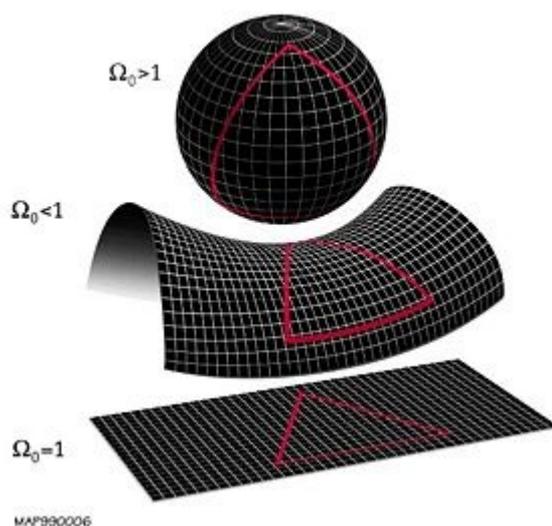


Benvenuto nel wikibook:

Geometrie non euclidee

Autori: [RaminusFalcon](#), [FilippoQ](#)



La versione più aggiornata del libro si trova su:
http://it.wikibooks.org/wiki/Geometrie_non_euclidee

© Copyright 2008, utenti di Wikibooks. Questo libro è stato scritto dagli utenti di Wikibooks.

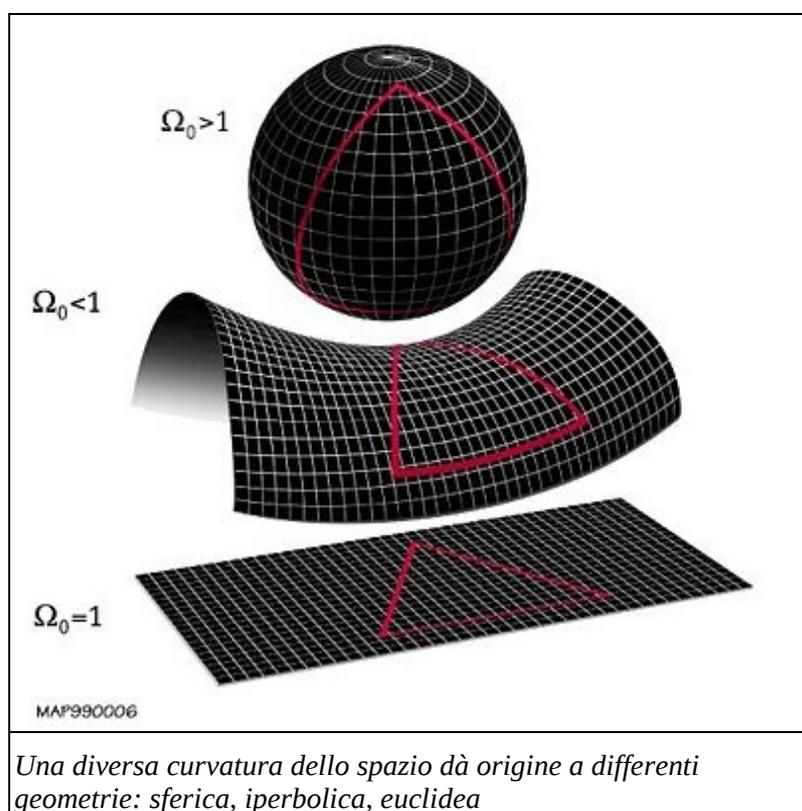
GFDL 2008

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled GNU Free Documentation License.

È permesso copiare, distribuire e/o modificare questo documento secondo i termini della GNU Free Documentation License, Versione 1.2 o qualsiasi versione successiva pubblicata dalla Free Software Foundation; senza le Sezioni Invarianti costituite dalla prima di copertina e dal paragrafo "Licenza". Una copia della licenza è contenuta nella sezione intitolata "Licenza".

Questo libro è un'introduzione all'interessante area delle **geometrie non euclidee** — sorte a partire dall'Ottocento per opera di grandi matematici come Lobacevskij e Riemann.

L'importanza attuale di queste discipline non è limitata alla "matematica pura", ma si estende anche in fondamentali ambiti della fisica moderna, quali la teoria della relatività formulata da Einstein. Lo spazio stesso in cui viviamo è uno spazio non euclideo: di qui si può soltanto intuire il valore di queste discipline.



