le spire sono molto fitte, si può verificare anche sperimentalmente che, il campo magnetico generato all'esterno è molto debole, rispetto a quello interno, tanto da poterlo considerare nullo. Inoltre la componente del campo nella direzione perpendicolare all'asse è trascurabile.

Consideriamo un rettangolo come quello rappresentato in figura che attraversi il lato del solenoide e facciamo la circuitazione  $\vec{B}$  attraverso

tale cammino. Essendo  $\vec{B}$  normale ai lati  $2$  e  $4$  il suo contributo alla circuitazione è nullo. Il campo è trascurabile quindi nullo all'esterno del solenoide quindi:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = |B|l_1$$

ma la corrente all'interno di tale circuito vale:

$$nl_1 I$$

Quindi:

$$|B| = \mu_0 n I$$

Tale risultato riproduce quanto ricavato, in maniera più generale, sovrapponendo il campo di molte spire circolari. Il solenoide rappresenta nel magnetismo l'analogo del condensatore a facce piane e parallele dell'elettrostatica. In quanto genera in una vasta regione di spazio un campo uniforme.

Argomento seguente: Magnetismo della Materia

# Magnetismo della materia

Argomento precedente: Legge di Ampère

Le equazioni finora studiate riguardano i campi magnetici nel vuoto.

La presenza di materia tranne che per le sostanze ferromagnetiche e le sostanze superconduttrici non altera in maniera sensibile il campo di induzione magnetica.

Una osservazione sperimentale chiara è data dall'effetto di campi di induzione magnetica caratterizzati localmente da forti gradienti, vi sono delle sostanze dette paramagnetiche che subiscono una attrazione dirigendosi, se libere di muoversi, dove il campo è più intenso (tale effetto è molto vistoso nei ferromagneti che sono un caso estremo), mentre altre sostanze vengono respinte allontanandosi da dove il campo è più intenso (diamagneti). I superconduttori vengono vistosamente respinti dal campo magnetico per cui spesso si definiscono diamagneti perfetti. Questo fatto sperimentale è in forte contrasto con l'elettrostatica. Infatti qualsiasi sostanza, sia essa conduttrice o isolante, posta in una regione dove è presente un campo elettrico che varia spazialmente tende a portarsi nella zona dove il campo elettrico è più intenso.

Una seconda osservazione riguarda il seguente fatto: una spira percorsa da corrente è caratterizzata dal suo momento di dipolo magnetico  $\vec{m}$ , se poniamo tale dipolo magnetico in un campo di induzione magnetica esterno esso si disporrà seguendo le linee del campo, allineando la direzione del dipolo a quella del campo di induzione magnetica (questo comportamento è analogo al comportamento di un dipolo elettrico in un campo elettrico). Il comportamento peculiare è nel fatto che, mentre in un dipolo elettrico allineato, il campo tra la carica elettrica negativa e positiva è in direzione opposta a quello del campo elettrico allineante (quindi ne diminuisce l'intensità), un dipolo magnetico non ha una inversione delle linee del campo, quindi, se allineato, rinforza il campo magnetico allineante. Il comportamento paramagnetico (e in misura più estrema quello ferromagnetico) di alcune sostanze si spiega con l'esistenza di un momento magnetico intrinseco di alcune molecole dovuto o al moto orbitale degli elettroni o alla rotazione intorno al proprio asse degli elettroni stessi (spin).

In genere solo atomi con un numero dispari di elettroni presentano un momento magnetico intrinseco. L'unità naturale di tale momento magnetico è il magnetone di Bohr  $\mu_B \approx 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , che rappresenta il momento magnetico orbitale di un elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno. Tale quantità viene spiegata nella sua essenza fondamentale dalla meccanica quantistica. Gli elementi che hanno un momento magnetico proprio hanno momenti magnetici in modulo pari a  $|\vec{m}| = n\mu_B$  con  $n$  un numero, intero o semintero, compreso tra 1.5 e 10.5.

Poiché la differenza di energia tra un dipolo magnetico allineato o in direzione opposta ad un campo magnetico è pari a:

$$\Delta E = 2|\vec{m}||\vec{B}|$$

Tale energia anche se  $|\vec{m}|$  ha un valore, relativamente grande (molti magnetoni di Bohr), e  $|\vec{B}|$  è molto intenso (qualche Tesla) è di gran lunga inferiore alla energia dovuta alla agitazione termica  $k_B T$  (a temperatura ambiente). Via via che diminuisce la temperatura cresce il potere allineante dei campi esterni ed a temperature molto basse si può avere che un numero significativo di dipoli è orientato nella direzione del campo, quasi indipendentemente dalla sua intensità, si raggiunge cioè una specie di saturazione. Tale saturazione non si trova nelle sostanze dielettriche, che anche se hanno un momento di dipolo elettrico intrinseco elevato ma l'energia  $\Delta E = 2|\vec{p}||\vec{E}|$  a qualsiasi temperatura, in cui siano liberi di orientarsi, non diviene mai paragonabile a  $k_B T$ .

La spiegazione del diamagnetismo è più sottile, dipende infatti da quella che va sotto il nome di precessione di Larmor. Gli elettroni in un atomo anche se in numero pari hanno un momento magnetico dovuto al moto orbitale. In meccanica quantistica la **precessione di Larmor** è la precessione dei momenti magnetici degli elettroni in un atomo attorno alla direzione di un campo magnetico esterno omogeneo. La precessione è un caratteristico moto dei sistemi rigidi ruotanti, in cui alla rotazione attorno ad un asse del corpo rigido, si sovrappone una rotazione dell'asse stesso di

rotazione: il moto di una trottola è un esempio tipico di tale moto. Tale moto dell'asse di rotazione, genera un ulteriore momento magnetico che si oppone al campo magnetico esterno riducendolo. Questo fenomeno è alla base del diamagnetismo della materia. Tale effetto è molto piccolo, ma presente in tutti gli atomi. Tale fenomeno dipende, per quanto detto precedentemente, dal numero di elettroni presenti e non dipende dalla temperatura: quindi a temperature alte tutte le sostanze sono diamagnetiche, in quanto gli effetti paramagnetici se presenti tendono a scomparire.

## Il vettore magnetizzazione

L'effetto dei campi di induzione magnetica sulla materia è quello di indurre dei momenti magnetici elementari  $\vec{m}_i$ , nelle varie regioni di spazio  $d\tau$  in cui è presente un campo  $\vec{B}$ , possiamo con analogia al caso del vettore polarizzazione, un campo vettoriale macroscopico:

$$\vec{M} = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \vec{m}_i}{d\tau}$$

Il limite è un limite fisico, non matematico, in quanto  $d\tau$  deve essere abbastanza piccolo, ma non troppo, in quanto il numero dei momenti magnetici elementari  $\vec{m}_i$  in esso contenuto deve essere sufficientemente grande da potere fare una media statistica.

Potremmo definire una permeabilità magnetica relativa analoga ad  $\epsilon_r$  in maniera tale che il campo di un solenoide sia:

$$|\vec{B}| = \mu_r \mu_0 n I$$

Ma nella maggior parte delle sostanze  $\mu_r$  è prossima all'unità. Vi sono sostanze per cui  $\mu_r$  è minore di uno che si dicono diamagnetiche e altre in cui  $\mu_r$  è maggiore di uno che si chiamano paramagnetiche; ma questo non porta nessun cambiamento nei fenomeni di tutti i giorni. I campi magnetici vengono in genere schermati malissimo dalla materia al contrario dei campi elettrici.

La teoria del magnetismo della materia viene sviluppata in una maniera simile alla elettrostatica in presenza di materia introducendo un vettore  $\vec{M}$  che è una misura del momento di dipolo magnetico nel materiale, le cui dimensioni sono quelle di un dipolo magnetico diviso il volume e quindi nel Sistema Internazionale si misura in  $A/m$ . Il vettore  $\vec{M}$  determina delle correnti di magnetizzazione che sono sorgenti del campo. Si introduce anche il vettore campo magnetico che dipende dalle sole correnti impresse, non quelle di magnetizzazione,  $\vec{H}$ .

La relazione tra i vari campi è:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Inoltre

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

Dove  $\chi$  è detta la suscettività magnetica. Il campo magnetico di un solenoide molto lungo ed ideale, indipendentemente dal materiale con cui è riempito vale:

$$|\vec{H}| = n I$$

Da quanto detto appare chiaro come:

$$\chi = \mu_r - 1$$

La magnetizzazione sia paramagnetica che diamagnetica ha una importanza essenzialmente accademica, in quanto dato il valore assoluto molto piccolo di  $\mu_r$ , come già detto, la presenza di materia non modifica il campo di induzione magnetica in maniera significativa.

Il discorso è completamente diverso per due tipi di materiali: i superconduttori e i materiali ferromagnetici.

## I superconduttori

I superconduttori, sono dei solidi che in genere funzionano a temperature molto basse, oltre ad avere una resistenza elettrica nulla, godono della proprietà di essere dei diamagneti perfetti cioè  $\vec{B} = 0$  al loro interno (i superconduttori sono per il campo magnetico l'analogo dei conduttori per il campo elettrico): con essi si realizzano degli schermi magnetici perfetti (con una forte analogia con le gabbie di Faraday per quanto riguarda i campi elettrici).

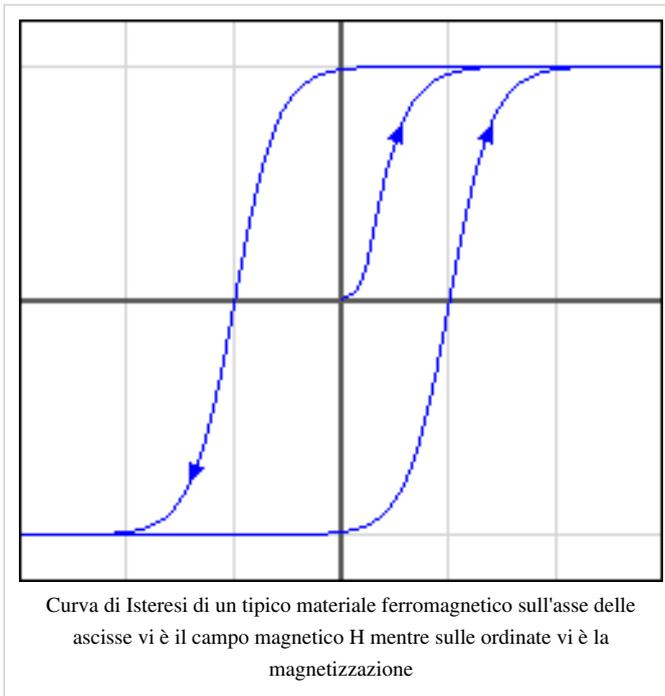
## I materiali ferromagnetici

### Materiali ferromagnetici cristallini e corrispondenti temperature di Curie in K<sup>[1]</sup>

Materiale	temp. Curie (K)
Co	1388
Fe	1043
FeOFe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> *	858
NiOFe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> *	858
CuOFe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> *	728
MgOFe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> *	713
MnBi	630
Ni	627
MnSb	587
MnOFe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> *	573
Y <sub>3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub> *	560
CrO <sub>2</sub>	386
MnAs	318

Una altra categoria di sostanze sono i materiali ferromagnetici, per i quali se si potesse parlare di  $\mu_r$  sarebbe molto grande anche alcuni milioni: ma parlare di solo  $\mu_r$  è troppo riduttivo e non esaurisce la descrizione dei fenomeni. Cinque metalli di transizione, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, e la maggior parte dei lantanidi sono ferromagnetici (o antiferromagnetici). Anche molte leghe e composti intermetallici mostrano qualche tipo di ordinamento magnetico. L'ordine ferromagnetico si ha al di sotto di una certa temperatura detta temperatura di Curie. Tale temperatura difficilmente supera il migliaio di K come appare dalla tabella a fianco.

I materiali ferromagnetici hanno la particolare proprietà che la magnetizzazione, non è una semplice funzione lineare del campo magnetico applicato  $\vec{H}$ , come nel caso delle sostanze diamagnetiche e paramagnetiche. Il comportamento è descritto dal ciclo di isteresi, tale curva mostra la peculiarità di tali materiali. Descriviamo tale curva indicata schematicamente a fianco, in cui sull'asse orizzontale riportiamo il campo applicato dall'esterno  $\vec{H}$  (proporzionale alla corrente che scorre ad esempio in un solenoide).



Immaginiamo di avere del materiale ferromagnetico che è stato raffreddato a partire da temperatura superiore alla temperatura di Curie (quindi era non ferromagnetico precedentemente) in un campo magnetico esterno molto debole. In tale caso si ha che inizialmente come nella figura a fianco, la magnetizzazione (l'asse verticale) è nulla e cresce in maniera monotona con il campo Magnetico (H) applicato dall'esterno, come indica la curva centrale. Quando H esterno supera un certo valore la magnetizzazione raggiunge un valore di saturazione (la curva orizzontale), a questo punto anche se viene rimosso il campo esterno il materiale rimane magnetizzato. Per annullare la magnetizzazione è necessario applicare un forte campo magnetico di segno opposto, che se è troppo elevato come nella figura inverte il segno della magnetizzazione. Per riportare il materiale

nelle condizioni di saturazione iniziale è necessario applicare nuovamente un campo H positivo, ma di intensità maggiore di quello iniziale.

Tale curva ha un chiaro comportamento di isteresi comune nella meccanica la deformazione con lo sforzo dei materiali plastici. La magnetizzazione del materiale dipende dalla storia del materiale. I materiali ferromagnetici trovano moltissimi impieghi nella società moderna. I magneti permanenti sono dei materiali ferromagnetici con un ciclo di isteresi molto ampio, in maniera che una volta portata la magnetizzazione sia molto difficile invertirne il segno con campi magnetici esterni. I materiali ferromagnetici vengono utilizzati per la registrazione di informazioni, nelle cosiddette memorie magnetiche, gli hard disk utilizzano l'inversione di magnetizzazione di saturazione per immagazzinare l'informazione. In questo caso la curva di isteresi deve essere non troppo ampia in maniera da permettere di cambiare la magnetizzazione di saturazione con un campo esterno, ma deve essere abbastanza stabile da non essere influenzato da disturbi esterni. Infine vi sono i cosiddetti ferromagnetici dolci in cui il ciclo di isteresi è molto stretto, in questi materiali vi è una relazione quasi lineare tra H ed M: in questo caso il materiale ferromagnetico genera un campo di induzione magnetica elevato mediante una piccola corrente di controllo: i materiali di questo genere trovano applicazione nei trasformatori di cui si parlerà nel seguito.

## Note

[1] (EN) Charles Kittel, Introduction to Solid State Physics (Wiley: New York, 1996)

Argomento seguente: Induzione e legge di Faraday

# Induzione e legge di Faraday

---

Argomento precedente: Magnetismo della materia

Questa legge ha rappresentato la vera svolta dell'elettromagnetismo nello sviluppo della società industriale e indica il legame forte esistente tra campi elettrici e magnetici. Per descriverla con completezza bisogna fare delle premesse basate su quanto già detto in precedenza.

Il flusso di induzione magnetica attraverso una qualsiasi superficie chiusa è sempre eguale a zero, in quanto non vi sono monopoli magnetici. Possiamo quindi considerare una qualsiasi linea chiusa dello spazio e associare ad essa una superficie che abbia tale linea come contorno, il flusso attraverso tale superficie è lo stesso qualsiasi superficie si consideri. Un circuito composto da  $N$  spire ha come contorno una linea chiusa dello spazio, ma in realtà il flusso del campo di induzione magnetica è  $N$  volte il flusso associato alla linea chiusa considerato: tale flusso viene chiamato flusso concatenato al circuito considerato.

Si deve a Faraday nel 1831 la scoperta che se si ha una variazione nel tempo del flusso magnetico concatenato con un circuito  $\Phi_B$  si ha una f.e.m. secondo la relazione algebrica:

$$f.e.m. = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t}.$$

Nel seguito precisiamo il significato di questa legge di valore fondamentale. Il segno meno che viene in genere chiamata legge di Lenz viene precisato nel seguito.

Vari esempi possono essere dati per illustrare quando si verifica una condizione di questo tipo. Tradizionalmente si possono raggruppare i vari casi possibili in varie categorie:

## Due circuiti accoppiati senza parti in movimento

Il circuito 1 si trova nelle vicinanze del circuito 2 nel quale scorre una corrente variabile nel tempo e quindi genera un campo di induzione magnetica variabile nel tempo. Il flusso quindi concatenato con il circuito 1 varia del tempo e quindi si sviluppa in esso una corrente elettrica come conseguenza della f.e.m. indotta la cui intensità dipende dalla legge di Faraday. La corrente circolerà nel circuito 1 in maniera da contrastare l'azione esterna quindi se il flusso aumenta tenderà a far circolare una corrente che attenui tale aumento, mentre se il flusso diminuisce tenderà a lasciare invariato il flusso precedente. Notiamo che in questo caso non si abbia niente in moto e quindi la legge di Faraday rappresenta una assoluta novità.

Nell'esempio di un solenoide con una spira viene chiarito questo caso generale.

## Un circuito fisso in un campo magnetico in moto

Immaginiamo di avere un circuito fisso nello spazio ed una sorgente di campo magnetico che si muova rispetto al circuito. Il moto della sorgente immaginiamolo per semplificare la cosa, rettilineo e uniforme. In questo caso ipotizziamo che la sorgente generi un campo non uniforme spazialmente. Il flusso concatenato con il circuito varierà nel tempo e pure in questo caso si ha una f.e.m. indotta.

Il caso più banale è quello di un solenoide in moto rettilineo uniforme sopra una bobina ferma su un suo bordo. Quando il bordo del solenoide attraversa la sezione della bobina il flusso concatenato nella bobina aumenta e viene indotta una corrente nella bobina che contrasta l'aumento del campo. Quando la bobina si trova completamente immersa nel campo del solenoide nessuna corrente viene più indotta (in quanto il flusso concatenato non varia più). Infine quando il bordo riattraversa la sezione del solenoide il flusso concatenato nella bobina diminuisce e si genera una corrente di segno opposto al caso precedente nella bobina per contrastare tale variazione del flusso. La stessa cosa si ottiene con un magnete permanente, che genera un campo non uniforme, che si muova rispetto ad una bobina.

Il fatto che il moto sia rettilineo non ha nessuna rilevanza, infatti la stessa cosa l'avremmo anche nel caso di sorgente in moto rotatorio, anzi in questo caso anche una sorgente che sia uniforme spazialmente genererà nella bobina una

---

f.e.m. indotta.

Negli esempi di una spira in un campo magnetico ruotante, spira all'interno di un solenoide si ha una idea particolare di questo caso generale.

### Un circuito in moto in un campo magnetico fisso

Immaginiamo di avere una sorgente fissa di campo magnetico ed un circuito che si muova rispetto al campo non uniforme. Il moto del circuito lo supponiamo per semplificare la cosa, rettilineo e uniforme. Come si vede è il caso simmetrico rispetto a quello indicato prima: ma dal punto di vista della meccanica classica del tutto equivalente. Infatti entrambi i sistemi sono inerziali e chi si muove rispetto all'altro non cambia. In ogni caso in questo caso la forza di Lorentz giustifica l'apparire di una f.e.m.

Infatti se supponiamo il circuito quadrato di lato  $a$  ed il campo perpendicolare al piano del circuito ed in moto con due lati paralleli alla direzione del moto. Nei due lati perpendicolari alla direzione del moto a causa della non uniformità del campo di induzione magnetica si genererà una f.e.m. opposta non eguale e quindi tale differenza è la causa della f.e.m. indotta.

Analogamente nell'esempio di una spira in un campo magnetico ruotante se facciamo ruotare la spira invece del campo le equazioni rimangono le stesse come il risultato finale, solo che in questo caso la legge di Faraday si identifica con la Forza di Lorentz.

### Un circuito di dimensioni variabili in un campo magnetico

A causa del fatto che uno o più lati del circuito si muovano, si ha che sulle cariche libere di tali lati agisce la forza di Lorentz mutuamente perpendicolare sia al campo che alla direzione del moto; tale forza genera una f.e.m.. Quindi anche in questo caso la legge di Faraday non aggiunge niente rispetto alle leggi del magnetismo. Ma è più facile anche in questo caso trattare il problema, senza fare distinzioni, mediante la legge di Faraday. Questo approccio è seguito nell'esercizio di una sbarretta metallica.

## Legge di Lenz

Il verso delle correnti indotte è tale da generare un campo magnetico che si oppone alla variazione del flusso del campo magnetico concatenato con il circuito. Tale legge giustifica fisicamente il segno meno che compare nella legge di Faraday. Infatti la f.e.m. indotta dalla variazione del flusso concatenato è tale da opporsi alla causa che lo ha generato, in maniera che se il flusso magnetico esterno aumenta la corrente circolante tende a rallentare tale incremento, mentre se diminuisce la corrente circolante tende a lasciare immutato il campo magnetico iniziale.

La legge è ovviamente in accordo con la conservazione dell'energia, se infatti la legge fosse per assurdo di segno opposto, una piccola variazione del flusso concatenato produrrebbe una maggiore variazione con un effetto moltiplicativo che violerebbe la conservazione dell'energia.

## L'alternatore

Questa è l'applicazione più importante per lo sviluppo della società industriale della legge di Faraday. Supponiamo di avere una bobina rettangolare realizzata con  $N$  spire (i ragionamenti in realtà non dipendono dalla forma, ma per semplificazione usiamo la forma rettangolare) fatta ruotare lungo un asse passante per il suo centro e parallelo ai lati. Se la bobina si trova in un campo di induzione magnetica uniforme  $\vec{B}$  perpendicolare all'asse di rotazione, così come mostrato in figura.

Immaginiamo, inoltre che la bobina sia chiusa su un carico esterno (ad esempio una resistenza) per mezzo di un qualche contatto strisciante. A causa della rotazione della bobina, il flusso attraverso di essa varierà in funzione del tempo. Quindi nella bobina si genererà una f.e.m. Se l'area della bobina è  $S$ , e  $\theta$  l'angolo compreso tra la normale ( $\vec{n}$ ) alla bobina e la direzione del campo di induzione magnetica ( $\vec{B}$ ), il flusso di induzione magnetica concatenato con le  $N$  spire della bobina vale:

$$\Phi_c(B) = N\vec{B} \cdot \vec{S} = N|B|S \cos \theta$$

Se mediante un qualsiasi mezzo propulsivo, la bobina viene mantenuta in rotazione con velocità angolare  $\omega$  costante allora:

$$\theta = \omega t$$

Applicando la legge di Faraday:

$$f.e.m. = N|B|S\omega \sin \omega t$$

Cioè ai morsetti del carico vi è una d.d.p. che varia con legge sinusoidale nel tempo: questo dispositivo si chiama alternatore o generatore di corrente alternata. Se l'attrito è trascurabile l'energia meccanica utilizzata per mantenere in rotazione a velocità angolare fissa viene integralmente trasformata in energia elettrica dissipata dal carico. Quindi l'alternatore rappresenta il metodo più usato per trasformare energia meccanica in energia elettrica, in corrente alternata, che è comoda da trasportare su grandi distanze. La corrente che circola nel carico è semplicemente eguale a:

$$I = \frac{N|B|S\omega}{R} \sin \omega t$$

Nel fare tale ragionamento si è trascurata una proprietà della bobina che viene definita nel seguito: la sua induttanza.

Studiamo il bilancio energetico di un sistema di questo genere che produce istantaneamente una potenza elettrica pari a:

$$P_e = f.e.m. \cdot I = \frac{N^2 B^2 S^2}{R} \omega^2 \sin^2 \omega t$$

Per mantenere in rotazione a velocità costante in tale campo magnetico la spira bisogna esercitare una coppia di momento pari a:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Che in questo caso specifico, proiettandolo sull'asse  $z$  di rotazione, vale:

$$M_z = NIBS \sin \omega t$$

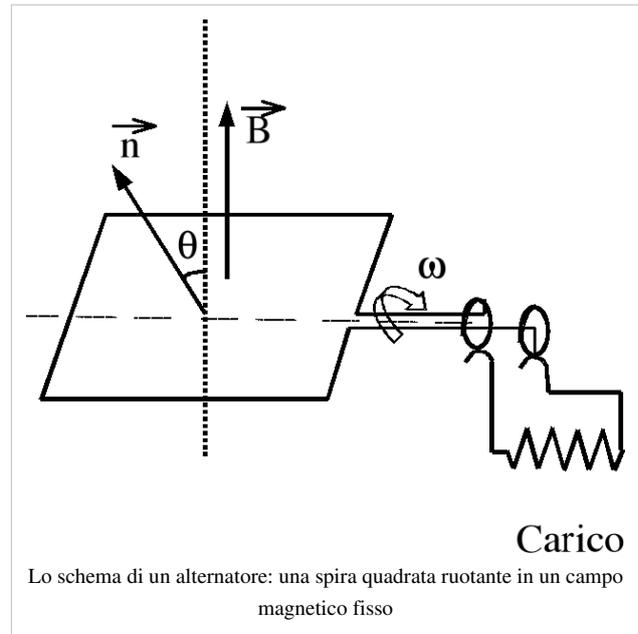
La potenza meccanica, fornita, si ricava da quanto visto nella meccanica dei corpi rigidi, e vale:

$$P_m = M_z \omega$$

Sostituendo l'espressione di  $I$  in  $M_z$  segue che:

$$P_m = \frac{N^2 B^2 S^2}{R} \omega^2 \sin^2 \omega t$$

Cioè in assenza di attrito tutta l'energia meccanica viene trasferita in energia elettrica. Le centrali elettriche ma anche semplicemente i generatori interni delle automobili producono energia elettrica mediante tale meccanismo di conversione diretta di energia meccanica in energia elettrica.



## Induttanza

Il flusso concatenato con un circuito e la corrente che in esso circola sono direttamente proporzionali: la costante di proporzionalità viene chiamata induttanza del circuito:

$$L = \frac{\Phi_c(B)}{I}$$

È una grandezza puramente geometrica connessa con l'area racchiusa da un circuito ed il campo magnetico generato nel complesso quando in detto circuito scorre una corrente elettrica. Il simbolo dell'induttanza è mostrato di lato. Le dimensioni fisiche dell'induttanza sono quelle del rapporto tra un flusso magnetico e una corrente, nel SI si misura in Henry (  $H$  )

$$[L] = \frac{[B][l^2]}{[I]} = [T][m]^2[A]^{-1} = [H]$$

Il simbolo ricorda vagamente la forma di un solenoide, e in particolare nel caso di solenoidi sufficientemente lunghi, è facile calcolare l'induttanza. Infatti essendo il flusso concatenato di un solenoide di lunghezza  $l$ , di raggio  $r$  e con  $N$  spire, in cui scorre una corrente  $I$ :

$$\Phi_c B = N \mu_0 \frac{N}{l} I \pi r^2$$

quindi:

$$L_{\text{solenoido}} = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi r^2$$

Il calcolo dell'induttanza per circuiti abbastanza semplici non è in genere facile. Come regola generale se il circuito è fatto di  $N$  spire che si sovrappongono bene l'induttanza cresce con  $N^2$ . Quindi per bobine semplici di superficie  $S$  semplice l'induttanza è circa eguale a:

$$L \approx \mu_0 N^2 \sqrt{S}$$

La presenza di materiali ferromagnetici aumenta l'induttanza di molti ordini di grandezza: è facile costruire induttanze di molti Henry.

La permeabilità magnetica del vuoto di cui avevamo dato le dimensioni fisiche a partire dalla formula del campo di induzione magnetica prodotta da un filo rettilineo. La sue unità di misura nel sistema SI divengono adesso:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

Per geometrie semplici l'induttanza cresce linearmente con le dimensioni lineari e per spire estremamente vicine con il quadrato del numero delle spire.



## Mutua induttanza

Dati due circuiti chiaramente il flusso magnetico dell'uno si concatenerà con l'altro. Il rapporto tra il flusso concatenato su di uno e la corrente che scorre sull'altro viene chiamata mutua induzione.

$$M = M_{12} = \frac{\Phi_{c1}}{I_2} = M_{21} = \frac{\Phi_{c2}}{I_1}$$

Notiamo come la mutua induzione gode della proprietà di reciprocità, cioè la mutua induzione di un primo circuito rispetto ad un secondo è pari alla mutua induzione del secondo sul primo. La dimostrazione si può fare in maniera rigorosa ma richiede l'introduzione di una grandezza fisica non introdotta: il potenziale vettore. A causa quindi della reciprocità si ha che:

$$M = M_{12} = M_{21}$$

A partire dalla definizione analitica si ha anche che:

$$M = k\sqrt{L_1L_2}$$

Definendo  $0 \leq k \leq 1$  la costante di accoppiamento tra i due circuiti.

Due esempi: Mutua induzione tra due spire quadrate, Due spire chiariscono i concetti espressi.