Libri correlati

* Elementi di Euclide, http://it.wikibooks.org/wiki/Elementi_di_Euclide

Altri progetti

*Wikipedia contiene una voce riguardante le geometrie non euclidee:
http://it.wikipedia.org/wiki/Geometrie_non_euclidee

Introduzione

Fino alla seconda metà del XIX secolo, la geometria aveva sempre conservato all'interno del pensiero occidentale uno statuto speciale tra tutte le scienze. Essa appariva, come la logica, perfettamente conclusa in sé stessa, ma, al contrario di quest'ultima, pur prescindendo dall'esperienza sensibile, era in grado di imporre le proprie leggi al mondo oggettivo.

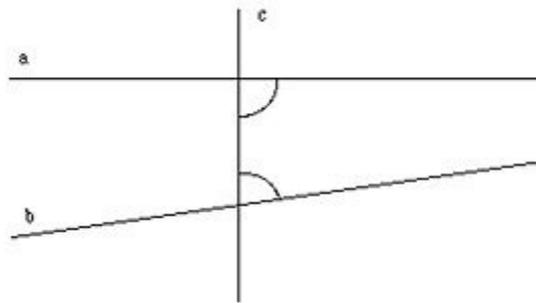
Tale posizione, nata con la fisica razionalistica cartesiana e impostasi con i successi pratici della scienza newtoniana, aveva ottenuta definitiva consacrazione nel sistema filosofico kantiano, che la vedeva come il più tipico esempio di una scienza sintetica *a priori*. Kant sosteneva infatti che lo spazio venisse intuito mediante la forma *a priori* (ovvero innata) del senso esterno, secondo i principi della geometria euclidea, e che quindi non fosse possibile per esseri con un intelletto come il nostro avere una visione del mondo fenomenico che non fosse euclidea. La posizione kantiana garantiva un fondamento solidissimo alla geometria, e quindi alla matematica, insito nella stessa modalità di percezione della realtà da parte dell'uomo.

Nel corso dell'Ottocento, all'interno di quello sforzo di riordinamento e ricerca dei primi principi delle matematiche che si concluse solo con il teorema di Gödel (che sanciva l'impossibilità di una simile operazione), apparve chiaro a molti pensatori che erano possibili altre geometrie oltre a quella euclidea, in quanto essa si basava su alcune affermazioni che non erano né dimostrabili né evidenti. Tali geometrie, pur avendo sancito una crisi profonda della geometria, saranno fondamentali per gli sviluppi della filosofia e soprattutto della fisica (si pensi al concetto di curvatura dello spazio) del XX secolo.

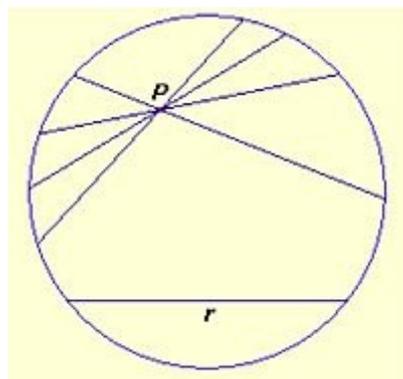
Il problema del V postulato e la sua storia

Il libro I degli *Elementi di Euclide* contiene una serie di principi su cui viene fondata la sua intera geometria, divisi in definizioni, assiomi e postulati (qualsiasi affermazione non dimostrata e non evidente presa per vera in modo da fondare una dimostrazione altrimenti incongruente). Soffermiamoci sui **cinque postulati euclidei** (ritenuti peraltro insufficienti in epoca moderna a fondare in maniera logicamente inattaccabile la geometria, tanto che David Hilbert, nei suoi *Fondamenti della geometria* (1899), una sorta di rifondazione della geometria euclidea, ne adottò 23):

1. Si può condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.
2. Si può prolungare illimitatamente una retta finita in linea retta.
3. Si può descrivere un cerchio con qualsiasi centro e distanza (raggio) qualsiasi.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.
5. Se, in un piano, una retta, intersecando due altre rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette, se indefinitamente prolungate, finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta. Se la somma è uguale a 180 gradi, si hanno allora due rette parallele.



Si può notare immediatamente come il **quinto postulato** risulti molto diverso dagli altri: in primo luogo per la forma ipotetica (se... allora) che è tipica dei teoremi; in secondo luogo, esso non risulta evidente alla ragione e, nei casi limite, non abbiamo alcuna possibilità di verificare sperimentalmente gli effetti della condizione posta, in quanto essi hanno luogo in una regione di piano esterna a quella finita, cui abbiamo fisicamente accesso (ciò è tanto vero che in un eventuale piano finito la proposizione risulta falsa)



Lo stesso Euclide si accorse della particolarità di questo postulato, tanto che evita di usarlo (anche laddove sarebbe possibile) fino al teorema 29, che dice che due rette parallele tagliate da una trasversale formano due quartetti di angoli a due a due uguali o supplementari (gli alterni, i corrispondenti e i coniugati), da cui si dimostra che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180 gradi e quindi anche il teorema di Pitagora.

Dopo la morte di Euclide non passò certo inosservata la particolarità del V postulato. Ritenendo inattaccabile la sua correttezza, si pensò che esso poteva essere ricondotto o all'evidenza o a una dimostrazione mediante una riscrittura del postulato.

Posidonio cercò di ovviare al V postulato scrivendo che:

«Due rette parallele sono due rette che giacendo sullo stesso piano e venendo prolungate indefinitamente, mantengono sempre la stessa distanza tra loro.»

Ciò però non è logicamente identico al V postulato.

Proclo invece affermò che:

«La distanza tra due rette parallele rimane costante.»

Ma non è possibile dimostrare che due rette parallele sono equidistanti: infatti, disegnando un insieme di punti equidistanti da una retta, non si può concludere che esso sia una linea retta – che è un termine primitivo, intuibile ma non propriamente definibile e, in quanto tale, inutilizzabile nelle dimostrazioni.

In epoca moderna i primi a interessarsi della questione, cercando di trovare nuove solide basi per la geometria così come Euclide l'aveva immaginata furono gli inglesi **John Wallis** e **John Playfair**, che sostituirono il postulato rispettivamente con:

«Dato un triangolo è possibile costruirne uno simile.»

e

«Data una retta ed un punto non appartenente ad essa, esiste ed è unica una retta passante per il punto e parallela alla retta data.»

Che è peraltro la più famosa enunciazione del postulato. Tutti questi asserti sono equivalenti al V postulato e perciò come esso indimostrabili e non evidenti.

Su questa scia volta a riconfermare i risultati si inserisce anche **Antonio Saccheri**, che cerca di dimostrare il V postulato non dimostrando proposizioni simili, ma per assurdo, ovvero creando una geometria che non si basi su di esso al fine di evidenziarne delle eventuali contraddizioni interne. Su questa intuizione si baseranno i matematici successivi per elaborare le loro geometrie non euclidee. Egli partì nei suoi ragionamenti dal cosiddetto "**quadrilatero di Saccheri**":



In questa figura, che è un quadrilatero isoscele, i due angoli superiori saranno conformi a tre possibili scenari:

1. La loro somma è pari a due angoli retti
2. La loro somma è inferiore a due angoli retti
3. La loro somma è superiore a due angoli retti.

Riscontrando delle assurdità nelle geometrie basate sull'ipotesi 2 e 3 si sarebbe per assurdo dimostrato il quinto postulato.

Saccheri ritenne di essere riuscito in questa opera tanto da pubblicare i suoi risultati nel trattato *Euclide ab omni naevo vindicatus* (Euclide riscattato da ogni neo). In verità, egli non giunse ad alcun assurdo, ma semplicemente a risultati diversi da quelli previsti dalla geometria euclidea, che ritenne inaccettabili in quanto contrari alla nostra percezione.

L'idea di una geometria puramente teorica e liberata da ogni legame con l'esperienza non verrà mai formulata fino al XIX secolo.

La nascita delle geometrie non euclidee

Dopo due millenni e mezzo passati dai matematici a cercare di dimostrare il V postulato di Euclide, all'inizio dell'Ottocento, si giunse alla teorizzazione di geometrie in cui tale postulato non era valido, ovvero di **geometrie non euclidee**.