## Cenno sui circuiti magnetici

In un toro di materiale ferromagnetico di sezione costante  $S$  e lunghezza media  $l$  con permeabilità magnetica  $\mu_r$  su cui sono avvolte  $N$  spire tutto il flusso rimane confinato nell'interno del toro ed utilizzando il teorema della circuitazione di Ampere, si trova che il campo di induzione magnetica vale all'interno del toro:

$$B = \mu_0\mu_r \frac{NI}{l}$$

e di conseguenza l'induttanza vale:

$$L = \mu_0\mu_r N^2 \frac{S}{l}$$

Se i circuiti avvolti sono due con  $N_1$  ed  $N_2$  spire, l'accoppiamento tra i circuiti è il massimo possibile e di conseguenza la mutua induzione vale:

$$M = \mu_0\mu_r N_1 N_2 \frac{S}{l}$$

I circuiti di questo tipo sono alla base di quelli che vengono chiamati i trasformatori.

## Transitori induttivi

L'introduzione dell'induttanza ci permette di calcolare la f.e.m. indotta da variazioni di flusso concatenate con circuiti percorsi da corrente elettrica variabile nel tempo. Immaginiamo di avere un generatore di f.e.m che viene connesso ad una resistenza in serie con una induttanza mediante l'interruttore mostrato in figura. La legge di Faraday si riduce nel caso di una induttanza all'espressione:

$$f_a = -\frac{d\Phi_c(B)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

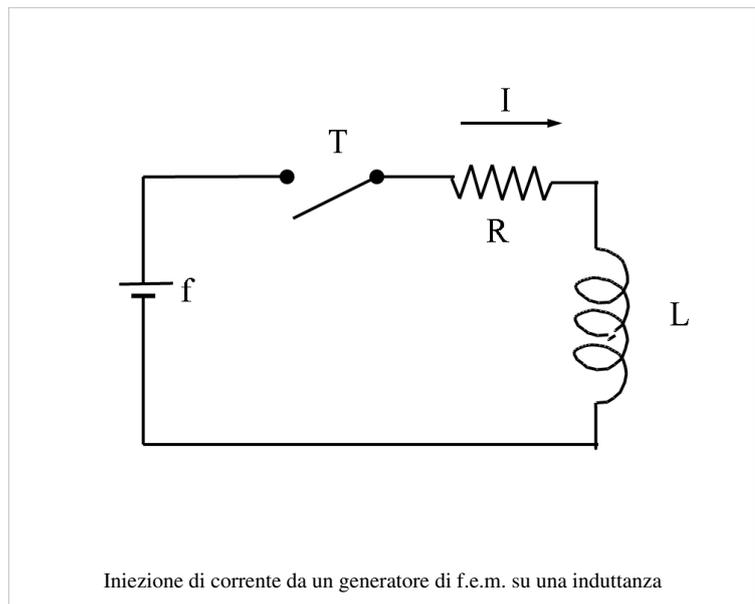
Dove il pedice  $a$  sta a indicare che si tratta di forza elettromotrice autoindotta che tende a impedire le variazioni di correnti al suo interno.

Nel caso specifico abbiamo introdotto una resistenza  $R$  in serie che tiene conto della eventuale resistenza interna del generatore, dell'induttanza (sono entrambe in serie) o una resistenza esterna.

L'equazione della maglia nel tempo del circuito deve tenere conto che agisce non solo il generatore di forza elettromotrice  $f$ , ma anche la forza elettromotrice autoindotta  $f_a$ :

$$f + f_a = RI$$

Sostituendo i vari termini:



$$RI = f - L \frac{dI}{dt}$$

da cui separando le variabili

$$\frac{dI}{I - f/R} = -\frac{R}{L} dt$$

definendo  $\tau = L/R$ , e integrando tra il tempo  $t = 0$  in cui la corrente è nulla ed il tempo generico segue che:

$$\ln \frac{I(t) - f/R}{-f/R} = -\frac{t}{\tau}$$

che diventa:

$$I = \frac{f}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

Il significato della equazione è che a causa della  $f_a$  in un circuito la corrente non raggiunge istantaneamente il valore  $f/R$ , ma si avvicina asintoticamente con una costante di tempo  $L/R$ .

Il termine  $-L \frac{dI}{dt}$  dovuto alla legge di

Faraday, viene nella maggior parte dei casi considerato una ulteriore d.d.p. e quindi aggiunta con il segno opposto dall'altro lato della equazione. Questo approccio verrà seguito nel seguito, anche se porta a qualche contraddizione.

Per far vedere il caso opposto, e rendere l'esempio fisicamente credibile dobbiamo considerare un caso sostanzialmente simile a quello descritto illustrato nella figura a

fianco. Immaginiamo grande la resistenza in parallelo all'induttanza (questo significa  $\alpha \gg 1$ . Secondo questa ipotesi il sistema non è molto differente dal precedente, infatti ai capi dell'induttanza il circuito è equivalente utilizzando Teorema di Thevenin, e considerando che  $\alpha \gg 1$  a:

$$R_{th} = R \frac{\alpha}{\alpha + 1} \approx R$$

$$f_{th} = f \frac{\alpha}{\alpha + 1} \approx f$$

Quindi se partiamo dalla condizione iniziale illustrata con l'interruttore chiuso (avendo aspettato un tempo sufficientemente lungo), la corrente che inizialmente scorre nell'induttanza diviene:

$$I_o \approx \frac{f}{R}$$

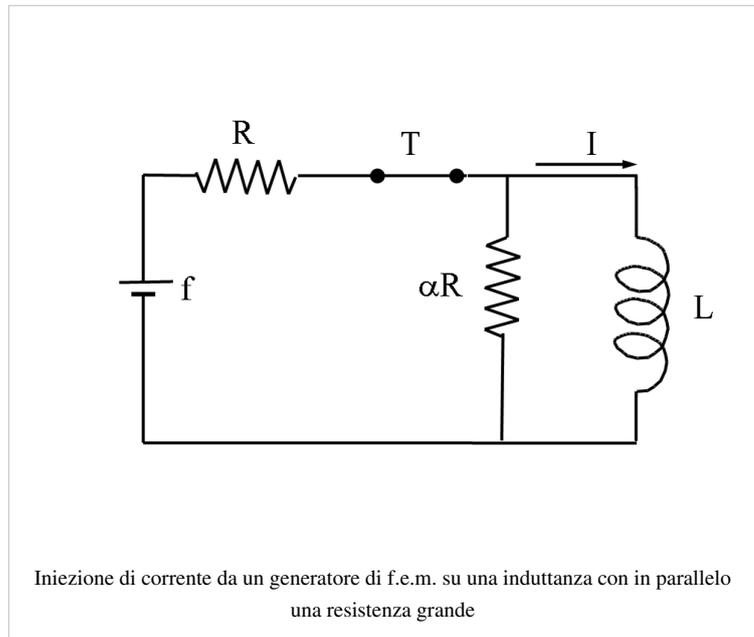
Mentre la d.d.p. ai capi di  $\alpha R$  sarà nulla.

Se a questo punto apriamo l'interruttore avremo la seguente equazione che descrive la maglia:

$$-L \frac{dI}{dt} = \alpha R I$$

da cui separando le variabili

$$\frac{dI}{I} = -\frac{\alpha R}{L} dt$$



Se ora definiamo  $\tau = \frac{L}{\alpha R}$  ed integriamo (cambiando il nome delle variabili):

$$\int_{I_0}^I \frac{dI'}{I'} = - \int_0^t \frac{dt'}{\tau}$$

Da cui:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

La tensione ai capi della resistenza (di polarità opposta a quando è collegato al generatore di f.e.m. diventa:

$$V(t) = I_0 \alpha R e^{-t/\tau} \approx \alpha f e^{-t/\tau}$$

Alcuni esempi permettono di comprendere quanto detto: induttanza e due resistenze, induttanza e tre resistenze, spira tonda e solenoide

## Energia magnetica

Il fenomeno della iniezione di corrente su una induttanza con una resistenza in serie da parte di un generatore di f.e.m. possiamo esaminarlo dal punto di vista del generatore riscrivendo l'equazione del transitori vista precedentemente come:

$$f = RI + L \frac{dI}{dt}$$

Moltiplicando tutti i termini per la corrente che istantaneamente scorre nella maglia:

$$fI = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}$$

Quindi integrando nel tempo i vari termini:

$$\int_0^t fI dt' = \int_0^t RI^2 dt' + \int_0^t LI \frac{dI}{dt} dt'$$

$$\int_0^t fI dt' = \int_0^t RI^2 dt' + L \int_0^I LI' dI'$$

abbiamo da una parte l'energia totale formata dal generatore e dall'altra due termini, il primo l'energia dissipata per effetto Joule nella resistenza e il secondo:

$$E_L = L \int_0^I LI' dI' = \frac{1}{2} LI^2$$

è un termine che qui viene definito per la prima volta l'energia immagazzinata nell'induttanza. Tale energia viene accumulata sotto forma di energia magnetica, come si può far vedere nel caso più generale, qui ci limitiamo al caso particolare di un solenoide molto lungo e compatto, per il quale l'induttanza vale:

$$L = N^2 \mu_0 \frac{\pi r^2}{l}$$

Dove  $N$  è il numero di spire,  $r$  il raggio, ed  $l$  la lunghezza.

$$E_L = \frac{1}{2} N^2 \mu_0 \frac{\pi r^2}{l} I^2$$

Ma in un solenoide:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

Per cui si può riscrivere l'equazione precedente come:

$$E_L = \frac{1}{2\mu_0} B^2 l \pi r^2$$

Ma  $l\pi r^2$  è il volume racchiuso dal solenoide in cui il campo magnetico è costante, quindi l'energia immagazzinata nel campo magnetico per unità di volume vale:

$$u_M = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Argomento seguente: Correnti alternate

## Correnti alternate

---

Argomento precedente: Leggi di Laplace

### Circuiti in Corrente alternata

#### Segnali periodici

Una grandezza si dice periodica se:

$f(t) = f(t + T)$  che hanno e si definisce  $T$  il periodo. Una grandezza si dice alternata se è periodica ed ha valore medio nullo cioè se:

$$\int_0^T f(t) dt = 0$$

Ciò se all'interno del periodo assume sia valori positivi che negativi che hanno lo stesso peso. Tutte le grandezze periodiche od alternate si possono descrivere come sommatorie di funzioni sinusoidali o cosinusoidali:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (1)$$

Dove la pulsazione  $\omega = 2\pi/T$ , e i vari termini si chiamano I, II eccetera armoniche del segnale periodico.

Tale sviluppo in serie (serie di Fourier) sempre possibile (vi sono strumenti elettronici e software che fanno automaticamente tali operazioni) permette di trattare separatamente le varie componenti sinusoidali.

Una grandezza alternata in particolare ha  $a_0$  definito in eq.1 nullo. Per una grandezza alternata dato che il valore medio non ha senso si preferisce definire il valore quadratico medio od efficace definito come:

$$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt} \quad (2)$$

In particolare se:

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

si avrà che:

$$f_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (3)$$


---

## Reti elettriche con generatori cosinusoidali

Immaginiamo di avere un generatore di corrente cosinusoidali tipo l'alternatore visto nel capitolo precedente cioè un generatore che fornisca una f.e.m. del tipo:

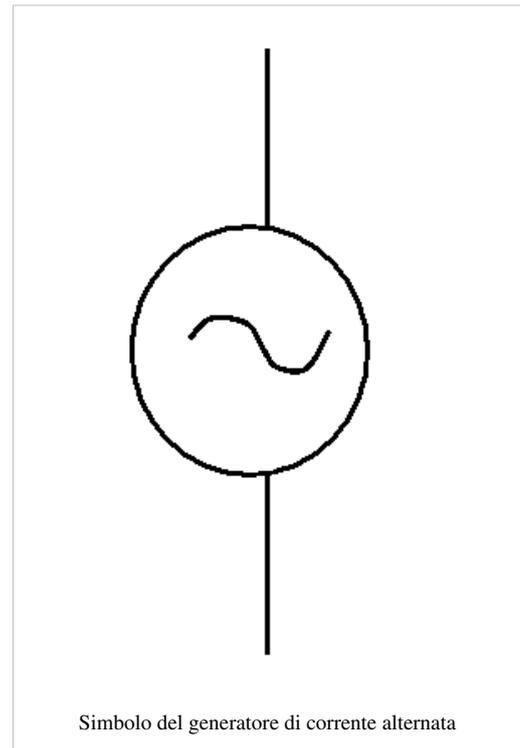
$$V(t) = V_o \cos \omega t$$

Un generatore di questo tipo si rappresenta come in figura, ovviamente per quanto detto precedentemente è caratterizzato dal valore massimo  $V_o$  o dal valore efficace.

Ad esempio la alimentazione delle nostre case è a una frequenza  $\nu = \omega/(2\pi) = 50 \text{ Hz}$ , è sinusoidale, ed ha una ampiezza  $V_o = 311 \text{ V}$ , ma viene indicata con il suo valore efficace di  $V_{eff} = 220 \text{ V}$ .

Se un tale segnale alimenta un circuito composto da sole resistenze di valore totale  $R$  quello che abbiamo detto sinora sulla legge di Ohm, si applica semplicemente dicendo che il circuito sarà percorso da una corrente:

$$I(t) = \frac{V_o}{R} \cos \omega t$$



Quindi la potenza fornita dal generatore, coincide con quella dissipata per effetto Joule e istante per istante vale:

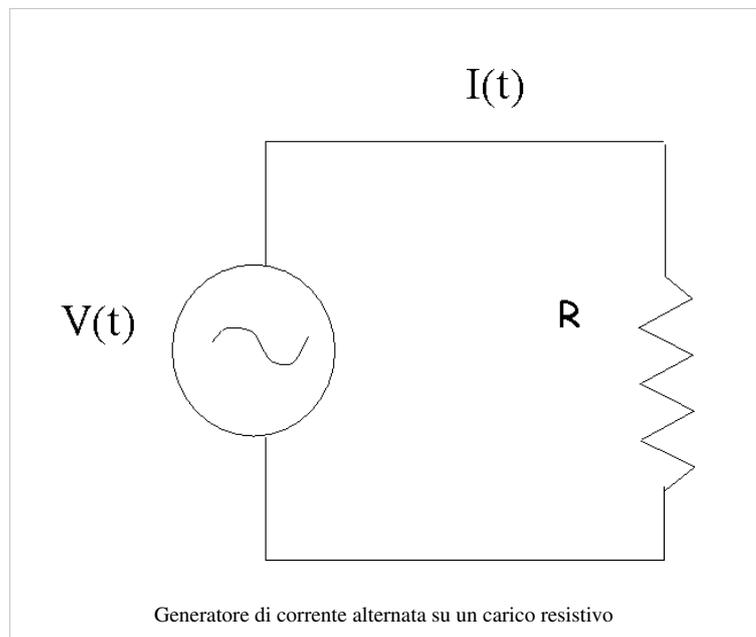
$$P_f = V(t)I(t)$$

Cioè in media:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T P_f dt = I_{eff} V_{eff}$$

La ragione quindi per cui si parla di grandezze efficaci in maniera da trovare la corrispondenza con la corrente continua che produce gli stessi effetti termici.

L'aggiunta di condensatori e induttanze cambia sostanzialmente le cose, a parte i problemi legati ai transistori che esistono ugualmente nei circuiti in corrente alternata, e che qui vengono trascurati per non complicare ulteriormente la trattazione si ha un evidente sfasamento tra corrente e tensione.



Infatti consideriamo il circuito mostrato in figura.

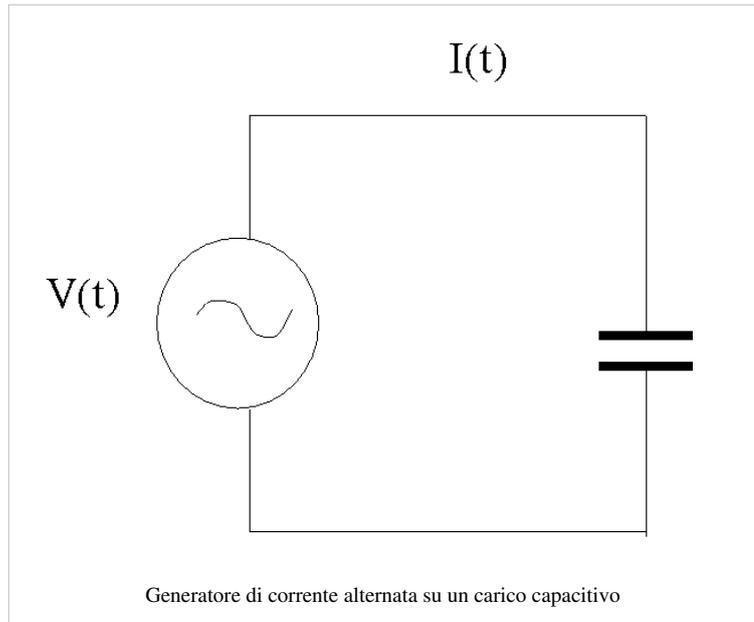
La carica ai capi del condensatore, in condizioni stazionarie, assume il valore periodico pari a:

$$Q(t) = CV_o \cos \omega t$$

e quindi:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\omega CV_o \sin \omega t = \omega CV_o \cos(\omega t + \pi/2)$$

Cioè la corrente è in anticipo di  $\pi/2$  rispetto alla tensione.



Come si vede nella rappresentazione grafica riportata a fianco in cui in linea continua è rappresentato:

$$\cos(\omega t)$$

In linea punteggiata:

$$\cos(\omega t + \pi/2)$$

e in linea tratteggiata:

$$\cos(\omega t - \pi/2)$$

Analogamente collegando un generatore di corrente alternata ai capi di una induttanza essendo:

$$V_o \cos \omega t = L \frac{dI}{dt}$$

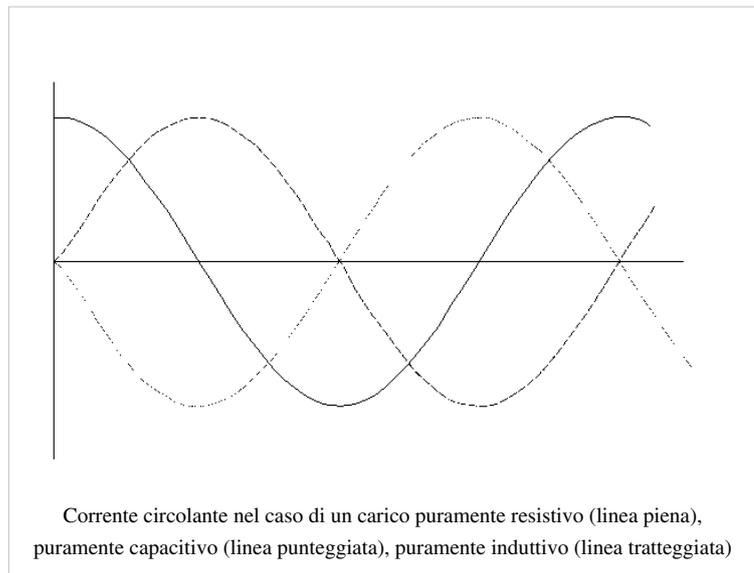
Segue da una semplice integrazione che:

$$I(t) = \frac{V_o}{\omega L} \sin \omega t = \frac{V_o}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$$

in questo caso la corrente è in ritardo rispetto alla tensione come si vede nella curva tratteggiata della figura a fianco.

La combinazione di circuiti complessi con  $L$ ,  $C$  ed  $R$  sarebbe troppo complicata con una analisi di questo tipo.

Quello che si evince è che collegando ai capi di un generatore di f.e.m. alternata i vari possibili elementi circuitali nel circuito scorre una corrente elettrica alternata alla stessa frequenza, di ampiezza dipendente dai vari elementi circuitali, ma in genere sfasata.



## Il metodo simbolico

Tale metodo basato sull'algebra dei numeri complessi permette di studiare le reti in c.a. con un metodo formalmente simile alle reti in corrente continua, utilizzando l'algebra dei numeri complessi.

Nel metodo simbolico qui descritto usato per studiare le reti elettriche in condizioni stazionarie l'unità immaginaria pura si rappresenta con  $j$ :

$$j = \sqrt{-1}$$

Non si usa  $i$  in quanto genererebbe confusione con le correnti.

Ricordando l'identità di Eulero:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta$$

Consideriamo una grandezza sinusoidale ad esempio la corrente che scorre in un circuito alimentato da un generatore tale che:

$$V(t) = V_o \cos(\omega t)$$

In generale avrò che:

$$I(t) = I_o \cos(\omega t + \varphi)$$

Se associo a tale grandezza la variabile complessa (la cui parte reale coincide con quella precedente):

$$\mathbf{I}(t) = I_o[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

Le grandezze complesse vengono indicate in grassetto. Applicando la identità di Eulero avrò che:

$$\mathbf{I}(t) = (I_o e^{j\varphi}) e^{j\omega t} = \mathbf{I}_c e^{j\omega t} \quad (4)$$

La parte dentro parentesi  $\mathbf{I}_c$  è un numero complesso non dipendente dal tempo, mentre il resto è una grandezza che dipende dal tempo.

Se utilizziamo tale corrente complessa per calcolare la d.d.p. ai capi dei tre componenti passivi che conosciamo risulta che:

$$\mathbf{V}(t) = R \mathbf{I}_c e^{j\omega t} = R \mathbf{I}(t)$$

Per una induttanza essendo:

$$\mathbf{V}(t) = L \frac{d\mathbf{I}}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_c e^{j\omega t}) = j\omega L (I_c e^{j\omega t}) = j\omega L \mathbf{I}(t)$$

Per un condensatore essendo:

$$\mathbf{V}(t) = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I(t) dt = \frac{1}{C} \int (I_c e^{j\omega t}) dt = \frac{1}{j\omega C} I_c e^{j\omega t} = \frac{\mathbf{I}(t)}{j\omega C}$$

Se si definisce come estensione della resistenza elettrica una grandezza complessa  $\mathbf{Z}$  detta impedenza che vale per  $R$ :

$$\mathbf{Z}_R = R \quad (5)$$

Per una induttanza:

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L \quad (6)$$

Per una capacità:

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} \quad (7)$$

Si ha una legge formalmente simile per i tre elementi circuitali passivi:

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{I}(t)\mathbf{Z} \quad (8)$$

Si dimostra facilmente, generalizzando quanto visto per le resistenze, come la serie di  $n$  impedenze è pari alla somma delle impedenze dei singoli componenti:

$$\mathbf{Z}_s = \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i \quad (9)$$

Mentre se si hanno  $n$  elementi in parallelo, si comportano come se l'inverso impedenza è pari alla somma degli inversi delle impedenze di ogni singolo elemento:

$$1/\mathbf{Z}_p = \sum_{i=1}^n 1/\mathbf{Z}_i \quad (10)$$

In generale quindi la  $\mathbf{Z}$ equivalente di un circuito si compone di una parte reale (indicata spesso con  $R$ ) ed una parte immaginaria detta reattanza indicata con  $X$ :

$$\mathbf{Z} = R + jX \quad (11)$$

Riepilogando quanto detto sinora un generatore di f.e.m. alternata:

$$V = V_o \cos(\omega t)$$

ed un generico circuito in cui sia presenti in qualsiasi maniera resistenze, induttanze e capacità si può rappresentare come una impedenza  $Z$ . La corrente che scorre nel circuito vale:

$$I = I_o \cos(\omega t + \varphi)$$

con

$$I_o = \frac{V_o}{|Z|}$$

e

$$\varphi = -\arctg \frac{Z_{imm}}{Z_{reale}} \quad (12)$$

Notare come anche:

$$Z_{reale} = |Z| \cos \varphi \quad (13)$$

$$Z_{imm} = -|Z| \sin \varphi \quad (14)$$

Esempi dell'uso del metodo simbolico sono al esempio il caso un circuito RC ed un circuito RL.

## La potenza assorbita

Da quanto detto quindi la potenza istantanea fornita dal generatore in un generico circuito in c.a. vale:

$$P(t) = V(t)I(t) = V_o \cos(\omega t) I_o \cos(\omega t + \varphi)$$

Applicando le formule di somma del coseno:

$$P(t) = V_o I_o [\cos^2(\omega t) \cos \varphi - \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin \varphi]$$

Facendo la media su un periodo, il primo termine variabile nel tempo:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$$

mentre:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt = 0$$

essendo una funzione a media nulla con periodo  $T/2$ , come si ricava facilmente dallo studio della funzione. Quindi la potenza media fornita dal generatore vale:

$$P_m = \frac{I_o V_o}{2} \cos \varphi = V_{eff} I_{eff} \cos \varphi \quad (15)$$

I contatori di energia elettrica tengono conto della potenza media fornita dal generatore (cioè del termine in  $\cos \varphi$ ) fino ad un valore di  $\cos \varphi$  non eccessivo. Per cui è buona norma aggiustare le carico in maniera da rendere  $\varphi$  prossimo a 0.

Un esempio su motore alimentato in corrente alternata chiarisce l'importanza di tale trattazione.

## La risonanza

Se un generatore di f.e.m alternata viene posto ai capi della serie di una resistenza, una capacità ed una induttanza in serie si ha quello che si chiama il circuito risonante serie.

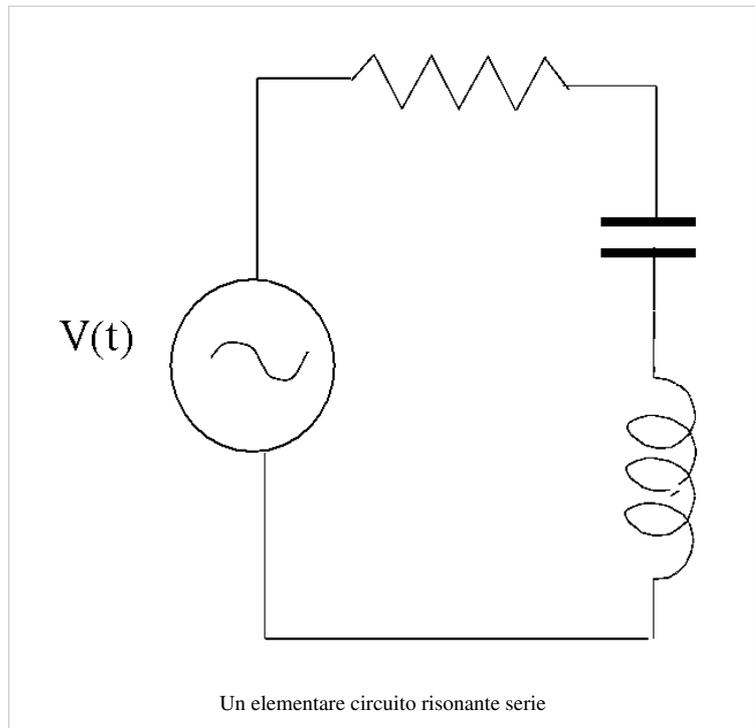
Notiamo che dal punto delle equazione differenziale di partenza abbia notevoli analogie con l'equazione di un oscillatore armonico forzato. Infatti la sua equazione caratteristica é:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = V_o \cos(\omega t)$$

Una volta che si sostituisca a  $I$ :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Diviene:



$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_o \cos(\omega t) \quad (16)$$

La cui omogenea non differisce algebricamente dall'equazione dell'oscillatore armonico:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Infatti analogamente si definisce:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (17)$$

che è analoga dal punto di vista elettrico, alla pulsazione di risonanza meccanica di  $\omega_o = \sqrt{k/m}$ , essendo  $L$  l'equivalente elettrico della massa, e  $1/C$  l'equivalente elettrico della costante di richiamo elastica. Ritornando al mondo elettrico, se l'analizziamo il circuito dal punto di vista del metodo simbolico:

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

Quindi usando lo stesso metodo visto per i circuiti precedenti risulta che:

$$I_o = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (18)$$

Che è chiaramente una funzione con un massimo pronunciato alla pulsazione di risonanza, cioè per:

$$\omega_o L = \frac{1}{\omega_o C}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e la cui ampiezza per tale valore della pulsazione vale semplicemente:

$$I = \frac{V_o}{R}$$

Lo sfasamento tra corrente e tensione vale:

$$\varphi = -\arctan \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} \quad (19)$$

Tale funzione è nulla alla frequenza di risonanza e varia da  $90^\circ$  a bassa frequenza (in cui domina l'impedenza capacitiva) e  $-90^\circ$  per alte frequenze in cui domina l'impedenza induttiva.