Questo passo ha significato un ribaltamento di prospettiva nell'affrontare il problema, poiché la questione dell'indimostrabilità di una proposizione è tutt'altro che semplice; e il problema era di natura sostanzialmente nuova, occorreavano nuove tecniche e strumenti e l'utilizzo di considerazioni di logica matematica non disponibili a quel tempo. Ma, se dimostrare l'indimostrabilità del V postulato poteva sembrare difficile, costruire una geometria sulla sua negazione era oltremodo più complesso – sia a livello teoretico, ma anche (e soprattutto) a livello psico-socio-culturale: da due millenni la geometria di Euclide era stata da tutti ritenuta l'unica valida, l'unica vera, l'unica possibile; e superare questa convinzione dovette essere un gran problema sin per gli stessi scopritori. Se il V poteva ritenersi poco intuitivo, la sua negazione lo sembrava ancor meno!

Alla scoperta di geometrie non euclidee giunsero più o meno contemporaneamente quattro matematici: **Gauss, Schweilkart, Bolyai e Lobacevskij**.

Gauss, considerato il più grande matematico della modernità, fu il primo, attraverso una serie di sporadici tentativi di dimostrazioni del V postulato, a capire che era possibile costruire delle geometrie che lui per primo definì "non euclidee".

Visto il pesante clima culturale del suo tempo, dominato da intellettuali di matrice kantiana (da lui definiti in una lettera come "beoti"), non pubblicò mai nulla di quanto andava creando. Il merito dell'elaborazione di tali geometrie andò, perciò, inizialmente ai due giovani matematici Bolyai e Lobacevskij.

Noi qui tratteremo soltanto di Lobacevskij, che meglio definì il sistema della geometria che sarà chiamata iperbolica. Tratteremo poi anche di **Riemann**, che – qualche decennio più tardi – elaborò una teoria della geometria non euclidea dotata di maggior universalità.

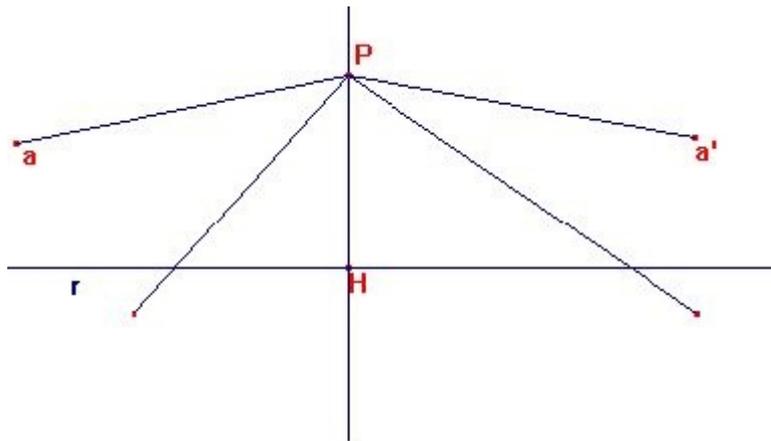
La geometria iperbolica di Lobacevskij

Nel 1829, il matematico russo Nicolaj Ivanovic **Lobacevskij** scrive nell'introduzione alla sua opera *Nuovi principi della geometria*:

«I vani sforzi compiuti dai tempi di Euclide, per il corso di duemila anni, mi spinsero a sospettare che nei concetti stessi della geometria non si racchiuda ancora quella verità che si voleva dimostrare, e che può essere controllata, in modo simile alle altre leggi della fisica, soltanto da esperienze, quali, ad esempio, le osservazioni astronomiche.»

Egli concepisce l'idea che lo spazio fisico reale possa avere alcune caratteristiche diverse da quello euclideo e, in seguito a ciò, ritiene che la geometria debba essere fondata non più su enti ideali (punto, retta, piano), bensì su oggetti geometrici più tangibili e più vicini alla nostra esperienza sensoriale (per esempio i corpi solidi). Questa fisicità porta a considerare vere solo le affermazioni che possono essere verificate sperimentalmente.

In questa ottica Lobacevskij nega, nel V postulato, l'unicità della retta parallela ad una retta data, con le seguenti considerazioni:



Preso un foglio su cui disegnare, dalle dimensioni qualsiasi, se r è una retta e P un punto esterno ad essa, si conduca per P la perpendicolare PH alla retta r e, sempre per P , una retta a che forma con PH un angolo che differisce da un angolo retto per "pochissimo". La retta a non incontrerà la retta r sul foglio di lavoro e potrebbe non incontrarla ad una distanza "ragionevolmente vicina"; potrebbe incontrarla invece ad una distanza al di fuori della nostra percezione, o, proprio per questo, non incontrarla affatto.

Se accettiamo questa ipotesi, per P passano delle rette (secanti) che incontrano la retta r e rette (non secanti) che non la incontrano; le rette a e a' che separano in ciascun semipiano le rette secanti dalle non secanti vengono chiamate rette per il punto P e parallele alla retta r . Lobacevskij allora ritiene validi i primi quattro postulati di Euclide e sostituisce il quinto con il seguente:

«Per un punto passano due rette parallele ad una retta data.»

L'accettazione dell'assioma delle due parallele comporta notevoli conseguenze, fra le quali:

- nessun quadrilatero è un rettangolo
- non esistono triangoli simili, ad eccezione di quando essi sono anche congruenti
- per un triangolo qualsiasi, la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre minore di un angolo piatto.

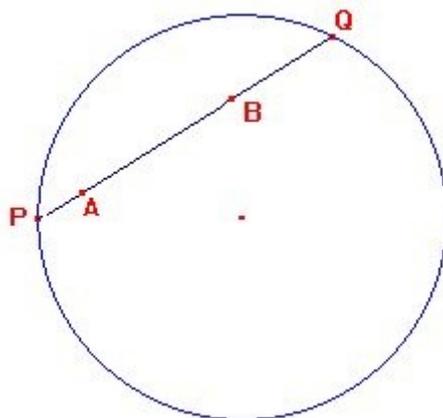
Modelli per la geometria di Lobacevskij

Ci sono alcuni validi modelli che descrivono la geometria di Lobacevskij: i modelli di Klein, di Poincaré e di Beltrami.

Il modello di Klein

Iniziamo dal **modello di Klein**: esso è costruito pensando

- ai punti come i punti interni ad una conica (per esempio una circonferenza)
- alle rette come le congiungenti due punti interni alla conica
- al piano formato dai punti interni alla conica.



Si può facilmente verificare che sono rispettati in questo modello sia gli assiomi di incidenza, sia quelli di ordinamento, sia quelli di continuità.

È invece meno semplice verificare gli assiomi della congruenza, perché per parlare di congruenza è indispensabile parlare di distanza tra punti, e tutto è complicato dal fatto di non poter parlare di segmenti la cui lunghezza supera quella del diametro della circonferenza che abbiamo preso in esame. Klein diede allora una definizione di distanza tra due punti in questo modo:

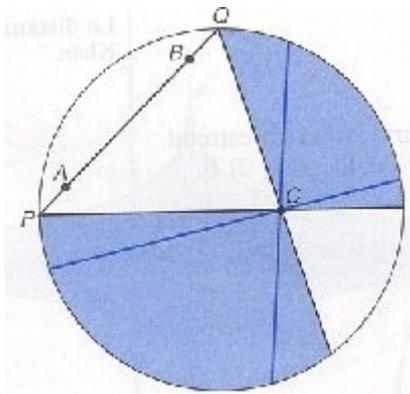
$$d(A; B) = \left| \ln \frac{\frac{AP}{AQ}}{\frac{BP}{BQ}} \right|$$

dove con A e B indichiamo due punti del "nostro piano" e con P e Q gli estremi della corda passante per A e per B (con $AP < AQ$).

Le caratteristiche di questa definizione sono le seguenti:

- la distanza $d(A;B)$ tra due punti è sempre non negativa
- la distanza $d(A;A) = | \ln 1 | = 0$ se A è un punto fisso e B varia sulla "retta" avvicinandosi alla frontiera $d(A;B) = y$

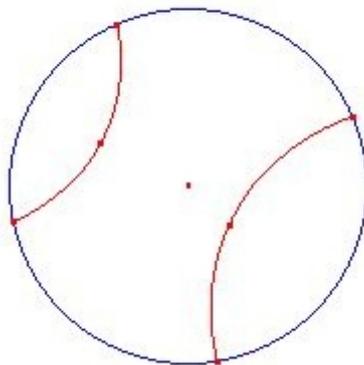
Utilizzando questa definizione di distanza tra due punti, le "rette" risultano avere lunghezza infinita. In tale modello non è verificato l'assioma delle parallele: si consideri infatti la "retta" AB e il punto C esterno ad essa; si può verificare immediatamente che vi sono infinite "rette" che non intersecano la retta data e tali "rette" sono separate da quelle che invece incontrano la "retta" AB da due particolari "rette" che vengono definite parallele ad AB passanti per C.