Analogamente che nel caso meccanico si definisce fattore di merito  $Q$  la misura del picco di risonanza definito come:

$$Q = \frac{\omega_o}{\omega_+ - \omega_-} = \frac{\omega_o}{\Delta\omega} \quad (20)$$

Dove  $\omega_+$  ed  $\omega_-$  sono le due pulsazioni per cui  $I$  si ridotta rispetto al valore di picco di  $\sqrt{2}$  (cioè al suo valore efficace). La curva a campana non è simmetrica, ma, se il  $Q$  è elevato, si può approssimare con una curva simmetrica in maniera che:

$$\omega_+ - \omega_o \approx \omega_o - \omega_- = \frac{\Delta\omega}{2}$$

Imponendo che:

$$\frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_+ L - 1/(\omega_+ C)\right)^2}} = \frac{V_o}{\sqrt{2}R}$$

segue che:

$$R^2 + \left(\omega_+L - \frac{1}{\omega_+C}\right)^2 = 2R^2$$

$$\left(\omega_+L - \frac{1}{\omega_+C}\right)^2 = R^2$$

$$\omega_+L - \frac{1}{\omega_+C} = R$$

$$\omega_+L \left(1 - \frac{1}{\omega_+^2LC}\right) = R$$

$$\omega_+L \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega_+^2}\right) = R$$

$$\omega_+L \left(1 + \frac{\omega_o}{\omega_+}\right) \left(1 - \frac{\omega_o}{\omega_+}\right) = R$$

Ma  $1 + \frac{\omega_o}{\omega_+} \approx 2$  quindi:

$$2L(\omega_+ - \omega_o) \approx R$$

Per cui:

$$\Delta\omega = 2(\omega_+ - \omega_o) = \frac{R}{L}$$

e quindi:

$$Q = \frac{\omega_oL}{R} = \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\omega_oCR} \quad (21)$$

Nel caso del circuito risonante parallelo cioè nel circuito indicato in figura

La resistenza  $R_s$  limita la massima corrente che scorre nel circuito. Se in particolare  $R_s$  è grande il circuito è alimentato a corrente di ampiezza costante  $I_o$ .

$$I(t) = I_o \cos \omega t$$

In queste condizioni il parallelo dei tre elementi circuitali vale:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_p} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

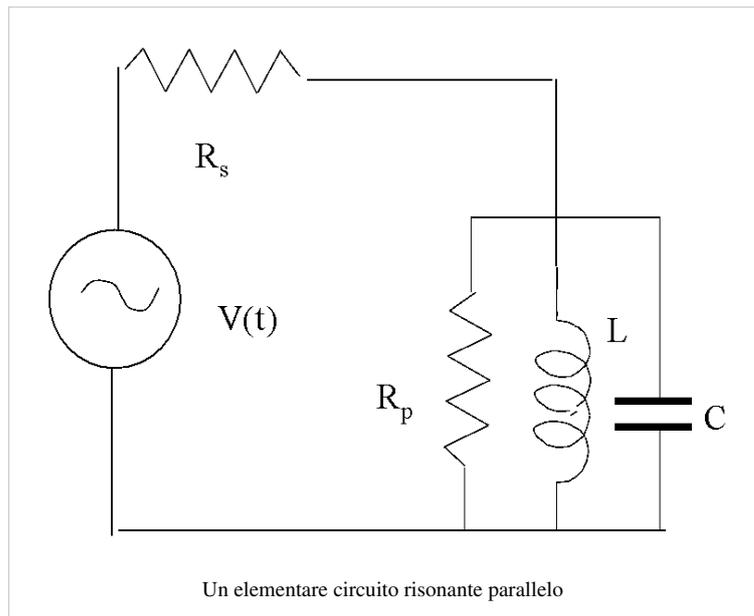
Quindi la tensione ai capi del circuito, usando il metodo simbolico, vale:

$$V = IZ = I_o \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}}$$

Quindi l'ampiezza della tensione ai capi dei tre elementi in parallelo vale:

$$V_o = \frac{I_o}{\sqrt{1/R_p^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

che è formalmente simile all'eq.18 infatti la tensione (invece della corrente) ha un massimo per:



$$\omega_o C = \frac{1}{\omega_o L}$$

la fase è nulla alla frequenza di risonanza e varia tra  $90^\circ$  e  $-90^\circ$ . Il fattore di merito definito per la larghezza della curva di risonanza della tensione vale, con ragionamenti analoghi:

$$Q = R_p \omega_o C \quad (22)$$

Cioè il fattore di merito è tanto più alto quanto più basse sono le perdite ai capi del sistema in parallelo.

Qualche esercizio può chiarire meglio i concetti: classico serie, classico parallelo, circuito con due condensatori,

## Il trasformatore

Nella forma più semplice il trasformatore in c.a. consiste di due bobine avvolte attorno ad un circuito magnetico (di permabilità magnetica  $\mu_r$ , lunghezza  $l$  e sezione  $S$ ).

Una delle bobine detta *primario* è connessa ad un generatore di f.e.m. alternata. Il circuito magnetico fa sì che non vi sia flusso magnetico disperso (nella pratica il flusso disperso è realmente trascurabile). L'altra bobina viene chiamata *secondario*.

L'induttanza del primario, dette  $N_1$  le sue spire, vale:

$$L_1 = \frac{\mu_o \mu_r N_1^2 S}{l}$$

L'induttanza del secondario, dette  $N_2$  le sue spire, vale:

$$L_2 = \frac{\mu_o \mu_r N_2^2 S}{l}$$

La loro mutua induzione vale:

$$M = \frac{\mu_o \mu_r N_1 N_2 S}{l}$$

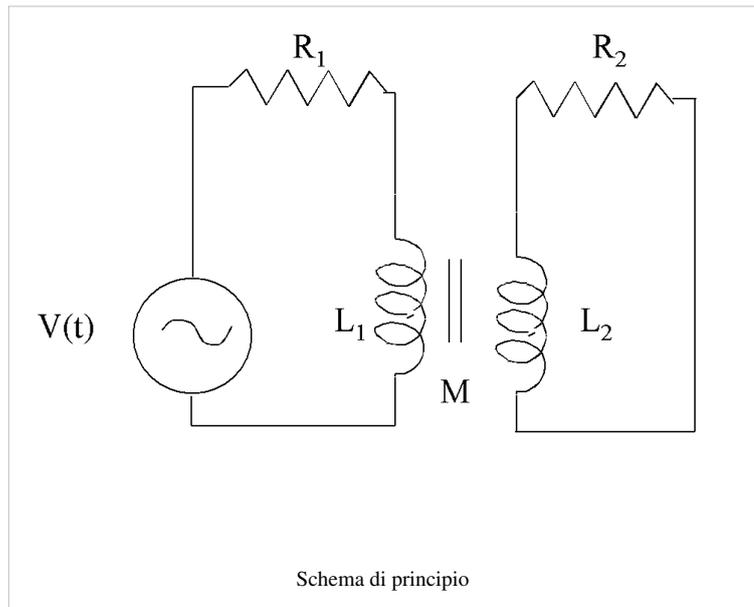
Nella forma più semplice il primario è connesso al generatore attraverso una resistenza  $R_1$ , mentre il secondario viene chiuso attraverso una resistenza  $R_2$ .

L'equazioni, con il metodo simbolico che descrivono il precedente circuito sono:

$$V_{in} = R_1 I_1 + L_1 \frac{d I_1}{dt} - M \frac{d I_2}{dt} \quad (23)$$

$$0 = R_2 I_2 + L_2 \frac{d I_2}{dt} - M \frac{d I_1}{dt} \quad (24)$$

dette  $I_1$  ed  $I_2$  le correnti che scorrono nei due circuiti.



È facile mostrare come il circuito equivalente, mostrato a fianco sia descritto dalla stessa equazione.

Un caso particolare importante è quando la resistenza del primario sia trascurabile, rispetto alla sua induttanza  $R_1 \ll \omega L_1$ , ed inoltre la resistenza del secondario  $R_2$  è grande, in maniera che sia trascurabile la corrente  $I_2$  rispetto ad  $I_1$  (come anche la sua derivata temporale). In questo caso, le due equazioni diventano:

$$V_{in} \approx L_1 \frac{d I_1}{dt}$$

$$0 \approx R_2 I_2 - M \frac{d I_1}{dt}$$

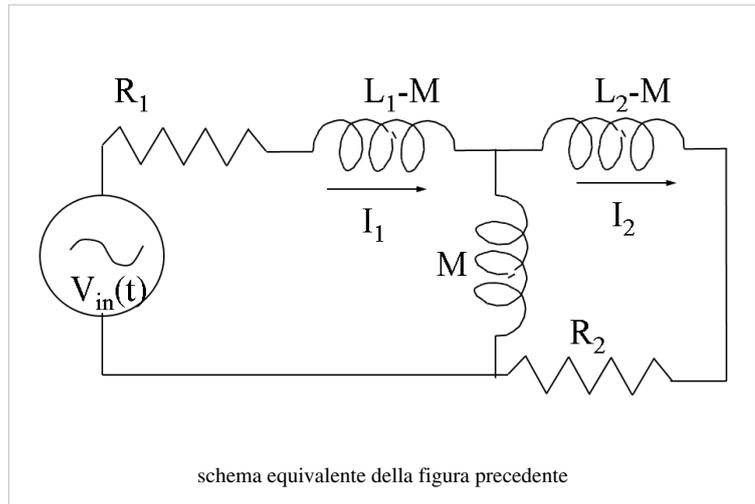
Definendo  $V_{out} = R_2 I_2$  si ha che:

$$V_{out} = M \frac{d I_1}{dt} = \frac{M}{L_1} V_{in} = \frac{N_2}{N_1} V_{in}$$

cioè il rapporto tra la tensione in uscita e quella in entrata è pari al rapporto tra il numero di spire del secondario e del primario. Il nome trasformatore dipende proprio dal fatto che trasforma la tensione in entrata nel primario in una tensione ai capi del secondario, nel limite che la resistenza del secondario ( $R_2$ ) non sia troppo bassa, e che possiamo trascurare le perdite ( $R_1$ ) del primario.

Un esercizio su un trasformatore reale chiarisce invece gli aspetti in un caso più generale.

Argomento seguente: Equazioni di Maxwell



# Equazioni di Maxwell

---

Argomento precedente: Correnti alternate

## Introduzione

Le leggi fondamentali alla base dell'elettromagnetismo furono messe insieme grazie al lavoro di un grande numero di scienziati, tra cui C. Coulomb, H. Oersted, A. Ampère, J. Henry e M. Faraday. Una prima sintesi dell'elettromagnetismo è dovuta a C. Gauss che, enunciando i due teoremi che rappresentano le prime due equazioni di Maxwell, mise per primo le basi per la teoria completa dell'elettromagnetismo che verrà descritta nel seguito. I Teoremi stabiliscono come da una parte le cariche sono le sorgenti del campo elettrico e dell'altra che le correnti elettriche sono le sorgenti del campo magnetico.

Il lavoro di sintesi sull'elettromagnetismo è dovuto a J. Maxwell che negli anni tra il 1860 ed il 1870 sviluppò una formulazione completa dell'elettromagnetismo comprendente tutte le leggi studiate. Vi è da aggiungere che le leggi dell'elettromagnetismo così sviluppate, che qui saranno descritte nella loro formulazione moderna, sono in disaccordo con il principio di relatività galileiana e solo la relatività ristretta di A. Einstein ha permesso di risolvere tale incongruenza riformulando il principio di relatività. Notiamo infatti che le equazioni di Maxwell conservano la loro validità anche in relatività ristretta, quindi è la relatività galileiana che risulta inadeguata a descrivere il mondo fisico, se si considera il valore finito della velocità della luce.

Se non viene specificato diversamente la trattazione è riferita al caso del vuoto, la presenza di materia rende necessaria una trattazione più articolata.

## Equazioni di Maxwell in forma Integrale

I campi elettrici e magnetici hanno molte differenze, ma presentano anche notevoli somiglianze dal punto di vista matematico. Se si sceglie una superficie chiusa arbitraria dello spazio  $S$ , la legge di Gauss applicata al campo elettrico e magnetico comporta che:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1)$$

L'equivalente per il campo di induzione magnetica:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2)$$

Queste due equazioni integrali rappresentano una chiara manifestazione di simmetria dei due campi in assenza di cariche elettriche. Infatti se si è in una regione di spazio dove non è presente la carica elettrica le due equazioni formalmente sono equivalenti.

Tale simmetria è apparentemente mancante tra la legge di Faraday e di Ampère.

Infatti la legge di Faraday afferma che la derivata temporale del flusso magnetico attraverso una superficie aperta  $S$  delimitata con una linea chiusa  $L$  è pari alla circuitazione (cambiata di segno) di un campo elettromotore indotto nel circuito  $L$ , matematicamente::

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3)$$

La legge di Ampère, invece afferma semplicemente che la circuitazione del campo magnetico attraverso un cammino chiuso  $L$  è proporzionale alla corrente totale concatenata ad  $L$ , (cioè la corrente totale che attraversa la superficie  $S$  di cui  $L$  è la frontiera):

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \quad (4)$$

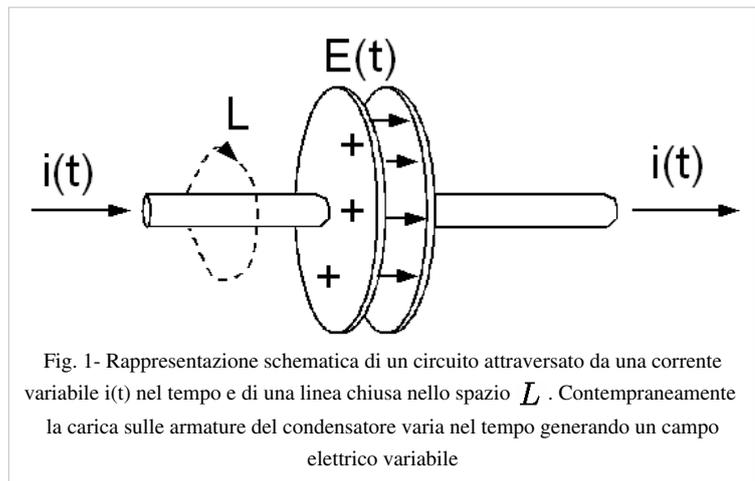
Mentre il campo elettromotore della legge di Faraday è legato alla variazione nel tempo del campo magnetico. Nella legge di Ampère vi è un legame tra campi magnetici e correnti elettriche stazionarie senza l'intervento di campi elettrici variabili nel tempo. La asimmetria è evidente ed è dovuta alla incompletezza della eq.4, che quindi non ha valore generale.

Le eq.1 e eq.2 sono state rappresentate matematicamente nella forma data, dopo che molti esperimenti di Fisica avevano evidenziato il contenuto delle equazioni stesse. La formulazione precisa della legge che deve essere sostituita alla eq.4 per renderla completa è dovuta J. Maxwell che la formulò nella metà dell'800, tale legge verrà verificata sperimentalmente solo molti anni dopo. Il termine aggiuntivo mancante rende simmetriche le eq. 3 e eq.4 (nella forma completa). Infatti la forma completa della legge di Ampère contiene il fatto che la variazione del flusso del campo elettrico concatenato genera un campo magnetico.

Rimane una asimmetria dovuta alla assenza di monopoli magnetici, se ci fossero i monopoli magnetici le eq. 1 e 2 sarebbero simili. Ma anche le leggi di Faraday e di Ampère (eq. 3 e 4).

## La corrente di spostamento

Completiamo il termine mancante al teorema di Ampère (eq. 4). Ci basiamo su un semplice esperimento, *gedanken* (pensato in tedesco), che potrebbe essere eseguito ai nostri giorni. Consideriamo un semplice condensatore a piatti circolari piani e paralleli (di superficie  $S$  e distanza  $d$  tra le armature). Immaginiamo il condensatore inizialmente scarico e che venga caricato in una maniera qualsiasi, ma possiamo affermare in forma generale che una corrente  $i(t)$  attraverserà i fili elettrici che connettono le armature. Consideriamo la linea chiusa  $L$  mostrata nella figura a fianco.



Tale cammino chiuso può delimitare una superficie  $S_1$  che attraversa il filo dove scorre una corrente  $i(t)$  o una altra superficie  $S_2$  che passa attraverso le armature del condensatore: unica regione di spazio in cui durante la carica del condensatore è presente un campo elettrico variabile nel tempo  $\vec{E}(t)$  (se l'induzione tra le armature del condensatore è completa). Se eseguiamo l'integrale di linea di  $\vec{B}$  lungo la linea  $L$  se tale linea comprende la superficie  $S_1$  avremo che:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i(t)$$

Mentre se la linea delimita la superficie  $S_2$  il secondo membro sarebbe identicamente nullo.

Questa è una chiara contraddizione che dipende dall'aver trascurato la quantità  $i_{sp}$ , detta **corrente di spostamento**, tra le armature del condensatore:

$$i_{sp} = \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi(E)$$

dove  $\Phi(E)$  è il flusso elettrico che attraversa la generica superficie  $S_i$  delimitata dalla linea  $L$ . Da una semplice analisi dimensionale appare che tale quantità, non solo ha le dimensioni di una corrente, ma coincide istante per

istante con la corrente  $i(t)$ . Infatti la carica istantanea sulle armature del condensatore vale:

$$Q(t) = \varepsilon_o \frac{S}{d} V(t) = \varepsilon_o \frac{S}{d} |E(t)| d = \varepsilon_o S |E(t)|$$

Ma la sua derivata nel tempo è pari alla corrente  $i(t)$  che carica il condensatore:

$$i(t) = \varepsilon_o \frac{\partial |E(t)|}{\partial t} S$$

Il teorema di Ampère in forma completa si scrive:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o i + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t} \Phi(E) = \mu_o i + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(E) \quad (5)$$

Quindi campi elettrici variabili nel tempo producono campi magnetici, analogamente a quanto succede tra campi magnetici variabili nel tempo e campi elettrici. Notiamo come si sia sostituita a  $\mu_o \varepsilon_o$  l'inverso della velocità della luce nel vuoto al quadrato  $1/c^2$ .

La corrente di spostamento non è una astrazione matematica, ma una realtà fisica. Infatti tornando all'esempio di prima tra le armature del condensatore durante il processo di carica si forma un campo magnetico coassiale con il condensatore cilindrico, ma di intensità in genere così piccola da essere con difficoltà misurabile, per questo la corrente di spostamento è stata prevista teoricamente prima di essere stata misurata sperimentalmente, al contrario delle altre proprietà dell'elettromagnetismo che sono state messe in evidenza prima sperimentalmente e poi inquadrare in equazioni matematiche.

La corrente di spostamento, qui introdotta in un caso particolare da una condizione di continuità sulle correnti elettriche in circuiti interrotti da condensatori, ha un significato fisico più generale, ed esprime il fatto che campi elettrici variabili nel tempo generano campi magnetici.

## L'operatore Nabla

Se definiamo con  $\vec{\nabla}$  il seguente operatore vettoriale:

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Dato un campo vettoriale generico  $\vec{A}$ :

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

Il prodotto scalare di  $\vec{\nabla}$  con tale generico campo vettoriale viene chiamata divergenza:

$$div \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

La divergenza di un campo vettoriale è uno scalare che misura in qualche maniera la variazione spaziale del campo stesso.

## Teorema della divergenza

Dimostriamo analiticamente che per il flusso di un campo vettoriale  $\vec{A}$  attraverso una superficie chiusa  $S$  che delimita un volume  $T$  vale la seguente eguaglianza:

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_T \text{div} \vec{A} d\tau \quad (6)$$

Tale relazione permette di trasformare un integrale di superficie in un integrale di volume e va sotto il nome di **Teorema della divergenza**.

**Dimostrazione:** Consideriamo un campo vettoriale  $\vec{A}(x, y, z)$ , definito in una regione di spazio all'interno del quale le componenti di  $\vec{A}$  sono derivabili rispetto alle variabili  $x, y, z$ . Calcoliamo il flusso di  $\vec{A}$  uscente da un volume infinitesimo: un parallelepipedo di dimensioni lineari  $dx, dy, dz$ . Detto  $\vec{A}_o$  il campo al centro del parallelepipedo. Il flusso dalle facce ortogonali all'asse delle  $x$  del campo valgono, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$d\Phi_{ABHE} = - \left( A_{ox} - \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_o \frac{dx}{2} \right) dydz$$

$$d\Phi_{CDGF} = \left( A_{ox} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_o \frac{dx}{2} \right) dydz$$

Quindi:

$$d\Phi_{ABHE} + d\Phi_{CDGF} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_o d\tau$$

Dove si è definito  $d\tau = dx dy dz$  il volume del parallelepipedo infinitesimo. In maniera analoga si trova che i contributi al flusso attraverso le facce ortogonali agli assi  $y$  e  $z$ . In maniera che il flusso totale attraverso le sei facce del parallelepipedo valgono:

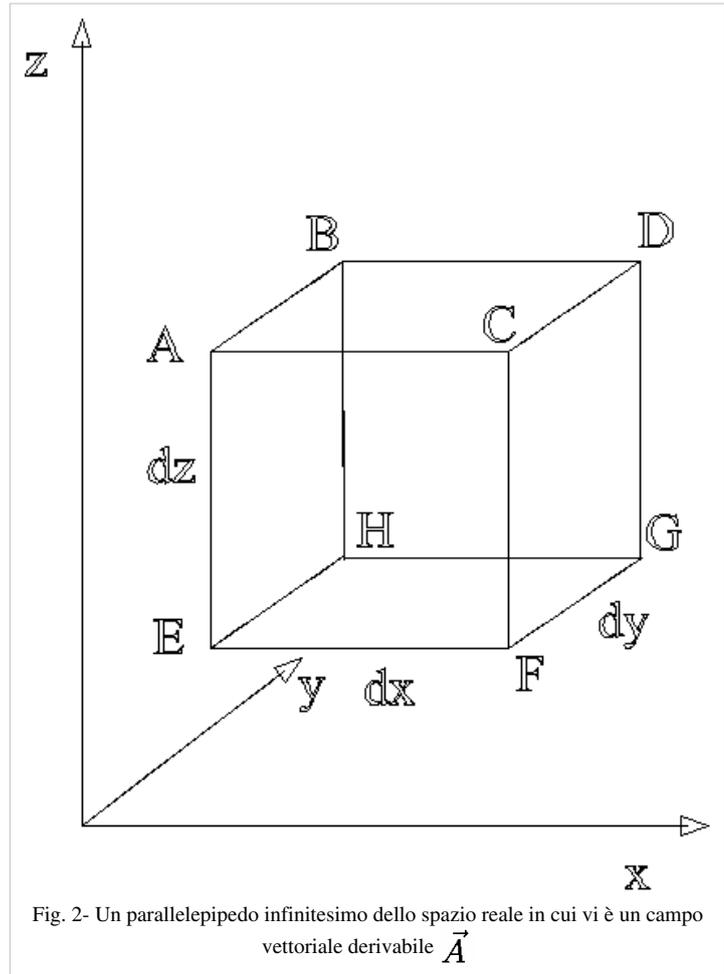
$$d\Phi = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) d\tau$$

Avendo ommesso il pedice  $o$ . Con la definizione di divergenza si può scrivere in maniera più compatta:

$$d\Phi = \text{div} \vec{A} dx dy dz$$

L'espressione del flusso uscente attraverso le facce del parallelepipedo infinitesimo. A partire da tale relazione, si ricava facilmente, per semplice integrazione, il flusso uscente attraverso la superficie  $S$  che racchiude un volume finito  $\tau$ . Va infatti osservato che la somma dei flussi elementari  $d\Phi$  dà contributo nullo per tutte le superfici elementari interne ed  $S$ , ognuna delle quali è attraversata due volte, ma in versi opposti, quando si calcola il flusso uscente da due volumi contigui. Integrando, si ottiene quindi:

$$\Phi_S(\vec{A}) = \int_S \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d\tau$$



L'espressione algebrica del teorema della divergenza che afferma che il flusso un vettore  $\vec{A}$  attraverso una superficie chiusa  $S$  è pari all'integrale della divergenza del vettore  $\vec{A}$  calcolato nel volume  $\tau$  racchiuso da  $S$ . Notiamo come la divergenza sia un operatore differenziale che applicato al campo vettoriale  $\vec{A}$  lo trasformi in uno scalare.

## Applicazione del teorema della divergenza ai campi elettrici

Applichiamo il teorema della divergenza ai campi elettrici. Per quanto riguarda i campi elettrici qualsiasi sia la superficie  $S$  che delimita una regione di spazio si ha che :

$$\int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho(x, y, z) d\tau$$

Poiché l'identità tra gli integrali vale qualsiasi sia la superficie chiusa di integrazione  $S$ , l'equazione deve valere qualsiasi sia il volume di integrazione, tale condizione implica da un punto di vista matematico che gli integrandi siano eguali da cui segue che, localmente, omettendo la dipendenza esplicita dalle coordinate spaziali:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (7)$$

Tale equazione costituisce la prima equazione di Maxwell. Questa equazione è sostanzialmente equivalente alla legge di Gauss, dalla quale è stata dedotta nell'ipotesi che valga il teorema della divergenza. Questo comporta che per potere passare dalla notazione integrale a quella differenziale il campo elettrico  $\vec{E}$  sia derivabile in ogni punto della regione di spazio considerata: ipotesi aggiuntiva rispetto al teorema di Gauss.

## Applicazione del teorema della divergenza ai campi magnetici

Applichiamo il teorema della divergenza ai campi magnetici. Consideriamo quindi una generica superficie  $S$  che delimita una regione di spazio  $\tau$ , per quanto riguarda l'induzione magnetica vale sempre la eq.2 e quindi applicando il teorema della divergenza si ha che:

$$\int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d\tau = 0$$

Per essere tale integrale nullo qualsiasi sia la regione di spazio  $\tau$  deve essere nullo l'integrando segue quindi che :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8)$$

Tale equazione esprime il fatto che non vi sono i monopoli magnetici.

## Il teorema di Stokes

Il prodotto vettoriale di  $\vec{\nabla}$  con il generico vettore  $\vec{A}$  viene chiamato rotore:

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Il rotore di un campo vettoriale dà una misura dei vortici presenti nel campo stesso. Per esempio se il campo vettoriale è dato dal vettore velocità delle particelle di fluido in un condotto, la presenza di vortici determina un rotore non nullo del vettore velocità.

Si dimostra analiticamente che la circuitazione di un generico vettore  $\vec{A}$  attraverso una linea chiusa  $L$  che delimita una superficie aperta  $S$  valga esattamente:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Questa equazione permette di trasformare un integrale di linea in uno di superficie.

## Legge di Faraday e di Ampère in forma locale mediante il teorema di Stokes

Per quanto riguarda l'equazione di Faraday eq.3 può essere scritta come:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Dove  $L$  è la linea che delimita la superficie  $S$ . Applicando a questa equazione la eq.9 si ha:

$$\int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Se la superficie  $S$  non varia nel tempo:

$$\int_S \left( \text{rot} \vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt} \right) \cdot d\vec{s} = 0$$

Per essere nullo tale integrale indipendentemente dalla superficie di integrazione  $S$ , deve essere nullo l'integrando:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (10)$$

Questa è l'espressione della legge di Faraday in forma locale.

Infine dalla equazione di Ampère (eq.5) scritta in maniera generale, definendo la corrente come flusso della densità di corrente  $\vec{J}$ :

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{1}{c^2} \int_S \frac{d\vec{E}}{dt} \cdot d\vec{s}$$

Ma il primo termine può essere riscritto mediante la equazione di Stokes (eq.9):

$$\int_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{1}{c^2} \int_S \frac{d\vec{E}}{dt} \cdot d\vec{s}$$

Quindi:

$$\int_S \left( \text{rot} \vec{B} - \mu_o \vec{J} - \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \cdot d\vec{s} = 0$$

Per essere nullo tale integrale indipendentemente dalla superficie di integrazione  $S$ , deve essere nullo l'integrando, da cui:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (11)$$

Questa è l'espressione della legge di Ampère in forma locale.

## Equazioni di Maxwell in forma differenziale

Le equazioni 7, 8, 10 ed 11 rappresentano le equazioni di Maxwell in forma locale o differenziale, e sono qui ripetute per completezza, sostituendo al rotore l'espressione più sintetica  $\vec{\nabla}$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (11)$$

Queste equazioni contengono tutte le proprietà dell'elettromagnetismo se accoppiate alla espressione della Forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (12)$$

e all'equazione di continuità della carica:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad (13)$$

Argomento seguente: Proprietà generali delle onde

---

# Onde

---

## Proprietà generali delle onde

---

Argomento precedente: Equazioni di Maxwell

### Introduzione

Dall'inizio della civiltà è noto che nei mezzi continui si possono propagare disturbi che variano sia nello spazio che nel tempo: dette onde. Un esempio di onde da sempre note sono le onde del mare. Uno dei primi tentativi scientifici di spiegare il fenomeno è dovuto a Leonardo da Vinci che cercò di studiare le onde, prodotte dal vento, sulle spighe di un campo di grano.

Per avere un'onda è in genere necessario un mezzo continuo ed una forza di richiamo elastico, diffusa, che una volta provocata una deformazione tende a riportare il sistema nella configurazione di equilibrio, ma contemporaneamente la distribuisce nel mezzo vicino.

Una caratteristica delle onde è inoltre che, senza trasporto di materia, le onde trasportano energia e in genere anche quantità di moto: la forza distruttiva delle onde del mare sulle barriere è dovuta al trasporto di quantità di moto o se si vuole di pressione.

### Equazione delle onde

L'equazione differenziale che descrive le onde ha un carattere universale viene detta equazione delle onde ed è una Equazione differenziale alle derivate parziali e nel caso unidimensionale la sua espressione è:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Dove  $u$  è la grandezza che rappresenta l'allontanamento dalla posizione di equilibrio. Nel caso delle onde del mare la grandezza che si allontana dalla posizione di equilibrio è la superficie fluido, nel caso delle onde del grano l'allontanamento dalla posizione verticale della spiga, nel caso del suono nei fluidi è la pressione locale.  $v$  è la velocità dell'onda ed il parametro che dipende dal mezzo in cui viene trasmesso, in genere la velocità delle onde dipende fortemente dalla forza di richiamo elastica e dalla densità del mezzo. Come regola generale si ha che più elevata è la forza di richiamo elastico più alta è la velocità delle onde, mentre minore è la densità del mezzo più elevata è la velocità.

La soluzione generale dell'equazione delle onde nel caso di deformazione unidimensionale è stata derivata da d'Alembert come:

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

dove  $f$  e  $g$  sono funzioni arbitrarie, corrispondenti, rispettivamente, alla onda che si muove in avanti (progressiva) e a quella che si muove all'indietro (regressiva).

In tre dimensioni l'equazione delle onde diviene:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

E la sua soluzione generale vale:

$$u(\vec{r}, t) = f(\vec{r} - vt) + g(\vec{r} + vt)$$


---

## Onde armoniche

Una onda si può sempre scomporre come combinazione di funzioni sinusoidali: la cosiddetta scomposizione armonica.

Per chiarire meglio il concetto consideriamo una soluzione unidimensionale di un'onda progressiva sinusoidale (rappresentata graficamente a fianco):

$$f(x, t) = A \sin[k(x - vt) + \phi]$$

Si definisce lunghezza d'onda  $\lambda$  la distanza minima tra due creste (o la distanza minima tra due punti dello spazio in cui l'onda ritorna eguale a se stessa), algebricamente:

$$k(x + \lambda) = kx + 2\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La grandezza  $k$  viene chiamato numero d'onda. L'espressione di  $f$  in funzione del tempo è simile a quella nello spazio, viene definito periodo  $T$  il tempo minimo necessario all'onda per ritornare eguale a se stessa:

$$-kv(t + T) = -kvt - 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v}$$

Nei fenomeni periodici nel tempo si preferisce parlare dell'inverso del periodo la frequenza:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Quindi la relazione tra la periodicità spaziale e temporale di tutte le onde diviene:

$$\lambda\nu = v$$

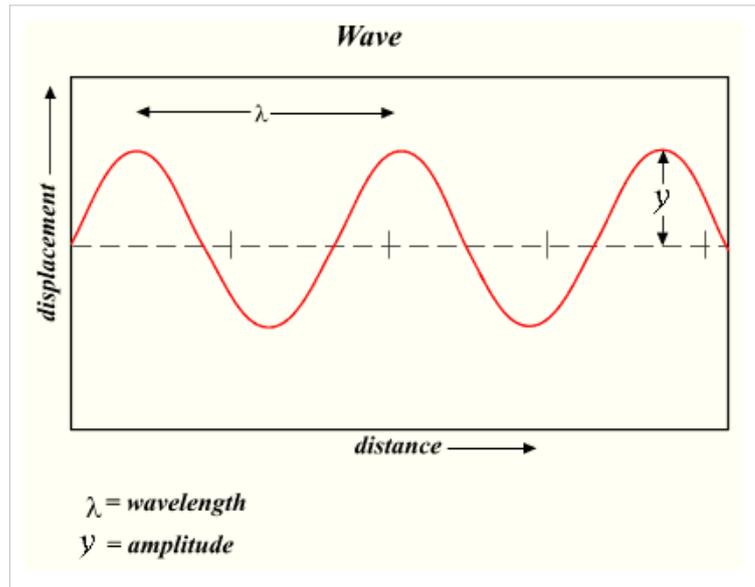
La rappresentazione armonica sinusoidale definendo la pulsazione  $\omega$ :

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$f(x, t) = A \sin(kx - kvt + \phi) = A \sin\left(kx - \frac{2\pi}{\lambda}vt + \phi\right) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

Nel caso tridimensionale  $\vec{k}$  diviene il **vettore d'onda** con eguale modulo, ma diretto nella direzione di propagazione dell'onda. In tal caso la rappresentazione diviene:

$$f(\vec{r}, t) = \vec{A} \sin[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi]$$

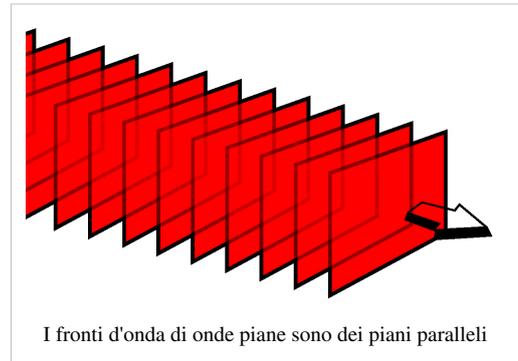


## Fronte d'onda

Il luogo dei punti in cui l'onda ha stessa ampiezza e fase viene chiamato fronte d'onda, nel caso di una onda nello spazio tridimensionale il fronte d'onda è un elemento di una famiglia di superfici. Nel caso bidimensionale il fronte d'onda è un elemento di una famiglia di curve.

Le onde nei liquidi chiariscono il concetto. Immaginiamo di fare cadere in uno stagno un sasso, l'onde che si formano sono una serie di cerchi concentrici con il punto di caduta: in questo caso il fronte d'onda è una circonferenza. Se invece l'onda viene provocata da un debole vento che increspa la superficie si avrà un'onda piana, cioè il fronte d'onda è costituito da una linea retta.

L'estensione al caso tridimensionale è facile, infatti se abbiamo in un mezzo tridimensionale ed una sorgente puntiforme che emette in maniera isotropa, le onde avranno un fronte d'onda sferico, mentre una sorgente estesa isotropa genererà un fronte d'onda



piano, come mostrato nella figura a fianco: le onde che hanno tale caratteristica sono dette onde piane. Le onde piane sono le più facili da studiare in quanto dipendono da una sola coordinata cartesiana: la direzione perpendicolare ai piani paralleli. Quando all'inizio abbiamo scritto l'equazione delle onde nel caso unidimensionale in realtà stavamo parlando della equazione caratteristica delle onde piane.

Argomento successivo: Suono

# Suono

## Suono

### Fluidi

Nei fluidi la pressione rappresenta la forza di richiamo elastico che permette la propagazione del suono. Il suono in tali mezzi è un'onda di pressione o se si vuole di densità a causa della equazione di stato dei fluidi. Le uniche onde possibili nei fluidi sono quelle longitudinali, cioè lungo la direzione di propagazione dell'onda stessa.

La velocità del suono nei fluidi è isotropa ed indipendente dalla frequenza:

$$v_s = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Dove  $\rho$  è la densità del fluido e  $B$  è il coefficiente di compressione adiabatico, definito come:

$$B = -\rho \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{adiabatica}$$

Dove  $p$  la pressione. Nel caso dei gas perfetti  $B = \gamma p$  dove  $\gamma$  è pari al rapporto tra il calore specifico a pressione e volume costante  $\gamma = c_p/c_v$ .

La presenza del coefficiente di compressione adiabatico si spiega con la rapidità dei fenomeni acustici che avvengono senza scambi di calore tra strati vicini (quindi adiabatici). Nei fluidi non vi è nessuna forza di richiamo elastica nella direzione perpendicolare al moto, infatti in tale direzione agisce solo la viscosità che in nessun caso è approssimabile come una forza elastica. Per questa ragione non esistono onde acustiche trasversali come nei solidi.

### Solidi

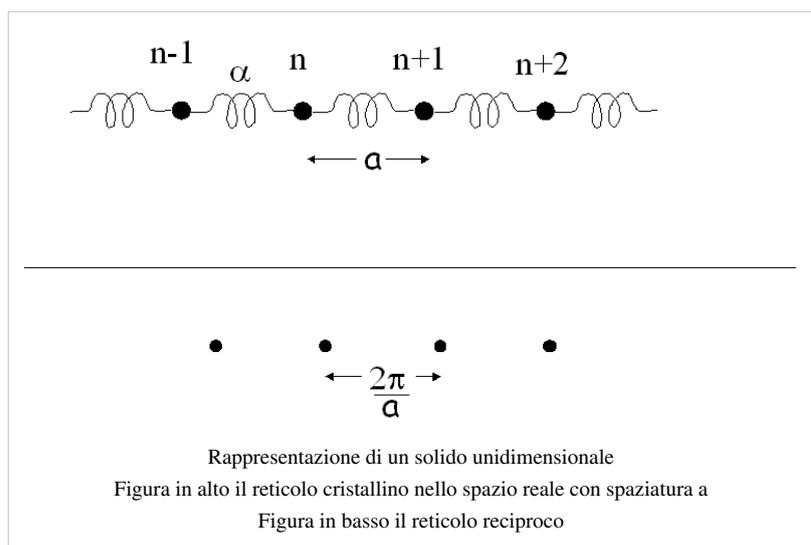
Nei solidi la forza che mantiene gli atomi nelle posizioni cristalline è in prima approssimazione elastica ed agisce sia nella direzione longitudinale (come nei fluidi) che nella direzione perpendicolare alla propagazione del suono, per questo nei solidi parliamo di onde longitudinali e trasversali. A seconda della direzione cristallina che stiamo considerando le onde hanno forze di richiamo diverse, per questa ragione nei solidi il suono è anisotropo, cioè dipende dalla direzione. Quindi più simmetrico è il solido (cubico) minore è il numero dei parametri indipendenti che servono a caratterizzare le onde acustiche ed ovviamente al contrario il numero dei parametri indipendenti cresce via via che diminuisce il grado di simmetria del solido. Il modulo elastico è un tensore che dipende sia dalla direzione dei piani cristallini, che dalla direzione degli sforzi su quei piani. Questo complica da un punto di vista matematico la trattazione esatta del problema.

Nei fluidi come nei solidi quando la lunghezza d'onda diventa paragonabile alla spaziatura interatomica il carattere discreto della materia non può essere più trascurato e in realtà esiste una lunghezza d'onda minima e quindi una frequenza massima sia nei solidi che nei fluidi. Studiamo i solidi dal punto di vista discreto considerando gli atomi discreti e tenuti insieme da forze di richiamo elastico.

In tutti solidi in prima approssimazione detta  $\vec{r}_o$  la posizione di equilibrio del generico atomo ed  $\vec{r}$  la sua posizione ad un tempo qualsiasi. Sarà soggetto ad una forza di richiamo elastico rappresentata dalla legge di Hooke:

$$\vec{F} = -\alpha(\vec{r} - \vec{r}_o)$$

Dove si è definito con  $\alpha$  il coefficiente di elasticità. La dinamica risultante è quella di un moto armonico. Nei cristalli reali tale forza di richiamo elastico è nelle tre direzioni ed il moto oscillatorio è tridimensionale. Approfondiamo il moto in una sola dimensione il modello è quello mostrato nella figura a fianco.



Consideriamo quindi una catena di atomi di massa  $m$  disposti secondo un reticolo unidimensionale: in alto nello spazio diretto, in basso è mostrato reticolo reciproco. Chiamiamo la distanza tra primi vicini sia  $a$ . In realtà è possibile il moto degli atomi sia nella direzione longitudinale, che in quella trasversale.

All'equilibrio la forza agente sull'atomo n-esimo deve essere nulla:

$$F_n = ma_n = 0$$

Inoltre la posizione dell'atomo n-esimo all'equilibrio vale:

$$na$$

Se definiamo  $u_n$  l'allontanamento dalla posizione di equilibrio dell'atomo n-esimo:

$$x_n = na + u_n$$

La forza che agirà sull'atomo n-esimo sarà:

$$F_n = \alpha(x_{n+1} - x_n) - \alpha(x_n - x_{n-1}) = \alpha(u_{n+1} - u_n) - \alpha(u_n - u_{n-1}) = \alpha(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

Quindi la seconda legge della dinamica per l'n-esimo atomo viene scritta come:

$$m \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \alpha(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (1)$$

Per dare un maggiore senso fisico all'ultima equazione. Consideriamo il caso particolare di onde lunghe cioè soluzioni di tale equazione con  $\lambda \gg a$ , la derivata spaziale prima di  $u$  vale circa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{a}$$

e di conseguenza:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{u_{n+1} - u_n}{a} - \frac{u_n - u_{n-1}}{a}}{a} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n}{a^2}$$

Quindi l'eq.1 per le onde lunghe è scrivibile anche come:

$$m \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \alpha a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \frac{\alpha}{m} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Cioè l'equazione delle onde unidimensionale con:

$$v = a \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

Per studiare il caso più generale ritorniamo alla eq.1 considerando la soluzione generale: un'onda piana del tipo:

$$u_n = A e^{i(kna + \omega t)} \quad (2)$$

dove  $A$  è l'ampiezza,  $k$  il numero d'onda ed  $\omega$  la pulsazione. Sostituendo tale soluzione (eq.2) nella equazione della dinamica (eq. 1) si ha che:

$$-\omega^2 u_n = \alpha (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

Con semplici passaggi trigonometrici si ha quindi che:

$$\omega^2 = 4 \frac{\alpha}{m} \sin^2(ka/2) \quad (3)$$

Notiamo che se avessimo usato una onda piana regressiva:

$$u_n = A e^{-i(kna + \omega t)} \quad (4)$$

Avremmo trovato la stessa identica tra  $\omega$  e  $k$ : detta comunemente relazione di dispersione. Quindi anche una combinazione lineare di due soluzioni di tale tipo è ancora soluzione cioè:

$$u_n = A e^{-i(kna + \omega t)} + A e^{i(kna + \omega t)} = 2A \cos(kna + \omega t)$$

Gli atomi nel tempo descrivono un moto armonico intorno alla posizione di equilibrio. Nei solidi sono possibili allontanamenti dalla direzione di equilibrio, non solo nella direzione longitudinale, ma anche in quella trasversale. Infatti anche nella direzione trasversale vi è una forza di richiamo elastico, ma in genere con un coefficiente di elasticità minore.

La pulsazione:

$$\omega_m = \sqrt{4\alpha/m}$$

rappresenta la pulsazione massima. La ragione di tale pulsazione o se si vuole frequenza massima deriva dal carattere discreto degli atomi. Tali frequenze massime cadono nei solidi reali a frequenze paragonabili a quelle che nelle onde e.m. si chiamano microonde o lontano infrarosso.

Solo per frequenze molto basse (lunghezze d'onda grandi) la relazione di dispersione tra  $\omega$  e  $k$  è lineare e la pendenza è la velocità del suono. Matematicamente vuol dire che se  $ka/2 \ll 1$  posso approssimare il seno con il suo argomento nella eq.3 per cui:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{\alpha}{m}} ak$$

Dove la velocità del suono è  $v = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} a$

## Corda vibrante

### Corda vibrante

Uno dei casi più facili da studiare è la propagazione di un'onda su una corda tesa. Il modello si adatta bene alla descrizione di molti strumenti musicali a corda, nei quali viene prodotto un suono la cui frequenza è costante o come viene detto in linguaggio musicale una precisa nota. Arpe, chitarre, pianoforti e violini sono solo alcuni dei numerosi strumenti a corda. Ma anche le corde vocali si basano sulle proprietà delle corde vibranti

Se chiamiamo  $L$  la lunghezza della corda,  $m$  la sua massa e  $T$  la sua tensione meccanica.

Quando la corda viene deflessa si piega con una forma approssimabile con un arco di cerchio. Se chiamiamo  $R$  il raggio e  $\theta$  l'angolo sotteso dall'arco. Si ha ovviamente che  $L = \theta R$ . La forza di richiamo elastico sulla corda vale:

$$F = \theta T$$

Tale forza è la forza centripeta quindi detta  $v$  la velocità di propagazione dell'onda nella corda:

$$F = m \frac{v^2}{R}$$

Se chiamiamo  $\mu$  la densità lineare di massa della corda (massa diviso lunghezza):

$$m = \mu L = \mu \theta R$$

e

$$F = \mu \theta R \frac{v^2}{R} = \mu \theta v^2$$

Dalla combinazione delle due espressioni della forza si ha che:

$$\theta T = \mu \theta v^2$$

Da cui si ricava che:

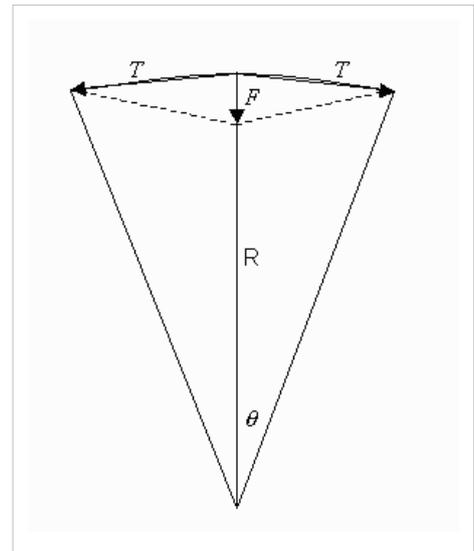
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Notiamo che avremmo potuto scrivere per il tratto infinitesimo di corda  $\delta x$ , che la sua massa vale:

$$\mu \delta x$$

Detta  $\delta y$  l'allontanamento di tale tratto dalla posizione equilibrio, l'equazione differenziale che governa l'allontanamento della posizione di equilibrio è (se l'allontanamento dalla posizione di equilibrio è piccolo:

$$\mu \delta x \frac{\partial^2(\delta y)}{\partial t^2} = T \delta x \frac{\partial^2(\delta y)}{\partial x^2}$$



$$\frac{\partial^2(\delta y)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2(\delta y)}{\partial x^2}$$

questa equazione è l'equazione caratteristica delle onde

## Onde del mare

Le **onde del mare** sono onde meccaniche che si propagano tra l'interfaccia acqua aria; la forza di richiamo elastica è fornita dalla gravità. Le onde sono generate in genere dal vento, giocano un ruolo essenziale anche la pressione e le forze di attrito che contribuiscono a perturbare l'equilibrio della superficie del mare. Queste azioni trasferiscono energia dall'aria alla superficie del mare. Nel caso di onde in acqua profonda, le particelle si muovono secondo una traiettoria circolare, rendendo le onde una combinazione di onde longitudinali (avanti e dietro) trasversali (sopra e sotto). Quando le onde si propagano in acque poco profonde, quando la profondità è minore della lunghezza d'onda (distanza tra due creste) le traiettorie diventano delle elissi.

All'aumentare della profondità, il raggio del moto circolare diminuisce, come mostrato in figura. Ad una

profondità di qualche lunghezza d'onda il raggio del cerchio va a zero. La velocità di fase delle onde del mare, non legata direttamente alla velocità delle particelle d'acqua, è bene approssimata da:

$$v_m = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)}$$

dove:

$v_m$  = velocità di fase;

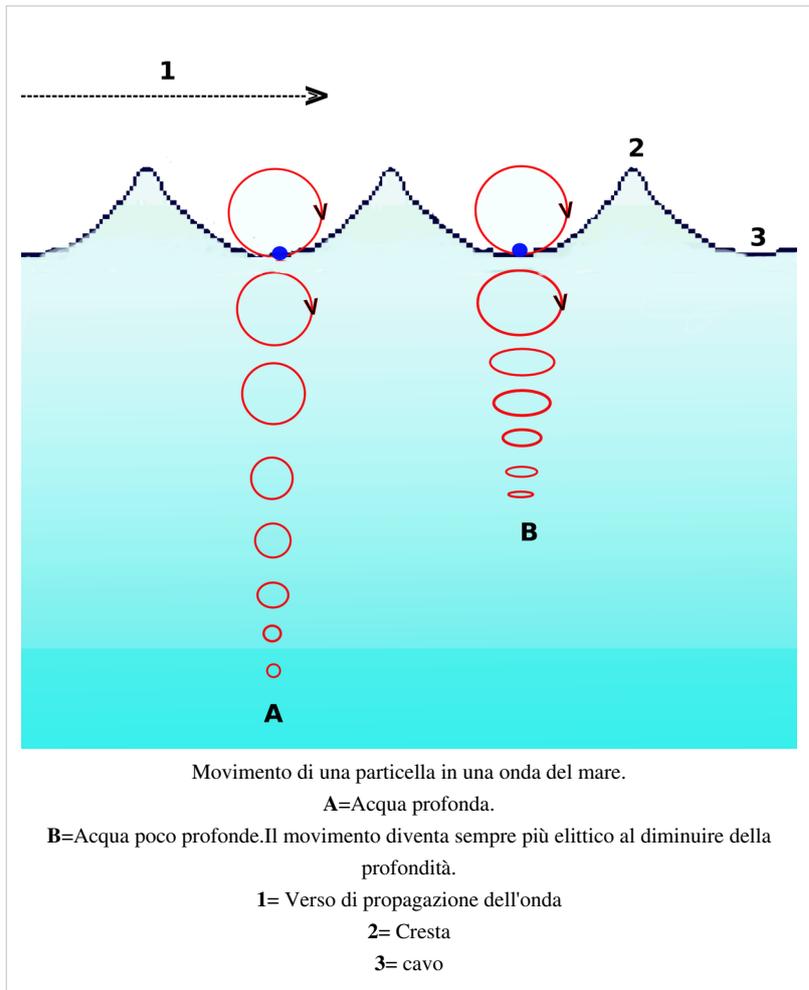
$\lambda$  = lunghezza d'onda;

$d$  = profondità del mare;

$g$  = accelerazione di gravità;

In acqua profonda, dove  $d \geq \frac{1}{2}\lambda$ , così che  $\frac{2\pi d}{\lambda} \geq \pi$  e la tangente iperbolica tende ad 1,  $v_m$ , è circa pari a

$1,25\sqrt{\lambda}$ . Tale espressione ci rivela come onde di differente lunghezza d'onda viaggino a differente velocità. Le onde più veloci sono quelle più lunghe. Per questo durante una tempesta le prime onde che arrivano sono quelle più



lunghe quindi le più alte.

La densità di energia (per unità di area) di una onda regolare sinusoidale dipende dalla densità dell'acqua  $\rho$ , l'accelerazione di gravità  $g$ , l'altezza dell'onda  $h$  che è eguale a due volte l'ampiezza  $a$  :

$$E = \frac{1}{8}\rho gh^2 = \frac{1}{2}\rho ga^2$$

La velocità con cui si propaga l'energia di una onda è la velocità di gruppo.

## Linea di trasmissione

---

### Linea di trasmissione

Consideriamo una linea elettrica uniforme, ad esempio un cavo coassiale, caratterizzata da una induttanza  $L_l$  per unità di lunghezza e da una capacità  $C_l$  per unità di lunghezza. La linea è alimentata in corrente alternata in maniera tale che in ogni tratto possiamo definire una corrente  $I(x, t)$  ed una differenza di potenziale  $V(x, t)$

Ai capi di ogni elemento infinitesimo lungo  $dx$  e quindi di induttanza  $dL = L_l dx$  vi sarà una caduta di potenziale, per la legge di Faraday:

$$dV_L = -\frac{\partial V}{\partial x} dx = -(L_l dx) \frac{\partial I}{\partial t} \quad (1)$$

Contemporaneamente, avendo l'elemento una capacità  $dC = C_l dx$  vi sarà un assorbimento corrente pari a:

$$dI_C = -\frac{\partial I}{\partial x} dx = -(C_l dx) \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2)$$

Differenziando parzialmente l'eq. 1 rispetto al tempo si ottiene:

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} = -L_l \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (3)$$

Mentre differenziando parzialmente la eq. 2 rispetto allo spazio si ha che:

$$-\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -C_l \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} \quad (4)$$

Quindi a causa del Teorema di Schwartz le due derivate miste nell'equazioni 3 e 4 sono eguali e quindi combinando le due equazioni si ha che:

$$-\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_l L_l \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (5)$$

Anche in questo caso si ha come soluzione l'equazione delle onde unidimensionali. Invertendo il procedimento, cioè differenziando la eq. 1 per lo spazio e la 2 per il tempo si sarebbe infatti ottenuta una equazione equivalente per la tensione:

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_l L_l \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (6)$$

Quindi in una linea di trasmissione non dissipativa (notiamo come nei conti si sia trascurata sia la resistenza di perdita lungo la linea (dovuta alla resistenza della linea) che quella in parallelo dovuta alle perdite del dielettrico. Con queste ipotesi lungo la linea di trasmissione le perturbazioni di corrente e tensione si propagano con una velocità pari a:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}$$

# Onde elettromagnetiche

---

## Onde Elettromagnetiche

### Dalle Equazioni di Maxwell all'equazione delle onde

Si parte dalle equazioni di Maxwell in forma differenziale viste precedentemente e si considera il caso in cui non vi sono cariche libere e non vi sono correnti elettriche. Trattiamo l'elettromagnetismo in assenza di materia.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Se facciamo il rotore della eq. 3 e sostituiamo al II membro l'eq.4 otteniamo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5)$$

Ma esiste una identità vettoriale, dato un qualsiasi campo vettoriale  $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Per cui il primo membro della equazione 5 può essere trasformato grazie a questa identità e al fatto che vale l'eq.1. Quindi l'eq. 5 diviene:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (6)$$

Senza nessun mezzo siamo arrivati a trovare che le equazioni di Maxwell permettono di avere un campo elettrico che si propaga nello spazio con una legge eguale a quella di tutte le onde. Analogamente dalla eq. 4 facendo il rotore e sostituendo l'eq. 3 al secondo membro:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (7)$$

Per cui il primo membro della eq.7 può essere trasformato grazie alla identità vettoriale di prima ed al fatto che vale l'eq.2. Quindi l'eq. 7 diviene:

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (8)$$

Ricordiamo come:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

è la velocità della luce nel vuoto.

La conclusione è che dalle equazioni di Maxwell è possibile ricavare un campo elettromagnetico che si propaga nel vuoto senza l'intervento di nessun mezzo. Fino al XIX secolo si ipotizzava che esistesse un mezzo (molto rigido e poco denso) attraverso cui si propagavano le onde elettromagnetiche: l'etere.

Non tutte le proprietà delle onde elettromagnetiche sono state ancora messe in luce, nel seguito cercheremo di evidenziare meglio tali proprietà.

### Proprietà elementari delle onde elettromagnetiche

La prima proprietà da mettere in evidenza è la natura trasversale delle onde elettromagnetiche infatti apparentemente dalle eq. 6 ed 8 abbiamo 6 componenti indipendenti del campo. In realtà se consideriamo un riferimento cartesiano e scegliamo localmente la direzione dell'asse delle  $x$  coincidente con la direzione di propagazione. Se la regione di spazio è sufficiente piccola solo le derivate spaziali nella direzione di propagazione sono nulle. In poche parole stiamo facendo l'ipotesi che l'onda sia localmente piana. Con queste ipotesi sempre verificabili in un ambito locale la eq. 1 diventa:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

La eq. 2:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

Le tre componenti dell'eq. 3:

$$0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (11)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (12)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (13)$$

Mentre le tre componenti dell'eq. 4

$$0 = \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (14)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (15)$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (16)$$

L'eq. 9 e 14 mostrano come la componente del campo elettrico nella direzione del moto non varia nello spazio e nel tempo, analogamente l'eq. 10 e 11 indicano che la componente del campo magnetico nella direzione del moto non varia nello spazio e nel tempo. In definitiva le uniche onde elettromagnetiche possibili sono trasversali cioè le uniche componenti da considerare sono quelle nella direzione  $y$  e  $z$ . Inoltre le eq. 12 e 13 (le eq. 15 e 16 non aggiungono niente) stabiliscono delle precise relazioni tra le componenti mutuamente perpendicolari del campo elettrico e

magnetico.

Infatti se ad esempio l'espressione della componente  $z$  della parte elettrica e magnetica dell'onda elettromagnetica mutuamente perpendicolari valgono:

$$E_z = f(x \pm ct) \quad B_y = g(x \pm ct)$$

Il segno  $\pm$  per indicare una onda regressiva o progressiva. Definendo  $\xi = x \pm ct$ ,  $f' = df/d\xi$ ,  $g' = dg/d\xi$ . Sostituita nella eq. 12:

$$f' = \mp cg'$$

Questa non è altro che una equazione differenziale che integrata semplicemente porta a:

$$\frac{E_z}{B_y} = \mp c$$

A meno di una costante additiva (che non ha interesse nel caso delle onde, l'esistenza di onde non nega la possibilità che nel vuoto ci siano campi elettrici e magnetici costanti). Analogamente usando la eq. 13:

$$\frac{E_y}{B_z} = \mp c$$

Questo indica che in una onda elettromagnetica vi sono solo due componenti indipendenti del campo ad esempio le componenti perpendicolari elettriche o le due componenti parallele elettriche e magnetiche.