Il modello di Poincaré

Un altro modello della geometria di Lobacevskij è quello di Poincaré. Il **modello di Poincaré** è costruito pensando:

- i punti come i punti interni ad una circonferenza C
- le rette sono gli archi di circonferenza perpendicolari nei loro estremi alla circonferenza C (nei punti di intersezione le tangenti alle due circonferenze, la C e quella cui appartiene l'arco, hanno tangenti fra loro perpendicolari)
- il piano formato dai punti interni alla circonferenza.

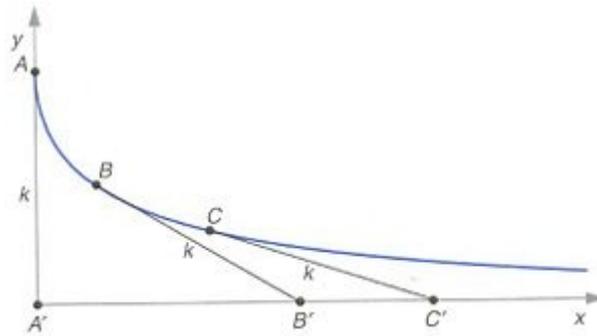


Come si può osservare, in questa situazione le proprietà delle "nuove rette" differiscono da quelle della geometria euclidea, e in particolare non vale più il postulato delle parallele. Questi nuovi enti si comportano esattamente come quelli del modello di Klein, ma con questa sottile distinzione: nel modello di Klein le rette non sono le rette euclidee, nel modello di Poincaré le rette non sono le rette euclidee, ma sono archi di circonferenza euclidee e quindi, sotto questo aspetto, in questo modello si può applicare la geometria euclidea.

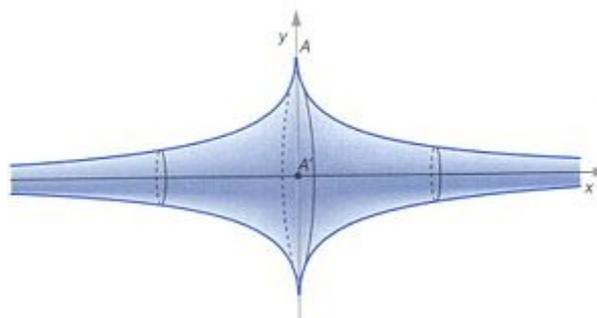
Il modello di Beltrami

Il terzo modello è quello di **Beltrami**, che risulta essere particolarmente importante perché è stato il primo modello proposto per le geometrie non euclidee, ed ha avuto il pregio di convincere gli studiosi della validità di tali studi.

La curva fondamentale è la **trattrice**, definita come il luogo dei punti del piano tali che i segmenti di tangente compresi tra essa e una retta hanno lunghezza costante; tale retta risulta essere asintoto per la curva.



Si consideri adesso la superficie ottenuta ruotando la curva così costruita attorno al suo asintoto (si ottiene la **pseudosfera**).



I punti sono i punti che stanno sulla superficie della pseudosfera e per retta passante per due punti si intende la geodetica, cioè la linea di minima distanza congiungente i due punti; si può ben osservare che per un punto esterno ad una retta passano più rette che non la incontrano.

La geometria di Riemann

Dopo Lobacevskij, altri grandi matematici diedero contributi fondamentali alla costruzione di sistemi geometrici alternativi a quello euclideo. È già stato osservato che l'unica negazione del V postulato coerente con il resto del sistema euclideo è relativa all'unicità della parallela; infatti era nota la contraddittorietà dell'ipotesi dell'ottuso, cioè l'ipotesi che nega l'esistenza della parallela. Restava comunque in sospeso la possibilità (modificando qualcos'altro oltre al V postulato) di costruire geometrie (non-euclidee) in cui si negasse l'esistenza della parallela; o addirittura sistemi geometrici ancora più generali. Un importante contributo alla chiarificazione e soluzione di questi temi venne dato da Georg Friedrich **Bernhard Riemann**.