## Onde Piane

Le più semplici onde (non solo elettromagnetiche) sono le onde piane monocromatiche. Lontani dalle sorgenti delle onde tutte le onde sono scomponibili nella somma di tali onde. Infatti nella trattazione fatta abbiamo ignorato come si producono le onde elettromagnetiche cioè le sorgenti. Questo è un argomento a parte che sarà trattato in seguito. Una onda elettromagnetica piana viene rappresentata per la parte elettrica da:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)$$

Dove  $\vec{E}_o$  è detta l'ampiezza dell'onda e nelle onde piane è costante,  $\varphi$  è la fase dell'onda,  $\vec{k}$  è il vettore d'onda che come per tutte le onde è diretto nella direzione di propagazione.

La parte magnetica dell'onda piana si ricava dalla relazione appena vista e qui indicata in maniera sintetica, indicando con  $\vec{c}$  il vettore velocità di propagazione dell'onda:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \vec{c} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Spesso si preferisce usare la rappresentazione esponenziale (indicando come si fa sempre in elettromagnetismo l'unità immaginaria con  $j = \sqrt{-1}$ ):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}$$

Si dimostra mediante la formula di Eulero che la parte reale della rappresentazione esponenziale di una onda piana coincide con la rappresentazione sinusoidale. Una onda piana è una onda che si propaga senza attenuazione, conservando quindi la sua ampiezza, non sfasandosi che in maniera assolutamente prevedibile ed è chiaramente una astrazione utile per la trattazione generale.

### Onde Sferiche

Consideriamo un altro caso importante quello in cui la sorgente e di conseguenza l'onda abbia una simmetria sferica. In questo caso l'equazione delle onde va riscritta in coordinate polari quindi ripartendo dalla equazione delle onde. Considerando la componente elettrica (ma sarebbe stata identico considerare la componente magnetica):

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Se l'onda è sferica, possiamo sostituire  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  con  $\vec{E}(r, t)$ , cioè è indipendente da  $\theta$  e  $\phi$ , ma anche l'espressione di  $\nabla^2$  si semplifica trasformando l'equazione delle onde in una forma unidimensionale:

$$\frac{\partial^2 [r\vec{E}(r, t)]}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 [r\vec{E}(r, t)]}{\partial t^2}$$

La soluzione più semplice, formalmente simile ad un'onda piana unidimensionale è:

$$r\vec{E}(r, t) = \vec{A}_o e^{j(kr - \omega t + \varphi)}$$

Quindi:

$$\vec{E}(r, t) = \frac{\vec{A}_o}{r} e^{j(kr - \omega t + \varphi)}$$

La grandezza costante vettoriale  $\vec{A}_o$  ha le dimensioni di campo elettrico per una lunghezza, quindi allontanandosi l'ampiezza del campo elettrico va con l'inverso della distanza dal centro della distribuzione. La caratteristica trasversale viene ovviamente mantenuta per cui la direzione di  $\vec{A}_o$  è perpendicolare alla direzione radiale.

## Il vettore di Poynting

L'equazioni di Maxwell ammettono come soluzioni le onde elettromagnetiche, le quali per la loro propagazione non necessitano di nessun mezzo.

Le onde elettromagnetiche trasportano energia come è chiaro nella esperienza pratica, e vedremo che posseggono anche quantità di moto. Per quantificare l'energia trasportata facciamo ricorso alle proprietà elementari della materia poco densa, quindi ci riferiamo a gas rarefatti o plasm. La trattazione potrebbe essere fatta in maniera più generale, ma si sarebbe dovute considerare la forma più generale delle equazioni di Maxwell in presenza di materia e questo appesantisce la trattazione. La materia ci serve qui per prevedere la presenza nel volume  $T$  attraversato dall'onda elettromagnetica di cariche libere  $q$  indipendenti l'una dall'altra. La forza di Lorentz agente su ogni singola carica  $q$  con velocità istantanea  $\vec{v}(t)$  sarà:

$$\vec{F} = q[\vec{E}(t) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(t)] \quad (17)$$

Indichiamo genericamente il campo elettromagnetico con  $\vec{E}(t)$  e  $\vec{B}(t)$ . La potenza media dissipata (la linea orizzontale sopra la formula indica tale operazione di media) da tale campo elettrico e magnetico variabile nel tempo sarà:

$$\overline{W} = \overline{q[\vec{E}(t) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(t)] \cdot \vec{v}(t)} = \overline{q\vec{E}(t) \cdot \vec{v}(t)} \quad (18)$$

Essendo ovviamente  $[\vec{v}(t) \times \vec{B}(t)] \cdot \vec{v}(t) \equiv 0$ . La potenza totale mediamente dissipata nel volume  $T$  dove sono presenti  $dN = n d\tau$  cariche,  $n$  è il numero di cariche per unità di volume ed  $d\tau$  è l'elemento di volume di  $T$ . L'operazione di integrazione se il volume è sufficientemente grande fa mediare la potenza, per cui elimino il segno di media:

$$\overline{W} = \int_N q\vec{E}(t) \cdot \vec{v}(t) dN = \int_T nq\vec{E}(t) \cdot \vec{v}(t) d\tau = \int_T \vec{E} \cdot \vec{J} d\tau \quad (19)$$

Tale equazione rappresenta una estensione della legge di Joule in forma differenziale. Dalla IV equazione (11) di Maxwell

$$W = \frac{1}{\mu_o} \int_T \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\tau - \epsilon_o \int_T \vec{E}(t) \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (20)$$

Date due grandezze vettoriali, in questo caso  $\vec{E}(t)$  e  $\vec{B}(t)$ , si può dimostrare esplicitando la divergenza ed il rotore che:

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

sostituendo l'ultima eguaglianza vettoriale nella eq.20 si ha che:

$$W = -\frac{1}{\mu_o} \int_T \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) d\tau + \frac{1}{\mu_o} \int_T \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\tau - \epsilon_o \int_T \vec{E}(t) \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (21)$$

Se sostituiamo nell'eq.21 la legge di Faraday in forma differenziale (10) di Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  si avrà che

la potenza media dissipata nel volume vale:

$$W = -\frac{1}{\mu_o} \int_T \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) d\tau - \frac{1}{\mu_o} \int_T \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\tau - \epsilon_o \int_T \vec{E}(t) \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (22)$$

Il primo integrale, mediante il teorema di Gauss, si può trasformare in un integrale esteso alla superficie  $S$  che delimita il volume  $T$ , mentre invertendo il segno di derivata temporale con il segno di integrale nel secondo e terzo termine e raggruppando si ha che:

$$W = - \int_S \left( \frac{1}{\mu_o} \vec{E} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{S} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_T \left( \frac{B^2}{\mu_o} + \epsilon_o E^2 \right) d\tau \right] \quad (23)$$

Il secondo termine è la variazione di energia elettrica e magnetica all'interno del volume (quindi niente di nuovo rispetto alla elettrostatica e la magnetostatica), mentre la grandezza nuova è il vettore di Poynting:

$$\vec{I} = \frac{1}{\mu_o} \vec{E} \times \vec{B}$$

che rappresenta la potenza trasportata dall'onda elettromagnetica per unità di superficie. Come si vede la direzione di  $\vec{I}$ , essendo mutuamente perpendicolare ai vettori trasversali, è lungo la direzione di propagazione dell'onda stessa. Le dimensioni del vettore di Poynting sono quindi quelle di una energia diviso un tempo ed una lunghezza al quadrato. La massima potenza dissipabile da un'onda elettromagnetica per ragioni di conservazione dell'energia è ovviamente proprio l'intensità del vettore di Poynting. Se si ha una sorgente puntiforme di onde elettromagnetiche, quindi l'onda ha una simmetria sferica, mentre l'intensità dei campi elettrici e magnetici dell'onda diminuiscono con  $1/r$ , l'intensità del vettore di Poynting diminuisce con il quadrato della distanza dalla sorgente. Questo garantisce che, se non viene assorbita l'onda, in condizioni stazionarie in tutte le sfere concentriche vi sia istante per istante la stessa energia e quindi l'espressione implica la conservazione dell'energia. Notiamo come nel ragionamento fatto sia stata la parte elettrica dell'onda che ha compiuto lavoro sulle cariche dissipando energia.

La quantità di moto trasportata da un'onda elettromagnetica, potrebbe in maniera formale ricavarsi in forma generale come è stato fatto per ricavare l'energia: il ragionamento sarebbe complicato dal fatto di dovere introdurre il tensore di Maxwell. Si può semplificare il ragionamento considerando il caso microscopico per un'onda progressiva che dissipa parte della energia interagendo con un insieme di cariche indipendenti. Questa ultima ipotesi è eguale a quella fatta precedente per ricavare l'energia media dissipata da un'onda elettromagnetica.

Quindi se consideriamo una superficie normale alla direzione di propagazione dell'onda  $\delta I$  in cui è presente una carica  $\Delta Q$  e se da tale superficie viene assorbita una frazione  $\Delta|I|$  della onda elettromagnetica che l'attraversa.

La potenza assorbita dalle  $\Delta N$  cariche sarà:

$$\Delta|I|\Delta S = \Delta Nq|v_E||E| \quad (24)$$

La forza media esercitata da tale onda sarà data da:

$$\overline{F(t)} = \Delta Nq\overline{E(t)} + \overline{qv(t) \times B(t)} = \Delta Nq\overline{v(t) \times B(t)} \quad (25)$$

Ma  $\vec{v}(t) = \vec{v}_E$ , e  $\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{c} \times \vec{E}$ , quindi possiamo scrivere che:

$$|v(t) \times B(t)| = \frac{|v_E||E|}{c}$$

con direzione eguale a quella dell'onda elettromagnetica stessa, quindi sostituendo tutte queste espressioni nella eq. 25 si ha che la pressione  $p$  vale:

$$p = \frac{\overline{F(t)}}{\Delta S} = \Delta Nq \frac{|v_E||E|}{c\Delta S}$$

Ma se sostituiamo in questa espressione la eq.24 si ha che:

$$p = \frac{|\Delta I|}{c} \quad (26)$$

Quindi la pressione esercitata dalla radiazione è pari alla variazione di intensità dell'onda elettromagnetica stessa. Quindi se venisse assorbita totalmente la pressione esercitata sarebbe:

$$p = \frac{|I|}{c}$$

Se invece fosse riflessa totalmente la pressione esercitata sarebbe:

$$p = \frac{2|I|}{c}$$

# Campi elettromagnetici nei dielettrici

## Campi elettromagnetici nei dielettrici

Se si riscrivono le equazioni di Maxwell in presenza di materia, immaginando che non vi siano né cariche libere né correnti di conduzione, si arriva anche nei dielettrici, cioè i materiali isolanti, ad una equazione delle onde:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (26)$$

La differenza è che la velocità della luce ha un valore inferiore a quello del vuoto:

$$c' = \frac{c}{n}$$

Infatti  $n$  chiamato indice di rifrazione è sempre maggiore di 1. Finché le onde elettromagnetiche hanno frequenze basse (minori di qualche 100 di MHz)  $n$  è semplicemente

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

Dove  $\epsilon_r$  è la costante dielettrica relativa (sempre maggiore di 1) e  $\mu_r$  è detta permeabilità magnetica relativa, che nella maggior parte delle sostanze è prossima all'unità. Quindi se consideriamo, ad esempio, l'acqua la quale ha una costante dielettrica relativa pari a 80, la velocità della luce per quanto riguarda le basse frequenze è circa 1/9 di quella nel vuoto.

A frequenze più alte, se si tiene in considerazione la spiegazione microscopica della costante dielettrica relativa, bisogna introdurre la polarizzazione del dielettrico. La Polarizzazione non risponde istantaneamente al campo elettrico presente localmente. Inoltre vi è un assorbimento delle onde elettromagnetiche da parte del dielettrico. Per tenere in conto di entrambi gli aspetti si introduce un indice di rifrazione complesso (indicato con un tilde):

$$\tilde{n} = n - j\kappa$$

Dove la parte reale determina la velocità (di fase) dell'onda alla frequenza considerata, mentre  $\kappa$  chiamato coefficiente di estinzione, dà un'idea di quanta parte dell'onda viene assorbita nell'attraversamento del mezzo. Sia  $n$  che  $\kappa$  dipendono dalla frequenza.

La variazione di  $n$  va sotto il nome di dispersione, fenomeno molto evidente in ottica ma presente in un vasto intervallo di frequenze. L'equazione microscopica che descrive l'azione del campo elettrico sui dipoli elementari di cui è fatta la materia è simile a quella di un oscillatore armonico forzato con un termine di smorzamento. Tale sistema ammette una frequenza di risonanza, al crescere della frequenza, fino a quando il materiale ha un assorbimento  $\kappa$ ,  $n$  tende a crescere. In corrispondenza della frequenza di risonanza dove  $\kappa$  è massimo  $n$  può diventare inferiore all'unità. In pratica si ha che ad esempio l'acqua alle frequenze ottiche ha un indice di rifrazione di appena 1.33 (invece di 9 come ci si aspetterebbe dal fatto che  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  essendo nell'acqua  $\epsilon_r = 80$ ).

Un semplice modello a livello atomico rende conto di cosa avviene. Consideriamo un atomo di numero atomico  $Z$ , immaginato come una sfera. In assenza di campo elettrico il centro delle cariche positive: nucleo coincide con il centro delle cariche negative (la distribuzione degli elettroni). Se applichiamo un campo elettrico esterno  $\vec{E}$  avrò che l'atomo si deformerà (molto debolmente) in quanto il campo elettrico esercita una azione eguale ed opposta sul nucleo e sugli elettroni: la deformazione  $\delta$  sarà proporzionale al campo elettrico applicato con una costante di proporzionalità  $\alpha$  dipendente dall'atomo considerato, in maniera tale che

$$\alpha \delta = Ze\vec{E}$$

Dove  $e$  è la carica elementare. Conoscendo la massa dell'atomo possiamo definire con

$$\omega_o^2 = \frac{\alpha}{m}$$

Cosicché la deformazione vale:

$$\vec{\delta} = \frac{Ze}{m\omega_o^2} \vec{E}$$

Quindi si ha che viene indotto un momento di dipolo pari a:

$$\vec{p} = Ze\delta = \frac{(Ze)^2}{m\omega_o^2} \vec{E}$$

Se quindi la densità di atomi per unità di volume vale  $N$  (non si usa il simbolo  $n$  per non fare confusione con l'indice di rifrazione):

$$\vec{P} = N \frac{(Ze)^2}{m\omega_o^2} \vec{E}$$

Quindi:

Essendo anche:

$$\vec{P} = \epsilon_o(\epsilon_r - 1)\vec{E}$$

si ha che:

$$\epsilon_r = 1 + N \frac{(Ze)^2}{\epsilon_o m \omega_o^2}$$

Tanto maggiormente gli atomi sono deformabili tanto maggiore sarà la costante dielettrica relativa, così al tendere di  $N$  a zero la costante dielettrica relativa tende ad 1. Se il campo elettrico è variabile nel tempo con una forma del tipo:

$$E = E_o e^{j\omega t}$$

Notare come per semplicità si sia considerato un caso unidimensionale, per cui si è ommesso il simbolo di vettore. L'equazione della dinamica è:

$$m\ddot{\delta} + m\gamma\dot{\delta} + m\omega_o^2\delta = ZeE_o e^{j\omega t}$$

L'equazione è formalmente eguale a quella di un oscillatore armonico forzato con un termine di smorzamento  $\gamma$ , che tiene conto delle perdite nel dielettrico. Se la soluzione per  $\delta$  è del tipo:

$$\delta = \delta_o e^{j\omega t}$$

che sostituita nell'equazione della dinamica si traduce in:

$$-m\omega^2\delta_o + j\omega m\gamma\delta_o + m\omega_o^2\delta_o = ZeE_o$$

da cui:

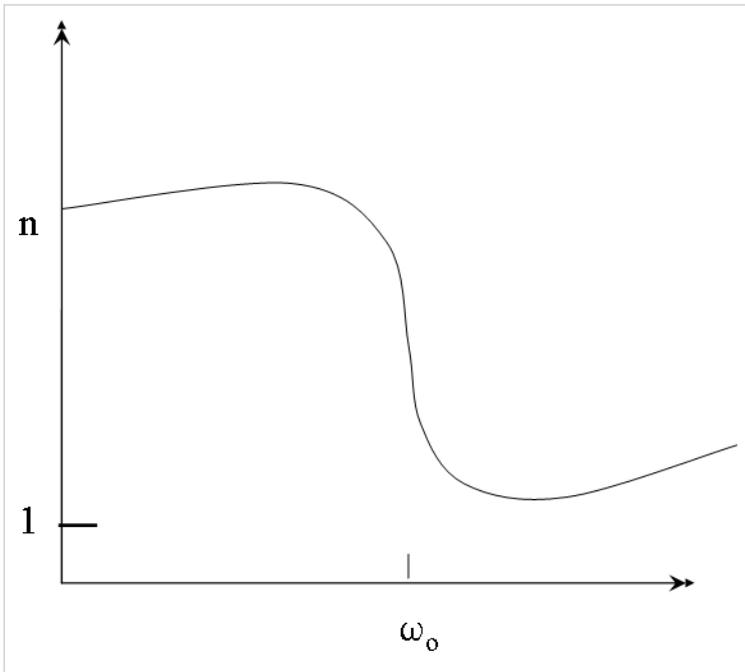
$$\delta_o = \frac{ZeE_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2 + j\omega\gamma)}$$

Ripetendo il ragionamento precedente, mutatis mutandis, si ha che:

$$\vec{P} = N \frac{(Ze)^2}{m(\omega_o^2 - \omega^2 + j\omega\gamma)} \vec{E}$$

quindi la costante dielettrica relativa è complessa e la sua espressione è:

$$\epsilon_r = 1 + N \frac{(Ze)^2}{\epsilon_o m (\omega_o^2 - \omega^2 + j\omega\gamma)}$$



Di conseguenza anche l'indice di rifrazione è complesso e vale:

$$\tilde{n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = n - j\kappa$$

Con

$$n = 1 + \frac{N(Ze)^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{\epsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2]}$$

$$\kappa = \frac{N(Ze)^2 \gamma \omega}{2\epsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2]}$$

Il loro comportamento è mostrato nelle figure a fianco.

Quindi in corrispondenza della frequenza di risonanza si ha che la velocità della luce aumenta, ma contemporaneamente aumenta vistosamente l'assorbimento.

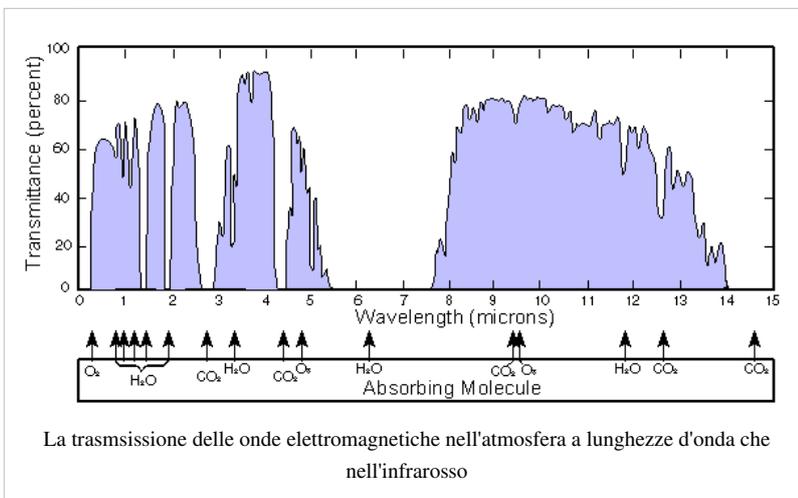
La rappresentazione esponenziale rende

meglio conto del significato di  $n$  e  $\kappa$ . Nella rappresentazione esponenziale possiamo scrivere una onda piana monodimensionale propagantesi sull'asse delle  $x$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega(t-x/v)}$$

Ora se al posto di  $v$  sostituiamo  $c/\tilde{n}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega[t - (n-j\kappa)x/c]} = \vec{E}_0 e^{-\omega\kappa x/c} e^{j\omega(t-nx/c)}$$



Il termine  $\omega\kappa/c$  detto coefficiente di assorbimento ha le dimensioni di una lunghezza alla -1. Tanto maggiore è il suo valore più rapidamente si estingue l'ampiezza dell'onda attraversando il mezzo.

La figura mostra l'opacità dell'atmosfera nel vicino infrarosso (lunghezze d'onda tra 14 microns e 700 nm). L'opacità è una misura del coefficiente di assorbimento. Le varie specie presenti nell'atmosfera hanno caratteristiche frequenze di risonanza.

# Campi elettromagnetici nei conduttori

## Campi elettromagnetici nei conduttori

Se si riscrivono le equazioni di Maxwell in presenza di conduttori bisogna tenere conto della legge di Ohm che stabilisce che :

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad (1)$$

Questo implica che la IV equazione di Maxwell, aggiungendo la possibilità che vi sia una densità di corrente elettrica, diventa:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_o}{\rho} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

Da tale equazione, con passaggi simili a quelli fatti nel vuoto si ricavano, l'equazione delle onde, per il campo elettrico, con in più la presenza di un termine aggiuntivo:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\mu_o}{\rho} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

ed analogamente per il campo di induzione magnetica:

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \frac{\mu_o}{\rho} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

Limitiamo le considerazioni al caso unidimensionale di una onda e.m. piana che incide sulla superficie del conduttore in questo caso l'equazione di una delle componenti normali del campo elettrico (eliminiamo il simbolo di vettore) nel conduttore diviene:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\mu_o}{\rho} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (5)$$

Una soluzione possibile vale:

$$f(x, t) = Ae^{j(kx - \omega t)}$$

Con  $k$  complessa, sostituendo tale soluzione generica nella (5) si ha:

$$-k^2 Ae^{j(kx - \omega t)} = \frac{\omega^2}{c^2} Ae^{j(kx - \omega t)} - j\omega \frac{\mu_o}{\rho} Ae^{j(kx - \omega t)}$$

$$-k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega \frac{\mu_o}{\rho}$$

Ponendo  $k = k_1 + jk_2$

$$-k_1^2 - 2jk_1k_2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega \frac{\mu_o}{\rho}$$

Eguagliando i termini immaginari e reali:

$$2k_1k_2 = -\omega \frac{\mu_o}{\rho}$$

$$-k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Se:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \ll \omega \frac{\mu_o}{\rho}$$

$$\omega \ll \frac{c^2 \mu_o}{\rho}$$

Praticamente qualsiasi frequenza per conduttori con resistività ragionevolmente bassa, di conseguenza:

$$k_1 \approx -k_2$$

$$2k_2^2 \approx \omega \frac{\mu_o}{\rho}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\omega \mu_o}{2\rho}}$$

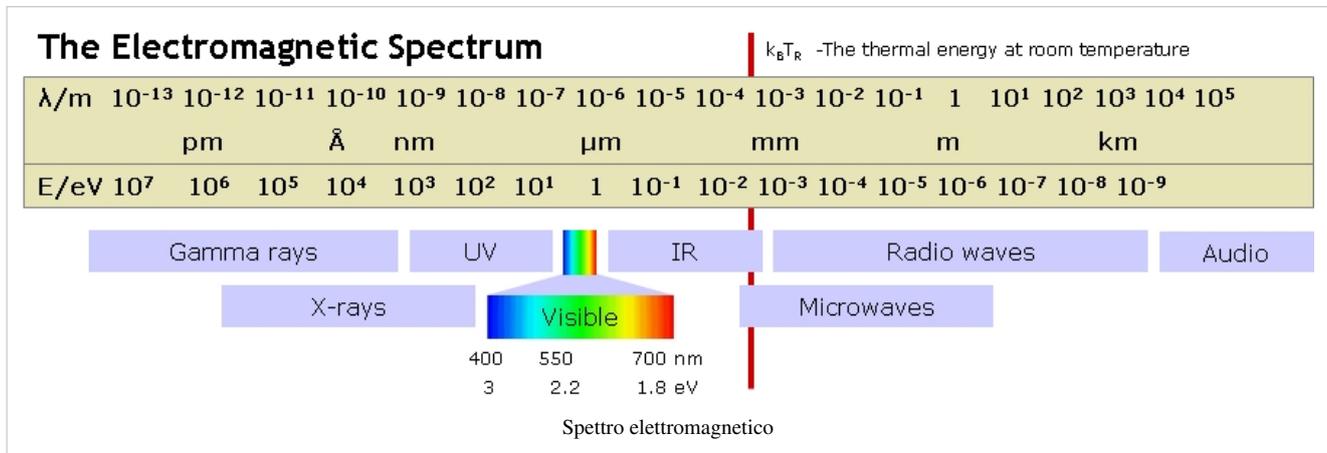
Se chiamiamo lo spessore (*skin depth*)  $\delta = 1/k_2$  si ha che:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega \mu_o}}$$

Quindi il campo elettrico all'interno dei conduttori ha l'espressione:

$$E(x, t) = E_o e^{-x/\delta} e^{-j(x/\delta + \omega t)} \quad (6)$$

## Spettro delle onde elettromagnetiche



Lo spettro delle onde elettromagnetiche, o semplicemente spettro, è l'intervallo di tutte le possibili radiazioni elettromagnetiche. La figura mostra tutte le possibili radiazioni dalle più brevi ed energetiche, i raggi gamma, alle più lunghe, le onde radio. Secondo la descrizione quantistica della radiazione, ad un'onda elettromagnetica è associata un valore preciso di energia, il quale dipende dalla frequenza di oscillazione dell'onda, secondo la nota relazione di Planck. Esiste un limite fisico alle lunghezze d'onda possibili: il limite superiore è dato dalle dimensioni dell'Universo, cioè non possono esistere radiazioni con lunghezza d'onda maggiori dell'universo, il limite inferiore è invece rappresentato dalla lunghezza di Planck.

Tipo di radiazione elettromagnetica	Frequenza	Lunghezza d'onda
LF	30 kHz – 300 kHz	10 km – 1 km
MF	300 kHz – 3 MHz	1 km – 100 m
HF	3 MHz – 30 MHz	100 m – 10 m
VHF	30 MHz – 300 MHz	10 m – 1 m
UHF	300 MHz – 3 GHz	1 m – 10 cm
Microonde	3 GHz – 300 GHz	10 cm – 1 mm
Infrarossi	300 GHz – 428 THz	1 mm – 700 nm
Luce visibile	428 THz – 749 THz	700 nm – 400 nm
Ultravioletti	749 THz – 30 PHz	400 nm – 10 nm
Raggi X	30 PHz – 300 EHz	10 nm – 1 pm
Raggi gamma	> 300 EHz	< 1 pm

## Onde Radio

Le frequenze inferiori a 3 GHz vengono chiamate genericamente onde radio. Sono le frequenze generalmente utilizzate nelle telecomunicazioni di tecnologia più datata come la radiofonia e la televisione, ma anche nella più recente telefonia mobile e le comunicazioni senza fili.

Le onde VHF e UHF si propagano praticamente senza assorbimento nell'atmosfera. Le frequenze HF invece sono riflesse dalla ionosfera e per questo sono utilizzate dai radioamatori per le comunicazioni su grande distanza.

Le onde radio sono generate e captate da antenne la cui dimensione è dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda da emettere o rivelare.

Il contenuto di informazione trasportabile da una onda elettromagnetica è tanto maggiore quanto maggiore è la frequenza di oscillazione dell'onda. La generazione di onde radio di frequenze via via più alte è una tendenza naturale delle telecomunicazioni, che ha comportato una crescente complessità tecnologica. Generare un segnale alternato di qualche KHz è facile anche con dispositivi conosciuti all'inizio del XX secolo. Via via che cresce la frequenza la complessità dei dispositivi elettronici cresce.

## Microonde

Anche se ufficialmente le microonde sono al di sopra dei 3 GHz, nel linguaggio comune frequenze superiori a 1 GHz vengono dette microonde. La differenza sostanziale tra le microonde e le onde radio è la maggior frequenza propria e quindi, un diverso meccanismo di interazione con la materia. Secondo la meccanica quantistica, infatti, onde elettromagnetiche a diversa frequenza (e quindi diversa energia), vengono assorbite eccitando diversi stati energetici del materiale attraverso cui passano. Le onde radio attraversano inalterate la maggior parte della materia perché la piccola energia da esse trasportate può eccitare soltanto gli spin nucleari, i cui stati energetici sono separati soltanto in presenza di campo magnetico. Le microonde invece eccitano gli stati rotazionali della materia: un tipico forno a microonde, che opera alla frequenza di 2.45 GHz, è in grado di fare ruotare le molecole d'acqua contenute all'interno dei cibi. Questa rotazione, smorzata dall'attrito col mezzo circostante, permette di riscaldare in modo efficiente gli alimenti. Le microonde hanno trovato come primo uso il campo militare, infatti il Radar è stata la prima grossa applicazione delle microonde. Non è un caso che il primo forno a microonde sia stato fabbricato nel 1947 proprio dalla Raytheon, una delle principali ditte che produce Radar. Molte molecole atmosferiche, oltre all'acqua, possiedono frequenze di risonanza nello spettro delle microonde: la propagazione delle microonde nell'atmosfera è quindi fortemente influenzata da tale fattore. Per questo gli enti che sfruttano le microonde per le telecomunicazioni civili, devono solitamente scegliere opportune frequenze dello spettro, dette "finestre", in modo che il segnale

trasmesso non venga assorbito dall'atmosfera. La generazione di microonde era inizialmente ottenuta mediante tubi a vuoto, tuttora utilizzati in applicazioni che richiedano elevata potenza di trasmissione. Esempi di tali generatori sono i magnetron ed i klystron. Attualmente per applicazioni di bassa potenza esistono vari tipi di dispositivi a stato solido.

## Infrarosso

L'infrarosso trae il suo nome dal fatto che rappresenta le frequenze di valore minore a quella del rosso (ma superiore alle microonde). In realtà l'intervallo comprende radiazioni che hanno un comportamento molto differente. La parte vicina allo spettro visibile detta NIR (near infrared) ha un comportamento simile alla luce, mentre la parte bassa FIR (far infrared) ha un comportamento simile alle microonde. Mentre le microonde possono nella parte bassa dello spettro essere ancora prodotte da circuiti elettrici oscillanti, per l'infrarosso a frequenze più elevate ciò non è più possibile.

L'energia trasportata dalle radiazioni infrarosse è in grado di eccitare gli stati vibrazionali della materia. Poiché questi sono particolarmente rilevanti nella materia allo stato solido, la maggior parte della radiazione infrarossa passa inalterata attraverso l'atmosfera, e soltanto una piccola parte di essa è assorbita dalle molecole atmosferiche. L'effetto serra è un caso particolare in cui la radiazione infrarossa emanata dagli oggetti al suolo, riscaldati dal sole, non riesce a sfuggire nello spazio perché vi è una concentrazione troppo elevata di determinate molecole in atmosfera, in particolare l'anidride carbonica.

La sorgente più semplice e naturale di infrarossi sono i corpi caldi, infatti tutti i corpi emettono naturalmente onde elettromagnetiche con un spettro caratteristico che dipende essenzialmente dalla loro temperatura, la cosiddetta radiazione di corpo nero. La curva di emissione a campana molto stretta che ha un'ampiezza massima ad una lunghezza d'onda:

$$\lambda \approx \frac{2.9 \cdot 10^{-3}}{T}$$

Dove  $T$  è la temperatura espressa in gradi K, mentre la lunghezza d'onda è data in m. Dalla formula appare chiaro come fino a quando le temperature sono comprese tra circa 5 K e 3000 K, tale ampiezza massima cade proprio nell'infrarosso.

Infrarossi come la luce visibile possono essere prodotti ed assorbiti da fenomeni più squisitamente legati alla quantizzazione dei livelli energetici degli atomi. In genere tali fenomeni sono più caratteristici della parte dello spettro a più alta frequenza fino ai raggi X: ma alle frequenze degli infrarossi si hanno i primi salti energetici. Una particolarità degli infrarossi è che alcune sostanze che nel visibile appaiono scure come il silicio o il germanio sono per gran parte della banda infrarossa assolutamente trasparenti. Il coefficiente di assorbimento di tali materiali, semiconduttori, varia di molti ordini di grandezza in un piccolissimo intervallo di frequenze che cade nella parte alta degli infrarossi, il cosiddetto vicino infrarosso (NIR). Per dare una idea 7 mm di Silicio dimezzano l'ampiezza di infrarossi di 1030 nm, per avere lo stesso effetto con onde di 826 nm sono sufficienti 1400 nm di Silicio, mentre a 620 nm sono sufficienti appena 70nm di Silicio.

La generazione di infrarossi nella regione NIR a spettro molto stretto viene fatta mediante dispositivi a stato solido quali i LED ed i Laser.

Secondo le conoscenze attuali non si conoscono effetti dannosi sul corpo umano delle radiazioni infrarossa (come anche di ogni altra frequenza inferiore). L'unico effetto noto è l'assorbimento di tali radiazioni da parte di tessuti che si scaldano. Il fenomeno può avere effetti negativi per particolari organi come l'occhio: la cornea oculare è infatti un tessuto dotato di scarsissima irrorazione sanguigna. Pertanto non è in grado di dissipare efficacemente il calore che può essere trasmesso da una radiazione infrarossa ad elevata potenza come quella di un laser. L'esposizione frequente a sorgenti IR ad elevata potenza è infatti spesso correlata all'insorgenza di cataratta.

## Luce visibile

La regione visibile dello spettro elettromagnetico è l'unico intervallo di frequenze per cui l'occhio umano è sensibile. A radiazioni visibili di diversa lunghezza d'onda (e quindi frequenza) corrispondono tutti i diversi colori dell'arcobaleno. Vi è una quasi perfetta coincidenza tra la sensibilità dell'occhio umano e la radiazione emessa dal sole. Infatti la radiazione di corpo nero del sole è quella di un corpo alla temperatura di 5700 K, e tale temperatura ha un picco ad una lunghezza d'onda di 550 nm (il colore blu-verde dello spettro visibile). L'occhio umano ha la massima sensibilità a tale lunghezza d'onda e tale sensibilità diminuisce rapidamente sia per lunghezze d'onda più corte (violetto), sia per quelle più lunghe (rosso). La luce visibile è in grado di eccitare gli stati energetici elettronici. Se un oggetto è colorato ciò è dovuto essenzialmente al fatto che gli atomi o le molecole della superficie dell'oggetto possono assorbire una parte (certe lunghezze d'onda) della luce che li investe portando gli elettroni a livelli energetici più alti. Il colore specifico che l'oggetto assume dipende dal materiale superficiale ed è determinato dalle regole di addizione e sottrazione dei colori: è infatti la luce non assorbita che, rimbalzando sull'oggetto, arriva all'occhio umano che in seguito decodifica e assegna il colore all'oggetto.

## Ultravioletto

Nella parte successiva dello spettro vengono gli Ultravioletti indicati con l'acronimo UV. Le frequenze al di sopra del visibile manifestano molto chiaramente il carattere quantistico della radiazione elettromagnetica. La radiazione UV ha energia sufficiente a spezzare legami molecolari e ionizzare parzialmente gli atomi. Gli effetti dannosi sul corpo umano di tali radiazioni sono ben note in quanto tali radiazioni non solo provocano bruciate, ma possono causare danni irreparabili ai tessuti del corpo umano. Il sole emette, principalmente luce visibile, ma anche una certa quantità di UV. Gli UV rappresentano una percentuale minima della radiazione totale emessa dal sole; purtroppo se non avessimo lo schermo naturale dell'atmosfera e dei gas come l'ozono, la quantità di radiazione che arriverebbe non sarebbe compatibile con la vita umana.

Una parte della radiazione ultravioletta è essenziale in alcuni processi biologici, quale la produzione di Vitamina D. Inoltre viene utilizzata con successo in alcune terapie antibatteriche quali la sterilizzazione.

Il coefficiente di assorbimento degli UV è molto grande per quasi tutti i materiali, ad esempio il vetro di buona qualità che è molto trasparente nel visibile negli UV è estremamente assorbente: lo spessore del parabrezza di una autovettura è sufficiente ad eliminare praticamente tutta la radiazione UV del sole. Solo il quarzo ha un coefficiente di assorbimento più piccolo per la parte dello spettro UV a più bassa frequenza. A lunghezze d'onda inferiori a 200 nm il quarzo, ma anche l'aria (a causa dell'ossigeno presente) assorbe fortemente gli UV.

Gli UV sono utilizzati molto nella microelettronica, proprio a causa della lunghezza d'onda estremamente piccola, ma trovano applicazioni anche in alcune tecniche diagnostiche.

Gli UV nella parte bassa dello spettro (400-300 nm) sono prodotti mediante scariche in gas a bassa pressione in tubi di quarzo. Nella parte più alta dello spettro con tecniche simili ai raggi X.

## Raggi X

I raggi X sono stati scoperti solo alla fine del XIX secolo (differentemente dagli ultravioletti noti da un secolo prima).

La ragione è che la loro produzione non è semplice. Infatti vengono principalmente prodotti bombardando dei bersagli metallici con elettroni di alta energia e quindi che viaggiano in un vuoto spinto. I raggi X prodotti dipendono sia dall'energia degli elettroni incidenti, ma anche dal bersaglio. Infatti la componente continua ha una intensità tanto maggiore quanto maggiore è il numero atomico ma l'energia dei raggi X non eccede quella degli elettroni incidenti. La componente continua è dovuta alla radiazione di decelerazione degli elettroni. Vi è inoltre una componente discreta è dovuta al fatto che nell'urto vengono strappati gli elettroni più profondi del bersaglio e nel ristabilirsi della condizione di equilibrio, transizione degli elettroni esterni nei livelli profondi liberati, vengono emessi raggi X con la

frequenza corrispondente alla differenza di energia tra i due livelli. Quindi se usiamo Ferro riusciamo a produrre righe di raggi X tra 0.17 nm e 0.19 nm (4 righe), mentre se usiamo Molibdeno avremo raggi X tra 0.063 nm e 0.071 nm.

Attualmente mediante radiazione di sincrotrone si riescono a produrre con notevole intensità e controllabilità sia raggi X che radiazione UV.

L'utilizzazione più importanti dei Raggi X, fin dalla loro scoperta, sono state in radiografia e cristallografia. In radiografia si sfrutta l'assorbimento diverso dei vari tessuti profondi del corpo umano. In cristallografia si sfrutta il fatto che i raggi X hanno una lunghezza d'onda paragonabile alla distanza tra gli atomi di un reticolo cristallino, e quindi l'immagine di diffrazione permette di conoscere la struttura atomica dei solidi.

Il corpo umano è abbastanza trasparente ai raggi X, pur tuttavia nell'attraversare il corpo umano ionizzano gli atomi presenti danneggiando in maniera irreversibile anche i tessuti profondi. Sono quindi classificati tra le radiazioni ionizzanti dannose all'organismo. Il danno provocato dai raggi X è peggiore di quello degli UV in quanto agisce a maggiore profondità e i raggi X hanno una energia per fotone maggiore. Schermi metallici spessi sono una buona protezione per radiazioni di tale tipo.

### **Raggi gamma**

I raggi gamma rappresentano le lunghezze d'onda più brevi dello spettro delle onde elettromagnetiche. I raggi gamma sono prodotti da reazioni che avvengono all'interno del nucleo atomico. Vi è una parziale sovrapposizione tra raggi gamma e raggi X: in quanto i livelli energetici degli elettroni di atomi di grande numero atomico possono eccedere l'energia atomica. Il potere penetrante dei raggi gamma è in genere molto maggiore di quello dei raggi X. Per questo per la protezione di tali radiazioni si usano materiali ad alto peso atomico (tipo il piombo), tanto per dare una idea se 1 cm di Piombo dimezza i raggi gamma è necessario uno spessore di 6 cm di cemento per produrre lo stesso effetto. I raggi gamma vengono prodotti nel decadimento di isotopi radiattivi, non esistono altri metodi sulla terra per produrre tali radiazioni. Gli effetti sulla materia vivente dei raggi gamma sono molto peggiori dei raggi X a parità di intensità a causa della maggiore energia dei fotoni. Infatti la perdita di energia dei raggi gamma può avvenire in maniera più distruttiva per i tessuti che la semplice ionizzazione. Possono prodursi isotopi radiattivi, coppie di particelle ed elettroni secondari energetici mediante effetto Compton.

# Ottica

## La luce

Lo **spettro visibile** è quella parte dello spettro elettromagnetico che cade tra il rosso e il violetto, come mostrato nella figura a fianco, che mostra la sensibilità dell'occhio umano.

La lunghezza d'onda della luce visibile va tra 400nm a 700nm. La sensibilità dell'occhio, massima attorno ai 555nm, dove si trova il colore verde, è ben adattata alla radiazione emessa dal sole.

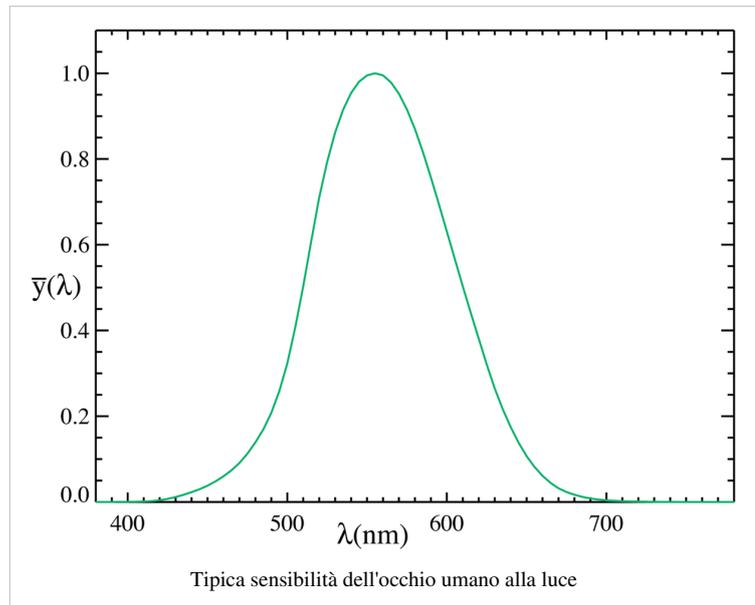
L'ottica si occupa della parte dello spettro visibile. Di tutte le branche dell'elettromagnetismo l'ottica è quella più sviluppata.

Il fatto che la lunghezza d'onda della luce sia molto piccola rispetto in genere alle dimensioni degli oggetti che incontra e degli strumenti usati per il suo studio permette di fare delle notevoli semplificazioni per la sua propagazione nei mezzi materiali. Tale approssimazione va sotto il nome di ottica geometrica. Il raggio, cioè la linea tracciata nella direzione in cui viaggia la luce, rappresenta l'elemento essenziale di tale trattazione. L'**ottica geometrica** permette di studiare la propagazione della luce indipendentemente dalla ipotesi della natura della luce stessa.

Quando non si può trascurare il carattere ondulatorio della luce si utilizza invece un formalismo più generale basato sulle equazioni di Maxwell: in questo caso si parla di **ottica ondulatoria**.

Infine se non è trascurabile il carattere quantistico delle onde si parla di **ottica quantistica**, che è la teoria più generale che comprende come caso particolare gli altri, ma anche la più complessa.

Tuttavia, nella maggior parte dei fenomeni ottici l'approccio della ottica geometrica è quello che più facilmente descrive il comportamento della luce.



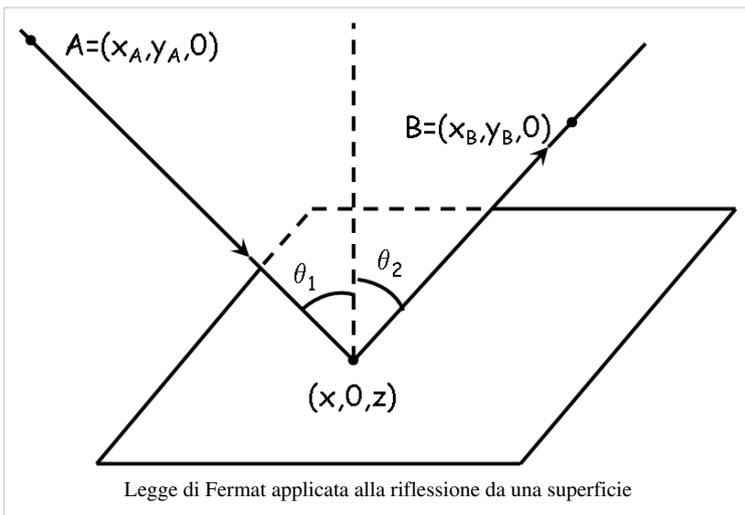
# Leggi dell'ottica geometrica

L'ottica geometrica è stata formulata a metà del XVII secolo da Fermat a partire da un semplice principio:

*Fra tutti i cammini possibili la luce sceglie sempre il cammino (detto cammino ottico) che richiede il più breve cammino per essere percorso.*

Da tale legge derivano le due leggi fondamentali dell'ottica geometrica: la legge della riflessione e della rifrazione.

## Riflessione



Usiamo il teorema di Fermat per derivare le leggi della riflessione.

Immaginiamo di volere andare da un punto A ad un punto B, disposti come in figura cioè riflettendo sulla superficie piana S. Indichiamo con  $(x_A, y_A, 0)$ ,  $(x_B, y_B, 0)$  le coordinate dei punti A e B. Scegliamo il piano x,y passante per i punti A e B (per questo la terza coordinata è nulla). Scegliamo inoltre l'asse delle y passante per il punto di incidenza  $(x,0,z)$  da determinare. Il tempo impiegato dalla luce nel mezzo in cui si propaga con velocità c' sarà:

$$t = \frac{\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2 + z^2}}{c'} + \frac{\sqrt{(x-x_B)^2 + y_B^2 + z^2}}{c'}$$

Se deriviamo la derivata rispetto a z di tale equazione e la poniamo eguale a zero (troviamo lo z per cui la funzione ha un minimo, che sia un minimo davvero lo rivela la derivata seconda). Il valore della derivata prima posta eguale a 0:

$$z \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_B)^2 + y_B^2 + z^2}} \right) = 0$$

Essendo il termine dentro parentesi sempre maggiore di 0, la somma degli inversi di due distanze, occorre che  $z=0$ . Quindi i raggi incidente e riflesso sono contenuti nel piano individuato dal raggio incidente e dalla normale alla superficie passante per il punto di incidenza. Quindi l'equazione sul tempo totale diviene:

$$t = \frac{\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2}}{c'} + \frac{\sqrt{(x-x_B)^2 + y_B^2}}{c'}$$

Derivando nella sola variabile x rimasta e annullandola si ha che:

$$\frac{x-x_A}{\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2}} + \frac{x-x_B}{\sqrt{(x-x_B)^2 + y_B^2}} = 0$$

Dalla costruzione geometrica il primo termine è il seno dell'angolo  $\theta_1$ , l'angolo che forma il raggio incidente con la normale al piano passante per il punto di incidenza. Mentre il secondo termine è il seno cambiato di segno, dell'angolo che il raggio riflesso forma con la normale al piano:

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2$$

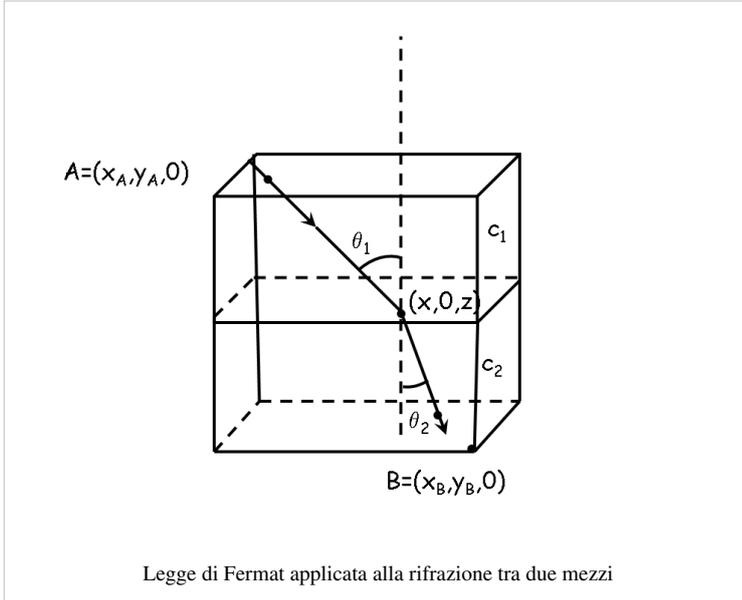
e quindi:

$$\theta_1 = \theta_2$$

**La legge della riflessione:** *L'angolo di incidenza e di riflessione sono eguali.*

L'ipotesi di superficie piana non è strettamente necessaria: anche una superficie scabra una regione sempre più piccola può essere approssimata ad una superficie piana.

**Rifrazione**



Usiamo il teorema di Fermat per derivare le leggi della rifrazione.

Quando un raggio di luce attraversa la superficie di separazione tra due mezzi diversi trasparenti con velocità della luce  $c_1$  e  $c_2$ . Cioè studiamo la rifrazione come mostrato nella figura a fianco. Come per le leggi della riflessione, supponiamo che la separazione tra i due mezzi sia piana.

Indichiamo con  $(x_A, y_A, 0)$ ,  $(x_B, y_B, 0)$  le coordinate dei punti A e B. Scegliamo il piano x,y passante per i punti A e B (per questo la terza coordinata è nulla). Scegliamo inoltre l'asse delle y passante per il punto di incidenza  $(x,0,z)$  da determinare. Il tempo totale impiegato dal

raggio per andare dal punto A e B sarà:

$$t = \frac{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2 + z^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2 + z^2}}{c_2}$$

Se deriviamo la derivata rispetto a z di tale equazione e la poniamo eguale a zero (troviamo lo z per cui la funzione ha un minimo, che sia un minimo davvero lo rivela la derivata seconda). Il valore della derivata prima posta eguale a 0:

$$z \left( \frac{1}{c_1 \sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2 + z^2}} + \frac{1}{c_2 \sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2 + z^2}} \right) = 0$$

Essendo il termine dentro parentesi sempre maggiore di 0, la somma degli inversi di due distanze, occorre che  $z=0$ . Quindi i raggi incidente e rifratto sono contenuti nel piano individuato dal raggio incidente e dalla normale alla superficie passante per il punto di incidenza.

Quindi l'equazione sul tempo totale si riduce a:

$$t = \frac{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}}{c_2}$$

Derivando nella sola variabile x rimasta e annullandola si ha che:

$$\frac{x - x_A}{c_1 \sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} + \frac{x - x_B}{c_2 \sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}} = 0$$

da cui:

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}$$

ossia:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2} = n_{1,2}$$

Dove  $n_{1,2}$ , il rapporto tra le velocità della luce nei due mezzi, è detto indice di rifrazione reale dei due mezzi.

**La legge della rifrazione:** *Il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza ed il seno dell'angolo di rifrazione è costante ed eguale all'indice di rifrazione relativo dei due mezzi.*

Notiamo che se  $n_{1,2} < 1$ , l'angolo di rifrazione sarà maggiore dell'angolo di incidenza; esisterà dunque un angolo  $\theta_1$  tale che  $\theta_2 = 90^\circ$  quindi:

$$\sin \theta_1 = n_{1,2}$$

Tale angolo è detto *angolo limite*. Infatti, per un angolo di incidenza superiore a tale valore non vi è nessun raggio diffratto.

Tale fenomeno, su cui si basa la propagazione della luce nelle fibre ottiche, è chiamato riflessione totale.

Anche la spiegazione fisica del miraggio è basata su tale fenomeno. Esso si verifica quando i raggi del Sole incontrano uno strato d'aria più calda rispetto agli strati sovrastanti dove l'aria più fredda e di densità maggiore. Così i raggi di luce subiscono una riflessione totale ed è possibile vedere le immagini come se fossero veramente riflesse al suolo.

## Lenti e specchi

Le leggi della riflessione e della rifrazione sono perfettamente simmetriche. In realtà le leggi della rifrazione contengono le leggi della riflessione. La riflessione si può definire come una rifrazione tra due mezzi il cui indice di rifrazione relativo vale  $n_{1,2} = -1$ . In genere tutte le leggi degli specchi e delle lenti conservano tale simmetria.

### Specchi

È possibile mostrare geometricamente che, data una sorgente di luce sull'asse di uno specchio sferico concavo, se si considerano raggi parassiali, cioè quelli che formano angoli molto piccoli con l'asse dello specchio (la normale passante per il centro. In base alla proprietà che un angolo esterno di un triangolo è eguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti, dalla costruzione geometrica si ha:

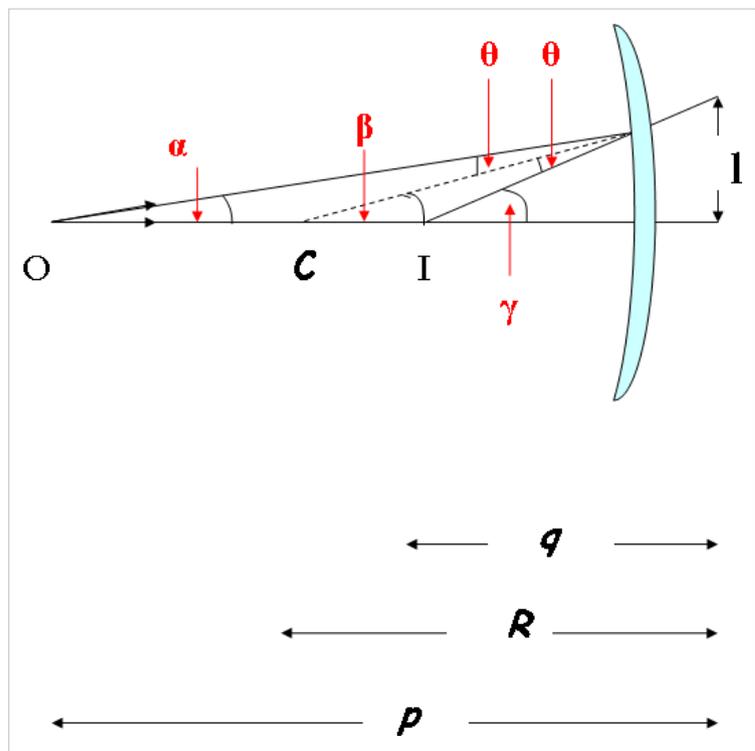
$$\alpha + \theta = \beta$$

$$\gamma = \alpha + 2\theta$$

Eliminando  $\theta$  dalle due equazioni si ha che:

$$\alpha + \gamma = 2\beta$$

Essendo i raggi parassiali posso confondere il seno e la tangente dell'angolo con il valore dell'angolo stesso. Dalla costruzione geometrica:



$$\frac{l}{p} + \frac{l}{q} = 2\frac{l}{R} = \frac{1}{f}$$

da cui:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

La derivazione è stata fatta per  $p > R/2$ . Se  $p < R$ , non vi è nessun punto in cui i raggi convergono, ma convergono i prolungamenti immaginari dei raggi dietro lo specchio. La formula è sempre valida, ma  $q$  in tal caso è negativo, cioè al di là dello specchio ( si parla quindi di immagine virtuale). Notiamo la convenzione qui usata che  $p$  e  $q$  (non è l'unica in alcuni testi si usa la stessa convenzione per specchi e lenti), se sono dal lato dello specchio sono positivi, mentre al di là sono negativi.

Se lo specchio è convesso la formula vale nella stessa maniera, ma  $R$  diviene negativo (per convenzione).

Come si nota nella formula vi è completa simmetria tra  $p$  ed  $q$ . Si definisce fuoco  $f = R/2$ , il punto in cui convergono i raggi paralleli parassiali (cioè provenienti da distanza infinita) all'asse dello specchio o in generale all'asse ottico. Tale definizione di fuoco vale per qualsiasi sistema ottico complesso.

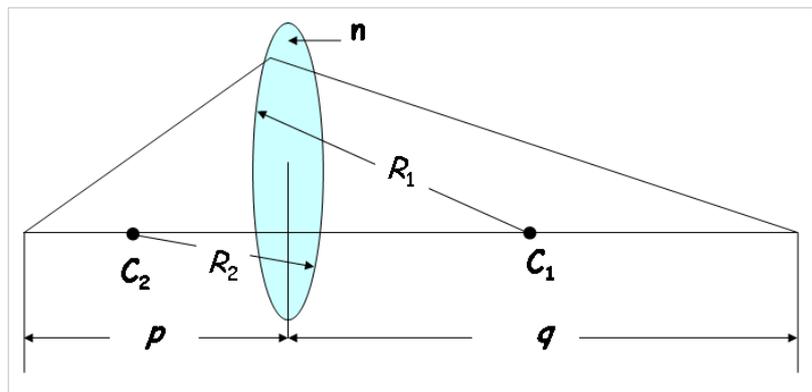
In realtà un paraboloide di rotazione è la figura geometrica più adatta a far convergere in un unico punto i raggi parassiali. Negli strumenti ottici moderni si usano specchi di forma parabolica per focalizzare i raggi.

## Lenti

Se invece di uno specchio si considera una superficie sferica rifrangente, di separazione tra due mezzi, di indice di rifrazione  $n_1$  ed  $n_2$ , con analoghi ragionamenti geometrici si può ottenere:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Dove  $R$  è il raggio di curvatura della superficie di separazione; la distanza dell'immagine è misurata dall'altra parte rispetto allo specchio.



La combinazione di due mezzi rifrangenti, cioè una lente, se abbastanza sottile, ha un comportamento matematicamente simile a uno specchio. Se i due raggi di curvatura della lente sono  $R_1$  ed  $R_2$ , ed  $n$  l'indice di rifrazione relativo, considerando che l'immagine in un mezzo diventa l'oggetto dell'altro mezzo rifrangente, si mostra con semplici operazioni geometriche, dette  $p$  ed  $q$  le distanze oggetto e le distanze immagine, che:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f}$$

Cioè una equazione formalmente simile all'equazione degli specchi. Notare come in questo caso i  $p$  sono positivi se si trovano sul lato sinistro, mentre i  $q$  sono positivi sul lato destro (quindi per i  $q$  si è adottata una convenzione diversa che per gli specchi).

Il termine fuoco deriva dalla proprietà delle lenti come degli specchi di concentrare la luce del Sole (posto praticamente all'infinito) sul fuoco, fino ad incendiare oggetti combustibili.

Determinare il fuoco di una lente come di uno specchio non richiede in realtà l'algebra ma si può determinare anche sperimentalmente. Infatti basta fare attraversare una lente o fare incidere su uno specchio un fascio di raggi parassiali e paralleli all'asse ottico e determinare dove vanno a incontrarsi tutti i raggi sull'asse ottico. La distanza focale è

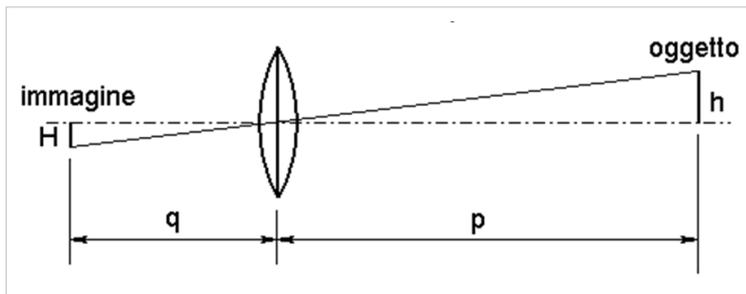
quindi un parametro essenziale per definire le proprietà di una lente sottile.

Spesso per quanto riguarda le lenti usate negli occhiali, al posto della distanza focale si preferisce parlare di potenza delle lenti, che viene misurata in diottrie, potenza e distanza focale sono semplicemente l'uno l'inverso dell'altro:

$$D = \frac{1}{f}$$

Notare come le lenti convergenti abbiano diottrie positive, mentre le lenti divergenti le diottrie siano negative.

Un esempio numerico chiarisce meglio il concetto: immaginiamo di avere  $R_1 = R_2 = 5.5 \text{ cm}$ ,  $n = 1.33$  (vetro) una lente di questo tipo ha una distanza focale di 8.3 cm e quindi è di 12 diottrie. In questo caso se vogliamo che la lente sia sottile (un numero ragionevole è in questo caso 5 mm) il diametro esterno della lente deve essere di circa 2 cm (disegnando in sezione la lente si dimostra facilmente). Per le lenti sottili, in generale più è piccola la distanza più il diametro della lente deve essere piccolo.



L'immagine a fianco, in cui si è scambiata la posizione dell'immagine e dell'oggetto rispetto alla figura precedente, mostra l'ingrandimento di una lente. Infatti la dimensione dell'immagine non è fissa: se avvicinamo la lente all'oggetto e di conseguenza allontaniamo il punto in cui proiettiamo l'immagine (ad esempio uno

schermo), l'immagine diventa più grande.

Si chiama ingrandimento il rapporto:

$$I = H/h$$

dove H è l'altezza dell'immagine e h quella dell'oggetto. Misurare tali dimensioni non è sempre possibile. Non si possono misurare facilmente oggetti molto lontani oppure troppo piccoli. In tali casi l'ingrandimento può essere determinato per mezzo delle distanze p e q. Infatti il raggio luminoso che passa per il centro della lente, e che non viene deviato, individua 2 triangoli simili che hanno vertice comune al centro della lente. In virtù dei triangoli simili  $H/h = q/p$ , e, dal momento che  $I = H/h$ , avremo anche che  $I = q/p$ . Continuando ad avvicinare la lente all'oggetto illuminato, si arriva ad un punto in cui l'immagine sarà molto lontana. Se la distanza lente-oggetto è pari alla distanza focale, l'immagine si formerà all'infinito. Al contrario un oggetto posto all'infinito formerà la propria immagine alla distanza focale. Una lente posta a 2 f dall'oggetto, forma l'immagine alla distanza 2 f. In questo caso il rapporto di ingrandimento è pari a 1.

# Strumenti ottici

## Occhio Umano

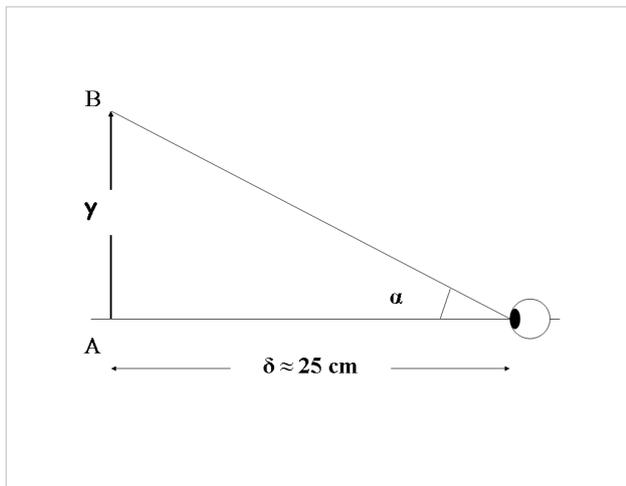
Dal punto di vista dell'ottica l'occhio umano è una lente convergente (il cristallino n.8 nella figura) che focalizza i raggi sulla retina (n.13 nella figura). La distanza  $q$  in questo caso è fissa (distanza tra il cristallino e la retina (attraverso l'umor vitreo è fissa), mentre la distanza focale è variabile in quanto, se l'occhio è sano in condizione di riposo le immagini all'infinito convergono sulla retina:

$$\frac{1}{f_{\infty}} = \frac{1}{q}$$

Mentre per focalizzare oggetti vicini la contrazione dei muscoli ciliari (n.2) modifica il raggio di curvatura del cristallino, fino a riuscire a focalizzare oggetti a circa  $p_v = 25 \text{ cm}$  di distanza. Per cui il fuoco vicino vale  $f_v$  che si ricava da:

$$\frac{1}{p_v} + \frac{1}{f_{\infty}} = \frac{1}{f_v}$$

## Lente d'ingrandimento



Il più semplice degli strumenti ottici è la singola lente convergente sottile in aria. Frequentemente essa è usata come lente di ingrandimento per aiutare l'occhio a distinguere i dettagli di un oggetto. In un occhio normale e con normale illuminazione dell'oggetto la distanza tra oggetto ed occhio per la quale si ha la migliore precisione nella percezione dei dettagli è di 25 cm. Ciò che conta per la percezione visiva di particolari è l'angolo sotto cui l'oggetto è visto dall'occhio. Infatti dato un oggetto rettilineo di lunghezza  $y$ , non si può scendere sotto un determinato valore della sua distanza dall'occhio, sia perché l'occhio non è comunque capace di accomodarsi a distanza dell'oggetto inferiori ad un

minimo (punto prossimo), sia perché in ogni caso l'eccessivo avvicinamento produce riduzione della capacità di percepire dettagli. Indicata con  $\delta$  la distanza della visione distinta, un oggetto AB di lunghezza  $y$ , si presenta per la migliore osservazione sotto l'angolo  $\alpha$  tale che:

$$y = \delta \tan \alpha$$

Una lente reale, quindi non necessariamente sottile, esistono due fuochi per ogni semispazio separato dalla lente. La distanza reale di tali fuochi è eguale solo per lenti sottili.

Una lente di ingrandimento opportunamente interposta tra oggetto ed occhio migliora la capacità di percezione di dettagli, in quanto fa aumentare l'angolo sotto cui è visto l'oggetto. Per questo si pone l'oggetto tra lente e fuoco anteriore, in vicinanza del fuoco stesso. Al di là della lente i raggi quindi saranno paralleli. Comunque si disponga l'occhio al di là della lente, in condizione di riposo, i raggi convergeranno sull'occhio sulla retina. L'immagine vista dall'occhio è diritta, virtuale e molto lontana. L'occhio la percepisce sotto un angolo  $\beta$  tale che:

$$y \approx 2f \tan \beta/2$$

Si dice ingrandimento visuale  $I_v$  della lente il rapporto:

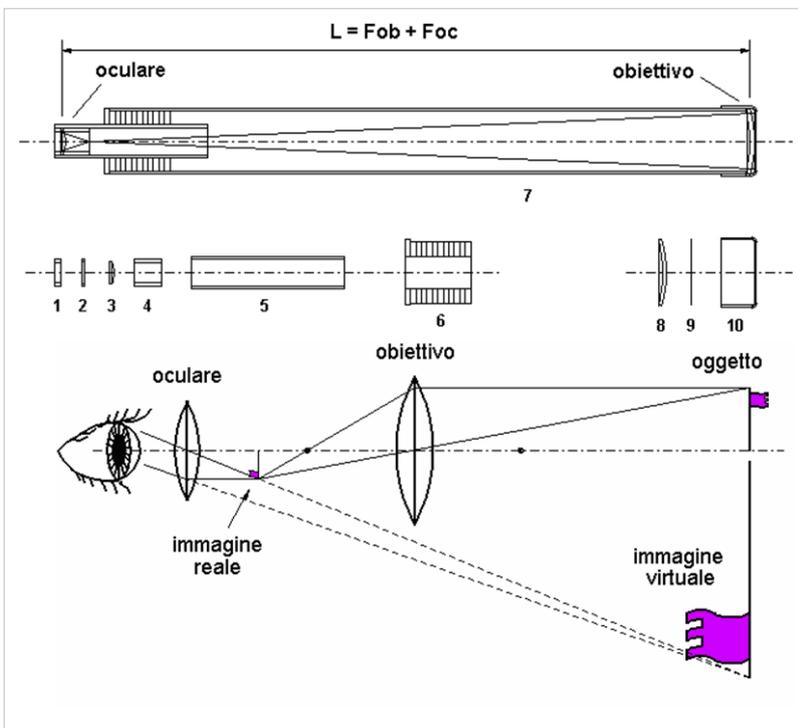
$$I_v = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\delta}{f}$$

La lente di ingrandimento consente di avvicinare gli oggetti all'occhio e di vederli ancora nitidi. Ciò produce un aumento della loro dimensione apparente.

Nell'esempio fatto prima è stata descritta una lente di ingrandimento di lunghezza focale 8.3 cm che quindi determina un ingrandimento di circa 3 volte. Per ottenere un ingrandimento maggiore sarebbe necessario una lunghezza focale minore e quindi un raggio di curvatura minore. Ma raggi di curvatura molto piccoli sono possibili solo per lenti molto piccole, in pratica difficilmente con una lente di ingrandimento si riesce ad ingrandire più di 3-5 volte. Notiamo che dovendosi conservare l'energia luminosa il processo di ingrandimento determina una perdita di luminosità pari al quadrato dell'ingrandimento stesso : in quanto la luce deve dividersi su un'area maggiore.

In tutti gli strumenti ottici il rapporto tra la tangente dell'angolo in cui l'immagine reale o virtuale viene percepita dall'occhio utilizzando lo strumento ottico e la tangente dell'angolo con cui sarebbe percepita dall'occhio senza l'ausilio dello strumento è l'ingrandimento dello strumento stesso.

### Cannocchiale



Il cannocchiale, nella sua versione più semplice (cannocchiale astronomico o di Keplero) è un sistema di due lenti in aria, adatto all'osservazione di oggetti lontani. La prima lente, convergente e di grande distanza focale (anche qualche metro), detta obiettivo, è fissa rispetto al supporto cilindrico del sistema, mentre la seconda lente, anch'essa convergente ed avente lo stesso asse ottico dell'obiettivo, può essere traslata lungo l'asse stesso e prende il nome di oculare. Trattandosi di oggetti lontani, l'immagine reale è capovolta, di lunghezza  $y_{OB}$ , formata dall'obiettivo, cade in vicinanza del suo piano focale, situato a distanza  $F_{OB}$  dall'obiettivo stesso. L'oculare, la cui caratteristica ottica è di avere

piccola distanza focale, viene sistemato in modo da portare il suo primo fuoco  $F_{OC}$  in prossimità dell'immagine formata dall'obiettivo. L'immagine formata dall'oculare, che è poi l'immagine formata dall'intero sistema, sarà, analogamente al caso della lente di ingrandimento semplice, virtuale ingrandita e capovolta rispetto all'oggetto lontano.

Per quanto riguarda l'ingrandimento visuale del cannocchiale, l'angolo  $\alpha$  sotto cui è visto ad occhio nudo l'oggetto, è praticamente coincidente, data la grande distanza dell'oggetto, con l'angolo con cui lo stesso oggetto è visto dal centro dell'obiettivo. Con questa approssimazione si può scrivere:

$$y_{OB} = F_{OB} \tan \alpha$$

$$y_{OB} = F_{OC} \tan \beta$$

da cui si ha che l'ingrandimento verticale:

$$I_v = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{F_{OB}}{F_{OC}}$$

Per rendere alto l'ingrandimento visuale di un cannocchiale occorre rendere minima la focale  $F_{OC}$  dell'oculare e rendere grande la focale  $F_{OB}$  dell'obiettivo. Tuttavia non risulta conveniente allungare esageratamente il cannocchiale anche per ragioni di flusso energetico raccogliabile sulla immagine: è infatti da osservare che la pupilla d'uscita del sistema ottico, in questo caso coincidente con l'immagine del contorno dell'obiettivo formata dall'oculare, diminuisce al crescere della distanza tra oculare ed obiettivo. Nella ricerca astronomica, la necessità di disporre di strumenti ottici sempre più potenti ha condotto a cannocchiali astronomici molto lunghi e con obiettivi di grande diametro.

In un cannocchiale l'obiettivo forma un'immagine che viene ingrandita dall'oculare.

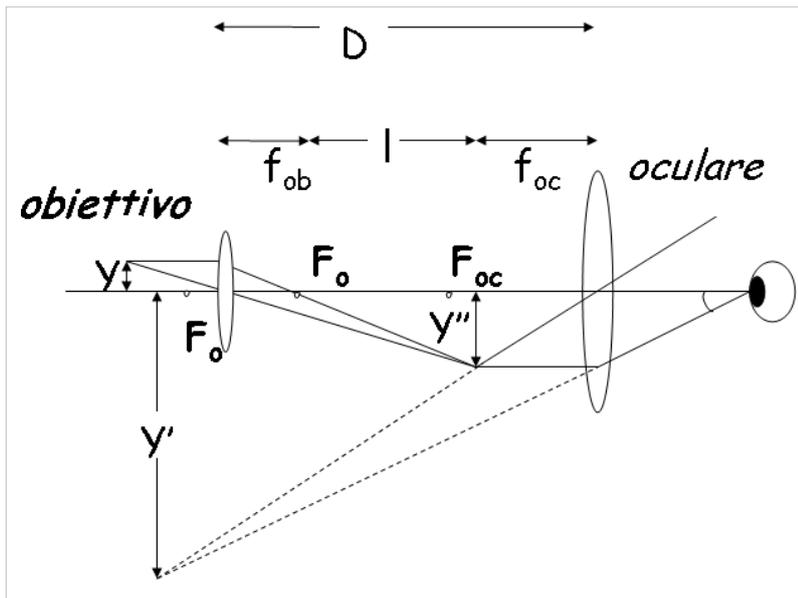
## Aberrazione delle lenti

Le aberrazioni sono responsabili della distorsione delle immagini fornite dagli strumenti ottici. Le aberrazioni possono essere drasticamente ridotte progettando in modo opportuno le lenti. Dal momento che non è possibile contenere tutte le aberrazioni utilizzando una sola lente, gli obiettivi e gli oculari vengono realizzati con più lenti, che così diventano dei sistemi ottici. Definendo in modo opportuno il tipo di vetro di ciascuna lente, la curvatura di ogni superficie e la distanza fra una lente e l'altra, è possibile controllare in modo soddisfacente le aberrazioni del sistema. In linea generale, il grado di correzione di un obiettivo o di un oculare dipende dal numero di lenti da cui è formato. Le principali aberrazioni sono elencate:

- **Aberrazione cromatica:** L'aberrazione cromatica dipende dal fatto che l'indice di rifrazione del vetro varia con la lunghezza d'onda della luce. Un sistema formato da lenti, anche in approssimazione parassiale, fornisce di un oggetto che emette luce bianca tante immagini colorate, a distanze diverse e con ingrandimenti diversi. A causa di tale difetto i bordi di un oggetto appaiono da un lato blu e dall'altro rosso.
- **Aberrazione sferica:** L'aberrazione sferica dipende dal fatto che la sfera non è la superficie ideale per focalizzare nello stesso punto raggi che provengono da grande distanza. Quindi raggi paralleli all'asse ottico si focalizzano non su un punto geometrico sull'asse ottico ( il fuoco) ma su una linea giacente sull'asse ottico ma di dimensioni tanto maggiori quanto più grande è l'aberrazione sferica.
- **Coma:** Simile all'aberrazione sferica si ha per oggetti fuori dall'asse ottico che formano che anche se puntiformi formano una immagine che ha una estensione spaziale. Quindi una stella appare simile ad una cometa.
- **Astigmatismo:** si ha per raggi che formano un grande angolo con l'asse ottico. Quindi questa è una aberrazione longitudinale A causa di tale aberrazione l'immagine di un cerchio su un piano perpendicolare all'asse ottico appare come una ellisse. Quindi un pianeta appare come una ellisse.

## Microscopio

La lente di ingrandimento riesce con difficoltà ad ingrandire una decina di volte gli oggetti. Oltre questo limite tutte le aberrazioni fanno sentire il proprio effetto. Lo strumento più utilizzato per avere un ingrandimento migliore è il microscopio ottico. Attualmente tali strumenti riescono ad ingrandire fino a 1000 volte: il limite è dato dalla lunghezza d'onda della luce. Infatti non si riescono a distinguere con un microscopio ottico oggetti che abbiano una dimensione inferiore a  $0.5 \mu\text{m}$ .



Il microscopio, come il cannocchiale, è costituito da due distinti sistemi di lenti, uno detto obiettivo e l'altro oculare. L'obiettivo riceve luce attraverso il campione e proietta un'immagine di questo in prossimità dell'estremo superiore del corpo del microscopio, in corrispondenza del piano focale dell'oculare. È responsabile della ricchezza di dettagli dell'immagine ottenuta e contribuisce in buona parte all'ingrandimento. L'oculare consente all'occhio di osservare l'immagine prodotta dall'obiettivo ingrandendola ulteriormente. È importante

sottolineare che l'oculare non contribuisce in alcun modo al potere risolvete del sistema ottico; semplicemente amplifica l'immagine, separando maggiormente i dettagli già presenti in essa, in modo da renderli apprezzabili all'occhio. L'obiettivo ha il compito di formare l'immagine ingrandita dell'oggetto in osservazione.

Facendo riferimento alla figura l'obiettivo è una lente convergente di piccola focale, davanti al quale, poco a sinistra del suo primo fuoco  $F_o$  è posto l'oggetto. Di tale oggetto, di lunghezza  $Y$ , a distanza  $D$  dall'obiettivo si forma l'immagine reale e capovolta, di lunghezza  $Y''$ . L'ingrandimento lineare trasversale dell'obiettivo vale:

$$I_{ob} = \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{f_{ob}}$$

L'oculare è una lente convergente di focale  $f_{oc}$ , disposta in modo tale che il suo primo fuoco  $F_{oc}$  cada leggermente a sinistra dell'immagine formata dall'obiettivo. L'oculare forma allora un'immagine virtuale molto lontana che l'occhio, disposto sul secondo fuoco dell'oculare, vede sotto un angolo  $\beta$  tale che:

$$Y'' = f_{oc} \tan \beta$$

da cui:

$$\tan \beta = \frac{Y''}{f_{oc}} = \frac{DY}{f_{ob}f_{oc}}$$

Definita  $\delta$  la distanza minima a cui si osserva ad occhio nudo, e quindi con un oggetto di altezza  $Y$  appare sotto un angolo  $\alpha$ :

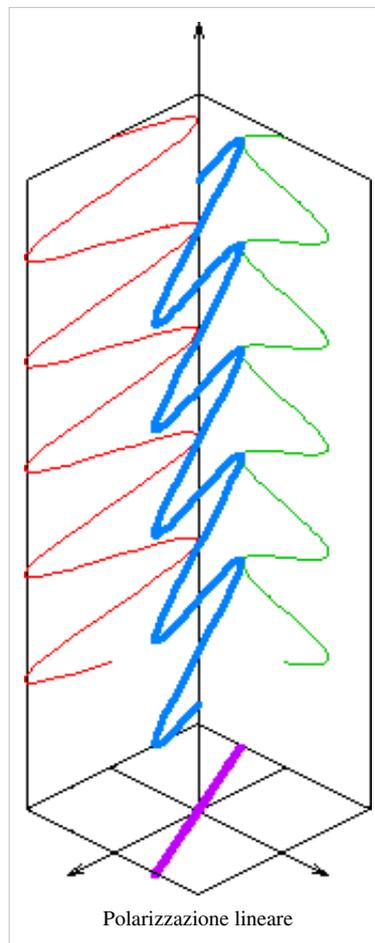
$$Y = \delta \tan \alpha$$

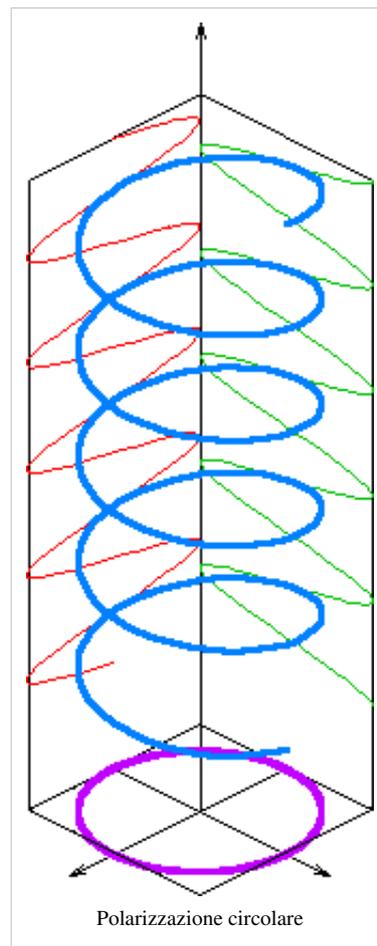
Il microscopio fornisce quindi un ingrandimento:

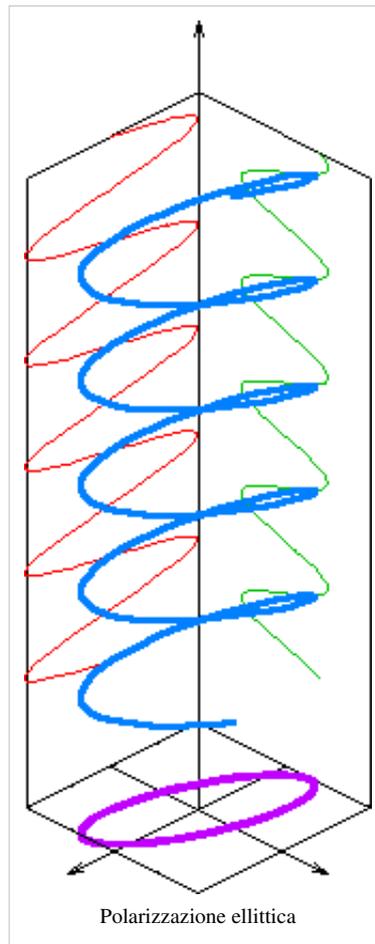
$$I_v = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{D\delta}{f_{ob}f_{oc}}$$

# Polarizzazione

La polarizzazione viene mostrata nella maniera più semplice da una onda piana, che è una buona rappresentazione della maggior parte delle onde luminose (una onda piana ideale è un'onda con un fronte d'onda infinitamente largo e lungo). Tutte le onde elettromagnetiche che si propagano o nel vuoto o in materiale uniforme di estensione infinita hanno campi elettrici e magnetici perpendicolari alla direzione di propagazione. Convenzionalmente quando si considera la polarizzazione, si descrive il vettore campo elettrico e viene ignorato il campo magnetico poiché la componente ortogonale di esso è proporzionale al campo elettrico. Il vettore campo elettrico si può dividere in maniera arbitraria in due componenti perpendicolari indicate con  $y$  e  $z$  (indicando con  $z$  la direzione di propagazione). Per un'onda armonica semplice, in cui l'ampiezza del vettore campo elettrico varia in maniera sinusoidale, le due componenti hanno esattamente la stessa frequenza. Le due componenti possono non avere la stessa fase, cioè non raggiungono il massimo o il minimo negli stessi istanti. La forma tracciata in un piano fissato dal campo elettrico come l'onda piana attraversa tale piano è una descrizione dello **stato di polarizzazione**. Le figure seguenti mostrano alcuni esempi di tale evoluzione del campo elettrico (blu) nel tempo (asse verticale), le componenti  $y$  e  $z$  (rosso/sinistra e verde/destra), e la traiettoria descritta dall'estremo del vettore nel piano (viola).







Nella figura di sinistra le due componenti ortogonali sono in fase. In questo caso il rapporto tra le due componenti è costante, per questa ragione la direzione del vettore campo elettrico è costante. Poiché l'estremo del vettore descrive una linea nel piano, questo caso speciale è chiamato polarizzazione lineare. La direzione della linea dipende dalla ampiezza relativa delle due componenti.

Nella figura di mezzo, le due componenti hanno esattamente la stessa ampiezza e sono esattamente di  $90^\circ$  fuori fase. In questo caso una componente è nulla quando l'altra è sul massimo. Vi sono due casi possibili la componente  $y$  è  $90^\circ$  in anticipo o in ritardo rispetto alla componente  $z$ . In questo caso l'estremo del vettore campo elettrico descrive una traiettoria circolare nel piano, così che questo caso particolare è chiamato polarizzazione circolare. La direzione in cui avviene la rotazione dipende dalla relazione di fase esistente. I due casi possibili sono detti di polarizzazione oraria ed antioraria.

Tutti gli altri casi, in cui le due componenti sono non in fase e non hanno la stessa ampiezza sono chiamati polarizzazione ellittica in quanto l'estremo del vettore descrive una ellisse nel piano.

Le onde radio a causa delle sorgenti orientate dipolari che le generano sono in genere polarizzate. le sorgenti naturali di luce producono in genere onde non polarizzate. Vi è da aggiungere che la riflessione da una superficie speculare può rendere polarizzato un raggio che inizialmente non lo era. Anche molti cristalli non cubici polarizzano la luce.

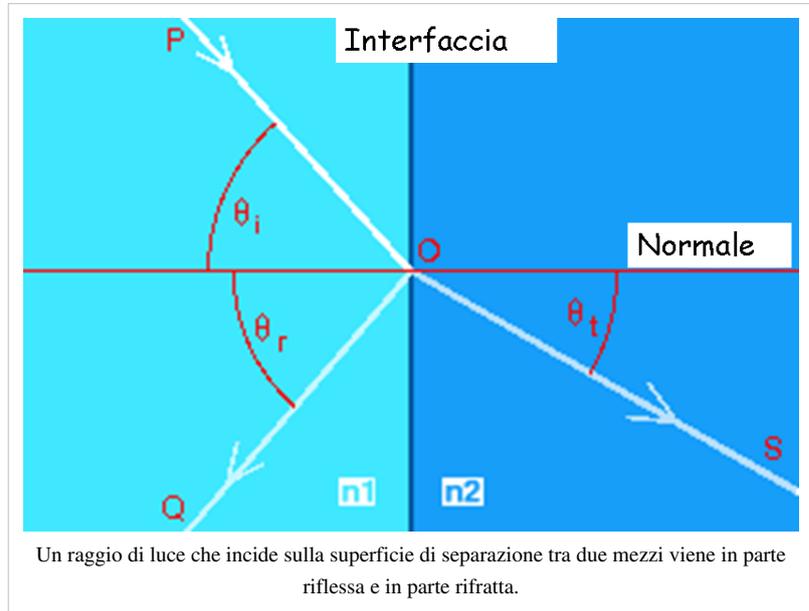
La luce del sole attraversando l'atmosfera viene parzialmente polarizzata. Alcuni animali sono in grado di percepire il grado di polarizzazione della luce, poiché la polarizzazione è sempre perpendicolare alla direzione del sole, tale informazione è utilizzata per l'orientamento. L'occhio umano è solo debolmente sensibile alla polarizzazione della luce.

## Equazioni di Fresnel

Le equazioni di Fresnel descrivono il comportamento della luce che attraversa due mezzi con diversi indice di rifrazione. Infatti l'equazioni dell'ottica geometrica.

Quando infatti la luce passa da un mezzo con indice di rifrazione  $n_1$  ad un altro con indice di rifrazione  $n_2$ , possono avere luogo sia la riflessione che la rifrazione.

Nella figura a destra, un raggio incidente **PO** incide nel punto **O** dell'interfaccia tra i due mezzi di indice di rifrazione  $n_1$  ed  $n_2$ . Parte del raggio è riflesso come raggio **OQ** e parte viene rifratto come raggio **OS**. L'angolo che il raggio incidente, riflesso e rifratto formano con la normale all'interfaccia sono detti rispettivamente  $\theta_i$ ,  $\theta_r$  e  $\theta_t$ . Le relazioni tra questi angoli sono date dalle leggi della riflessione e rifrazione.



La frazione dell'intensità della luce incidente che è riflessa dall'interfaccia è data dal coefficiente di Riflessione  $R$ ,

mentre la frazione che viene rifratta è  $T$ . Le equazione di Fresnel, che sono basate sull'ipotesi che entrambi i mezzi siano non ferromagnetici, può essere usata per calcolare il valore di tali coefficienti  $R$  ed  $T$ .

Il calcolo di  $R$  and  $T$  dipende dalla polarizzazione del raggio incidente. Se la luce è polarizzata con il campo elettrico della luce perpendicolare al piano della figura (tale direzione è indicata con il pedice **s**), il coefficiente di riflessione è dato da:

$$R_s = \left[ \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right]^2 = \left[ \frac{n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_t)}{n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)} \right]^2$$

dove  $\theta_t$  si ricava dalla legge della rifrazione:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

Mentre se il raggio incidente è polarizzato nel piano del disegno (tale direzione con il pedice **p**), il coefficiente di riflessione è dato da:

$$R_p = \left[ \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right]^2 = \left[ \frac{n_1 \cos(\theta_t) - n_2 \cos(\theta_i)}{n_1 \cos(\theta_t) + n_2 \cos(\theta_i)} \right]^2$$

Dovendosi conservare l'energia delle onde elettromagnetiche i coefficienti di trasmissione sono pari a:

$$T_s = 1 - R_s$$

$$T_p = 1 - R_p$$

Se la luce incidente non è polarizzata ....

# Ottica ondulatoria

L'**ottica ondulatoria** tratta di tutti quei fenomeni in cui le caratteristiche ondulatorie del campo elettromagnetico della luce non sono trascurabili. Si rende quindi necessario utilizzare le equazioni di Maxwell per descrivere il comportamento della luce.

Un esempio tipico è la trattazione dei problemi di diffrazione, ovvero lo studio della propagazione di un'onda luminosa il cui raggio subisce uno spostamento dalla traiettoria rettilinea non imputabile né a rifrazione né a riflessione, così come descritto dalle leggi dell'ottica geometrica.

In realtà, i fenomeni di riflessione e di rifrazione sono effetti di diffrazione, ma essi possono essere descritti tramite l'ottica geometrica. Per tutti gli altri fenomeni, quali ad esempio l'interferenza, è necessario risolvere le equazioni di Maxwell con condizioni al contorno che tengano conto della presenza dell'elemento diffrangente, sia esso un ostacolo o una discontinuità nel mezzo in cui la luce si trasmette.

## La diffrazione da schermo

Uno dei problemi tipici dell'ottica ondulatoria è lo studio della diffrazione da schermo. Immaginiamo di avere un'onda incidente su un ostacolo piano (chiamato schermo o trasparenza) e di voler calcolare la distribuzione del campo emergente nel semipiano opposto a quello da cui proviene l'onda incidente. Questo problema può essere risolto in due passi:

1. **Problema di Interazione:** dato il campo incidente sullo schermo e noto lo schermo, trovare la radiazione uscente dallo schermo
2. **Problema di Propagazione:** noto il campo emergente dallo schermo, calcolarlo in qualunque altro punto del semipiano dopo lo schermo

Entrambi i problemi possono essere risolti in diversi modi. In questa trattazione utilizzeremo una approssimazione scalare per il campo e la sua scomposizione in onde piane attraverso la trasformata di Fourier

## Approssimazione scalare del campo

Ammettiamo che il campo possa essere espresso da un'unica grandezza che prende il nome di *disturbanza*  $U(\vec{r}, t)$  e dipende dalla posizione e dal tempo. Limitatamente a regioni di mezzo omogeneo, isotropo, non dissipativo, non dispersivo e privo di cariche e correnti, la disturbanza soddisfa le equazioni delle onde:

$$\nabla^2 U - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

dove  $\nu$  è la velocità di propagazione delle onde. L'approssimazione scalare quindi equivale a dire che le varie componenti del campo possano trattarsi alla stessa maniera ed indipendentemente le une dalle altre (mentre sono legate dalle equazioni di Maxwell) e che le condizioni al contorno diano gli stessi risultati per qualunque componente. Tale approssimazione conduce a risultati soddisfacenti per molti casi di interesse, come d'accordo con l'esperienza.

Oltre ad introdurre l'approssimazione scalare, faremo riferimento ad un'onda monocromatica, per cui:

$$U(\vec{r}, t) = V(\vec{r}, t)e^{-2\pi i \nu t}$$

da cui otteniamo

$$\nabla^2 V + n^2 k^2 V = 0$$

dove con  $k$  si indica l'ondulanza della radiazione nel vuoto ed in futuro ometteremo  $n$  considerando il mezzo di propagazione proprio il vuoto.

### Scomposizione in serie di onde piane

Ammettiamo di conoscere il campo emergente dallo schermo in  $z = 0$  e desiderare conoscere il valore del campo per qualunque  $z = cost > 0$ . L'idea di base è quella di rappresentare  $V_0(x, y)$  come sovrapposizione di opportune onde piane. Siccome è ben noto per ogni onda piana l'effetto della propagazione, basta modificare opportunamente l'insieme delle onde piane componenti il campo per effetto della propagazione e ricomporle poi per ottenere  $V_{z=cost>0}(x, y)$

Ottenere la scomposizione in onde piane è possibile attraverso uno sviluppo in serie integrale di Fourier del tipo:

$$V_0(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} A_0(p, q) e^{2\pi i(px+qy)} dpdq$$

dove  $A_0$  è l'ampiezza complessa di un'onda del tipo  $Ae^{i(k_x x + k_y y)}$

### Problema di interazione

Ora che possiamo studiare il campo incidente attraverso un insieme di onde piane, possiamo studiare l'effetto che lo schermo ha su una singola onda piana monocromatica che interagisce con esso. Anche questo problema risulta in effetti molto difficile, per cui si può dare una soluzione approssimata di questo tipo: dato un schermo su cui incide una radiazione  $V_i(x, y, 0)$ , detta  $V_e(x, y)$  la radiazione emergente dallo schermo, definiamo **funzione di trasmissione** dello schermo:

$$\tau(x, y) = \frac{V_e(x, y)}{V_i(x, y, 0)}$$

come rapporto tra la disturbanza incidente e quella emergente. L'uso della funzione di trasmissione permette di dare una soluzione approssimata al problema di Interazione. Dalla definizione, è facile capire che questa, in generale, dipende dalla forma della radiazione incidente. In realtà, essa viene generalmente definita dalle caratteristiche proprie dello schermo e tale approssimazione si adatta a molti casi di interesse.

### Problema di propagazione

Una volta definito l'effetto dello schermo sull'insieme delle onde piane la cui sovrapposizione genera l'onda incidente, è possibile studiare la propagazione delle singole componenti per ricostruire il campo nel semipiano di interesse. Attraverso la scomposizione in onde piane, inoltre, abbiamo un vantaggio nel calcolo della propagazione. Infatti, esprimendo il campo mediante serie integrale di Fourier abbiamo

$$V(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} A_0(p, q) e^{2\pi i(px+qy+mz)} dpdq$$

ma possiamo facilmente ricavare  $A_0(p, q)$  per inversione alla Fourier di  $V_0(x, y)$  ed ottenere

$$V(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} V_0(\xi, \theta) d\xi d\theta \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i[p(x-\xi)+q(y-\theta)+mz]} dpdq$$

ovvero introducendo il *propagatore diretto*  $K_z(s, t) = \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(ps+qt+mz)} dpdq$  otteniamo che la propagazione dell'onda lungo  $z$  è ottenuta tramite il prodotto di convoluzione tra il campo fra il piano  $z = 0$  e la risposta impulsiva  $K_z$  di un sistema lineare invariante.

## Il principio dell'interferenza inversa

Il metodo dello sviluppo in serie di onde piane rientra come caso particolare in uno più generale espresso dal principio dell'interferenza inversa, espresso da Toraldo di Francia.

Consideriamo una struttura diffrangente che divida lo spazio in due regioni  $R_1$  e  $R_2$  e supponiamo che su essa incida, provenendo da  $R_1$ , un'onda  $O$ . Schematizziamo l'ostacolo come una superficie  $S$  e sia  $V(P)$  l'ampiezza complessa emergente dal generico punto  $P$  di essa. Il principio di interferenza inversa si enuncia allora così:

*"Se esiste un sistema di onde  $O_1, O_2, \dots$  di opportune forme, ampiezze e fasi che, qualora provenissero da  $R_1$  ed interferissero su  $S$ , darebbero luogo alla distribuzione complessa  $V(P)$ , proprio tali onde si propagherebbero in  $R_2$  per effetto dell'incidenza di  $O$  su  $S$ "*

---

# Relatività

---

# Fonti e autori delle voci

**Cinematica del punto** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=219295> *Autori:* Diablo, EH101, Gremel, LoStrangolatore, Otrebla86, Pasquale.Carelli, Pietrodn, Ramac, Simon.z, The Doc, Torsy, Wim b, 48 Modifiche anonime

**Dinamica del punto** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=174558> *Autori:* EH101, Pietrodn, Ramac, Simon.z, The Doc, 15 Modifiche anonime

**Moti relativi** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=144223> *Autori:* Diablo, Pasquale.Carelli, Ramac, Simon.z, 3 Modifiche anonime

**Dinamica dei sistemi di punti materiali** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=210276> *Autori:* Diablo, Gremel, LoStrangolatore, N1ghtWisH, Pasquale.Carelli, Ramac, Simon.z, 7 Modifiche anonime

**Gravitazione** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222268> *Autori:* Diablo, Gremel, LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, Pietrodn, Ramac, Simon.z, 5 Modifiche anonime

**Dinamica del corpo rigido** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=144222> *Autori:* Diablo, Ramac, Simon.z, 2 Modifiche anonime

**Rotazione** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=144218> *Autori:* Belfour, Diablo, Otrebla86, Ramac, 1 Modifiche anonime

**Definizioni della termodinamica** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=181102> *Autori:* Bh3u4m, Diablo, Pasquale.Carelli, Ramac, 8 Modifiche anonime

**Calore** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=176770> *Autori:* Pasquale.Carelli, Ramac, 3 Modifiche anonime

**Trasformazioni termodinamiche** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=220762> *Autori:* LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, Ramac, 7 Modifiche anonime

**Gas perfetti e reali** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=154021> *Autori:* Pasquale.Carelli, Ramac, 2 Modifiche anonime

**Primo principio della termodinamica** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=220599> *Autori:* Diablo, LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, Ramac, 9 Modifiche anonime

**Secondo principio della termodinamica** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=184873> *Autori:* Diablo, Pasquale.Carelli, 2 Modifiche anonime

**Entropia** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=172454> *Autori:* Pasquale.Carelli, Ramac

**Carica elettrica** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222274> *Autori:* Bh3u4m, Broc, Diablo, Digitalone, Pasquale.Carelli, Ramac, Wim b, 13 Modifiche anonime

**Campi elettrici** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222290> *Autori:* Diablo, Digitalone, Neo85, Pasquale.Carelli, 4 Modifiche anonime

**Legge di Gauss** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=207897> *Autori:* Diablo, Digitalone, Pasquale.Carelli, 6 Modifiche anonime

**Potenziale elettrico** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=221507> *Autori:* Digitalone, Pasquale.Carelli, 2 Modifiche anonime

**Conduttori** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=221468> *Autori:* Digitalone, Edelre, Mercy, Pasquale.Carelli, 8 Modifiche anonime

**Dielettrici** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=190080> *Autori:* Pasquale.Carelli, Ramac, The Doc, 10 Modifiche anonime

**Elettrodinamica** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=221520> *Autori:* Diablo, Pasquale.Carelli, 2 Modifiche anonime

**Le leggi di Kirchhoff** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=221616> *Autori:* Pasquale.Carelli

**Campi magnetici** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=221469> *Autori:* Pasquale.Carelli, Ramac, 4 Modifiche anonime

**Leggi di Laplace** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=208307> *Autori:* Pasquale.Carelli, Ramac, 9 Modifiche anonime

**Legge di Ampère** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=199364> *Autori:* M3tho, Pasquale.Carelli, Wim b

**Magnetismo della materia** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222298> *Autori:* Basilicofresco, LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, Ramac, 2 Modifiche anonime

**Induzione e legge di Faraday** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222295> *Autori:* LoStrangolatore, Natja, Pasquale.Carelli, The Doc, Wim b, 3 Modifiche anonime

**Correnti alternate** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=215707> *Autori:* Pasquale.Carelli

**Equazioni di Maxwell** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=190262> *Autori:* Diablo, Pasquale.Carelli, 6 Modifiche anonime

**Proprietà generali delle onde** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=190552> *Autori:* Diablo, Pasquale.Carelli, Quibik

**Suono** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=213748> *Autori:* Anal97, Diablo, Pasquale.Carelli, 2 Modifiche anonime

**Corda vibrante** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=106077> *Autori:* Diablo, Pasquale.Carelli, 1 Modifiche anonime

**Onde del mare** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=144196> *Autori:* Diablo, Ilaria, Pasquale.Carelli

**Linea di trasmissione** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=47787> *Autori:* Diablo, Pasquale.Carelli

**Onde elettromagnetiche** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=157826> *Autori:* Diablo, Pasquale.Carelli, The Doc, 6 Modifiche anonime

**Il vettore di Poynting** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=130544> *Autori:* Pasquale.Carelli, Ramac

**Campi elettromagnetici nei dielettrici** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=191263> *Autori:* Pasquale.Carelli, 1 Modifiche anonime

**Campi elettromagnetici nei conduttori** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=191447> *Autori:* Pasquale.Carelli

**Spettro delle onde elettromagnetiche** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=221471> *Autori:* Azmodan, Diablo, Pasquale.Carelli, 1 Modifiche anonime

**La luce** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=127548> *Autori:* Diablo, Pasquale.Carelli, Ramac, 1 Modifiche anonime

**Leggi dell'ottica geometrica** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=127562> *Autori:* Diablo, Pasquale.Carelli, Ramac, 1 Modifiche anonime

**Lenti e specchi** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=123795> *Autori:* Diablo, Pasquale.Carelli, Ramac, 1 Modifiche anonime

**Strumenti ottici** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222291> *Autori:* Diablo, LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, 2 Modifiche anonime

**Polarizzazione** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=176599> *Autori:* Diablo, Pasquale.Carelli, 1 Modifiche anonime

**Ottica ondulatoria** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=191299> *Autori:* Pasquale.Carelli, Ramac, Viseradh, 1 Modifiche anonime

# Fonti, licenze e autori delle immagini

**Image:Piston\_force\_imposee\_colour\_Italian.svg** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Piston\\_force\\_imposee\\_colour\\_Italian.svg](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Piston_force_imposee_colour_Italian.svg) *Licenza:* GNU Free Documentation License *Autori:* AnyFile

**Image:Lavoro.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Lavoro.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:leftarrow.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:leftarrow.png> *Licenza:* GNU Lesser General Public License *Autori:* David Vignoni

**Image:1uparrow.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:1uparrow.png> *Licenza:* GNU Lesser General Public License *Autori:* David Vignoni

**Image:rightarrow.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:rightarrow.png> *Licenza:* GNU Lesser General Public License *Autori:* David Vignoni

**Image:Diafase.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Diafase.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:Ideal\_gas\_isotherms.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Ideal\\_gas\\_isotherms.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Ideal_gas_isotherms.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* ChongDae, Krishnavedala, Pieter Kuiper, 1 Modifiche anonime

**Image:Scatola\_teoria\_cinetica.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Scatola\\_teoria\\_cinetica.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Scatola_teoria_cinetica.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:VanderWaals\_liquifazione\_CO2.jpg** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:VanderWaals\\_liquifazione\\_CO2.jpg](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:VanderWaals_liquifazione_CO2.jpg) *Licenza:* GNU Free Documentation License *Autori:* User Marc Lagrange on it.wikipedia

**Image:Energia\_interna.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Energia\\_interna.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Energia_interna.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:Joultom.gif** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Joultom.gif> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Aushulz, Lmbuga, Mdd

**Image:Adiabatic.svg** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Adiabatic.svg> *Licenza:* Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Autori:* User:Stannered

**Image:Carnot-cycle.jpg** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Carnot-cycle.jpg> *Licenza:* sconosciuto *Autori:* Original uploader was Rómuldo Perito at pt.wikipedia

**Image:Clausius\_falso.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Clausius\\_falso.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Clausius_falso.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:Falso\_Kelvin.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Falso\\_Kelvin.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Falso_Kelvin.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:Dimostrazione\_Carnot\_1.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Dimostrazione\\_Carnot\\_1.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Dimostrazione_Carnot_1.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:Dimostrazione\_Carnot2.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Dimostrazione\\_Carnot2.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Dimostrazione_Carnot2.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:Dimostrazione\_Clausius.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Dimostrazione\\_Clausius.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Dimostrazione_Clausius.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:Entropia\_a.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Entropia\\_a.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Entropia_a.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:Entropia\_b.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Entropia\\_b.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Entropia_b.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:Static\_repulsion.jpg** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Static\\_repulsion.jpg](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Static_repulsion.jpg) *Licenza:* Public Domain *Autori:* DJIndica

**Immagine:Charges\_repulsion\_attraction.svg** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Charges\\_repulsion\\_attraction.svg](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Charges_repulsion_attraction.svg) *Licenza:* Public Domain *Autori:* NEURO ⇒

**Immagine:Electroscope showing induction.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Electroscope\\_showing\\_induction.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Electroscope_showing_induction.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Sylvanus P. Thompson

**Immagine:VFPT\_plus.svg** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:VFPT\\_plus.svg](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:VFPT_plus.svg) *Licenza:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Autori:* Geek3

**Immagine:VFPT\_minus.svg** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:VFPT\\_minus.svg](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:VFPT_minus.svg) *Licenza:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Autori:* Geek3

**Immagine:VFPT\_charges\_minus\_minus.svg** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:VFPT\\_charges\\_minus\\_minus.svg](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:VFPT_charges_minus_minus.svg) *Licenza:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Autori:* Geek3

**Immagine:Electric\_Field\_of\_a\_line.PNG** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Electric\\_Field\\_of\\_a\\_line.PNG](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Electric_Field_of_a_line.PNG) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Elinruby, Pasquale.Carelli, Tony Wills

**Image:GAUSS1.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:GAUSS1.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli, Santosga

**Image:GAUSS2.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:GAUSS2.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli, Santosga

**Image:GAUSS3.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:GAUSS3.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli, Santosga

**Immagine:Two\_points\_connect\_in\_two\_way.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Two\\_points\\_connect\\_in\\_two\\_way.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Two_points_connect_in_two_way.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:Potenziale\_dipolo\_elettrico.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Potenziale\\_dipolo\\_elettrico.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Potenziale_dipolo_elettrico.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale Carelli

**Immagine:VFPT\_dipole\_electric.svg** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:VFPT\\_dipole\\_electric.svg](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:VFPT_dipole_electric.svg) *Licenza:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Autori:* Geek3

**Immagine:Dipolo\_en\_campo\_elettrico\_uniforme.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Dipolo\\_en\\_campo\\_elettrico\\_uniforme.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Dipolo_en_campo_elettrico_uniforme.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Chanchohan, Inductiveload, Lmbuga, TStein, WikipediaMaster

**Immagine:Coulomb\_law.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Coulomb\\_law.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Coulomb_law.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:Emptycavity.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Emptycavity.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:CONDGEN.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:CONDGEN.png> *Licenza:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0,2.5,2.0,1.0 *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:CONDPIA.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:CONDPIA.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:CONDPA.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:CONDPA.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:CONDSE.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:CONDSE.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:Fluxtube.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Fluxtube.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale Carelli

**Image:Conservazione dellacarica.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Conservazione dellacarica.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale Carelli

**Image:Conduttoresezionevariabile.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Conduttoresezionevariabile.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale Carelli

**Image:Nodoelettrico.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Nodoelettrico.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale Carelli

**Image:Simbolo resistore.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Simbolo\\_resistore.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Simbolo_resistore.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale Carelli

**Image:Resistenze\_in\_parallelo.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Resistenze\\_in\\_parallelo.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Resistenze_in_parallelo.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale Carelli

**Image:Resistenze\_in\_serie.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Resistenze\\_in\\_serie.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Resistenze_in_serie.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale Carelli

**Image:Generatore\_di\_f.e.m.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Generatore\\_di\\_f.e.m.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Generatore_di_f.e.m.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale Carelli

**Immagine:Generatore\_di\_f.e.m.\_reale.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Generatore\\_di\\_f.e.m.\\_reale.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Generatore_di_f.e.m._reale.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale Carelli

**File:Ramo circuito.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Ramo\\_circuito.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Ramo_circuito.png) *Licenza:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Autori:* User:Pasquale.Carelli

**File:TwofemoneR.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:TwofemoneR.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Jahobr, Pasquale.Carelli

**Image:Schema\_di\_Thevenin.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Schema\\_di\\_Thevenin.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Schema_di_Thevenin.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale Carelli

**Image:Circuito\_equivalente\_di\_Thevenin.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Circuito\\_equivalente\\_di\\_Thevenin.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Circuito_equivalente_di_Thevenin.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale Carelli

**Image:CASCA.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:CASCA.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:MAGNETI.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:MAGNETI.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:FILO.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:FILO.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:MOTOLIN.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:MOTOLIN.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Frank C. Müller, Kuttappan Chettan, Pasquale.Carelli

**Image:Parcar.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Parcar.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:Hall.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Hall.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Image:Spiracampo.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Spiracampo.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:Schema\_macchina\_elettrica.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Schema\\_macchina\\_elettrica.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Schema_macchina_elettrica.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Dmitry G. Len zuò

**Immagine:Electric motor cycle 3.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Electric\\_motor\\_cycle\\_3.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Electric_motor_cycle_3.png) *Licenza:* GNU Free Documentation License *Autori:* Dmitry G, Isi, Tano4595

**Immagine:FILOR.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:FILOR.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:spiram.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Spiram.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:solenoid.svg** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Solenoid.svg> *Licenza:* Public Domain *Autori:* User Nmogueira on en.wikipedia

**Immagine:Ampere.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Ampere.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:Ampere2.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Ampere2.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:Ampere3.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Ampere3.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:Filog.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Filog.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:Coax.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Coax.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:Solen.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Solen.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:Hysteresiscurve.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Hysteresiscurve.png> *Licenza:* GNU Free Documentation License *Autori:* Albedo-ukr, Anarkman, Inductiveload, LoopZilla, Omegatron, Pieter Kuiper, Sarregouset, たね

**Immagine:Alternatore.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Alternatore.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:Simbindu.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Simbindu.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:Transitorio\_induttivo\_a.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Transitorio\\_induttivo\\_a.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Transitorio_induttivo_a.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli, Pieter Kuiper

**Immagine:Transitorio\_induttivo\_b.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Transitorio\\_induttivo\\_b.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Transitorio_induttivo_b.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli, Pieter Kuiper

**Immagine:Generatorecorrentealternata.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Generatorecorrentealternata.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* User:Pasquale.Carelli

**Immagine:GeneratorecorrentealternataconcaricoR.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:GeneratorecorrentealternataconcaricoR.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* User:Pasquale.Carelli

**Immagine:GeneratorecorrentealternataconcaricoC.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:GeneratorecorrentealternataconcaricoC.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* User:Pasquale.Carelli

**Immagine:Sinusoideconsinusoidenanticipo.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Sinusoideconsinusoidenanticipo.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* User:Pasquale.Carelli

**Immagine:Circuitorisonanteseriecongeneratore.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Circuitorisonanteseriecongeneratore.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* User:Pasquale.Carelli

**Immagine:Circuitorisonanteparallelocongeneratore.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Circuitorisonanteparallelocongeneratore.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* User:Pasquale.Carelli

**Immagine:Trasformatore\_con\_carico.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Trasformatore\\_con\\_carico.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Trasformatore_con_carico.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Jahobr, Pasquale.Carelli, Wdwd

**Immagine:Soes18p16.PNG** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Soes18p16.PNG> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli

**Immagine:Deplacement\_current.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Deplacement\\_current.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Deplacement_current.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* User:Pasquale.Carelli

**Immagine:Dimostrazione\_teorema\_della\_divergenza.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Dimostrazione\\_teorema\\_della\\_divergenza.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Dimostrazione_teorema_della_divergenza.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli, Tony Wills

**Immagine:wave.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Wave.png> *Licenza:* GNU Free Documentation License *Autori:* Oleg Alexandrov, Pieter Kuiper, Rogerb, Solon, Yuval Madar, Zimbres

**Immagine:Plane wave wavefronts 3D.svg** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Plane\\_wave\\_wavefronts\\_3D.svg](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Plane_wave_wavefronts_3D.svg) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Onde\_plane\_3d.jpg: Fffred derivative work: Quibik (talk)

**Immagine:Unidimensional\_solid.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Unidimensional\\_solid.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Unidimensional_solid.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli, Pieter Kuiper

**Immagine:VibratingString.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:VibratingString.png> *Licenza:* GNU Free Documentation License *Autori:* Grin, Qef, Werckmeister, Witten

**Immagine:Wave\_motion-i18n.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Wave\\_motion-i18n.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Wave_motion-i18n.png) *Licenza:* GNU Free Documentation License *Autori:* E.Zimbres

**Immagine:Refractive\_index\_vs\_f.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Refractive\\_index\\_vs\\_f.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Refractive_index_vs_f.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli, Pieter Kuiper

**Immagine:Atmosferaerisk\_spredning.gif** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Atmosferaerisk\\_spredning.gif](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Atmosferaerisk_spredning.gif) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Adoniscik, Cepheiden, Jim.henderson, Maksim, 1 Modifiche anonime

**Immagine:TheElectromagneticSpectrum.jpg** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:TheElectromagneticSpectrum.jpg> *Licenza:* Creative Commons Attribution 2.5 *Autori:* Adoniscik, Cepheiden, KristianMolhave, WIB:, Webaware

**Immagine:CIE\_1931\_Luminosity.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:CIE\\_1931\\_Luminosity.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:CIE_1931_Luminosity.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Adoniscik, PAR, Pieter Kuiper, WikipediaMaster, 2 Modifiche anonime

**Immagine:Fermat\_riflessione.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Fermat\\_riflessione.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Fermat_riflessione.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Kilom691, Pasquale.Carelli

**Immagine:Fermat\_rifrazione.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Fermat\\_rifrazione.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Fermat_rifrazione.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Kilom691, Pasquale.Carelli

**Immagine:Specchio.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Specchio.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli, Queeg, Tony Wills

**Immagine:Lente.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Lente.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Havang(nl), Pasquale.Carelli

**Immagine:Ingrandimento.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Ingrandimento.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli, 1 Modifiche anonime

**Immagine:Occhio lente.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Occhio\\_lente.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Occhio_lente.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Frank C. Müller, Kuttappan Chettan, Pasquale.Carelli

**Immagine:Cannocchiale.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Cannocchiale.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Pasquale.Carelli, Pieter Kuiper, 1 Modifiche anonime

**Immagine:Microscopio.png** *Fonte:* <http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Microscopio.png> *Licenza:* Public Domain *Autori:* Akinom, Dietzel65, Pasquale.Carelli

**Immagine:Linear\_polarization\_schematic.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Linear\\_polarization\\_schematic.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Linear_polarization_schematic.png) *Licenza:* Copyrighted free use *Autori:* Doit, EDUCA33E, Fffred, Inductiveload

**Immagine: Circular\_polarization\_schematic.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File: Circular\\_polarization\\_schematic.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File: Circular_polarization_schematic.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Superborsuk

**Immagine: Elliptical\_polarization\_schematic.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File: Elliptical\\_polarization\\_schematic.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File: Elliptical_polarization_schematic.png) *Licenza:* Copyrighted free use *Autori:* Doit, Fffred, Inductiveload, Pieter Kuiper, Stannered, WikipediaMaster, Ysangkok

**Immagine:Fresnel1\_it.png** *Fonte:* [http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Fresnel1\\_it.png](http://it.wikibooks.org/w/index.php?title=File:Fresnel1_it.png) *Licenza:* Public Domain *Autori:* Brachycerophilia, Pasquale.Carelli

# Licenza

---

Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported  
[//creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)

---