Nella geometria euclidea, così come in quella di Lobacevskij, si implica, seppur tacitamente, che la retta è infinita, ma con Riemann si apre una nuova via di intendere i concetti fondamentali. Egli infatti fu il primo a introdurre una **distinzione tra illimitatezza e infinità**; tale distinzione gli derivava dal considerare in geometria sia le proprietà di "estensione" sia le proprietà "metriche" e affermava che l'illimitatezza dello spazio possiede una maggiore certezza empirica di ogni altra esperienza esterna, ma che da questo non consegue necessariamente l'infinità; anzi, basterebbe che lo spazio avesse una curvatura costante positiva, seppur minima, ed esso sarebbe certamente finito.

Riemann abbandona quindi la tradizionale concezione euclidea dello spazio inteso soprattutto in senso sintetico (strettamente geometrico) e lo integra con visione più analitica (più rivolta verso il calcolo). Nella teoria di Riemann è di fondamentale importanza il concetto di **varietà n-dimensionale**, che porta ad una generalizzazione del piano e dello spazio cartesiano (concetto che qui però non tratteremo in maniera approfondita, data la sua complessità).

Per meglio spiegare la sua teoria, Riemann utilizza come modello una superficie curva, da cui nasce l'esigenza di introdurre un **valore di curvatura dello spazio**. Secondo tale valore si possono distinguere **tre varietà a curvatura costante**:

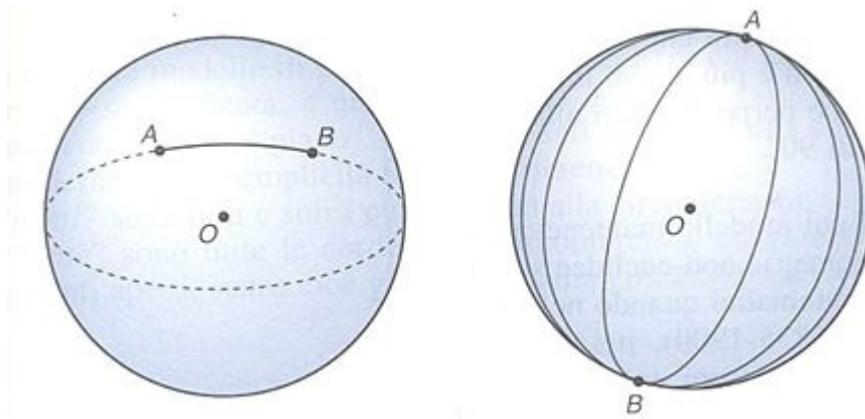
1. **varietà a curvatura negativa (geometria di Lobacevskij o iperbolica)**
2. **varietà a curvatura nulla (geometria di Euclide)**
3. **varietà a curvatura positiva (geometria di Riemann o ellittica).**

L'ultimo caso è quello di cui si occupa Riemann, ed è fondato essenzialmente sull'ipotesi che la retta sia chiusa e finita.

Il modello che Riemann propone è il seguente:

- il piano è costituito da una superficie chiusa (per comodità, potremmo pensare ad una superficie sferica)
- i punti sono i punti su di essa
- le rette per due punti sono i cerchi massimi passanti per essi.

È evidente che in questo modello non esistono rette parallele.



In tale contesto Riemann definisce la linea di minima distanza tra due punti la **geodetica**, cioè l'arco minore di circonferenza che passa per i due punti ed ha il centro nel centro della sfera.

Si può dimostrare che:

- la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di un angolo piatto
- non esistono triangoli simili, salvo quando sono anche congruenti
- tutte le perpendicolari ad una "retta" passano per una medesima coppia di punti, che sono diametralmente opposti.

Non è più valida l'unicità della retta perpendicolare ad una retta data e passante per un punto (la "retta" che passa per A e per B ha come perpendicolari sia la retta AC che la retta BC, entrambe passanti per C). Inoltre, pensando di aumentare la lunghezza dell'arco AB e mantenendo fisso il vertice C, si possono ottenere triangoli in cui la somma degli angoli interni può arrivare fino a 540°.

La "geometria del taxi"

Verso la fine del XIX secolo, il matematico tedesco **Hermann Minkowski** studiò la cosiddetta "geometria del taxi" (*Taxicab geometry* oppure *Manhattan distance* in inglese – vista la conformazione ortogonale delle strade di Manhattan). La caratteristica principale di questa geometria è che la metrica (= distanza) euclidea è sostituita da una nuova, in cui la distanza tra due punti è la somma del valore assoluto delle differenze delle loro coordinate.

Il concetto di distanza nella geometria del taxi

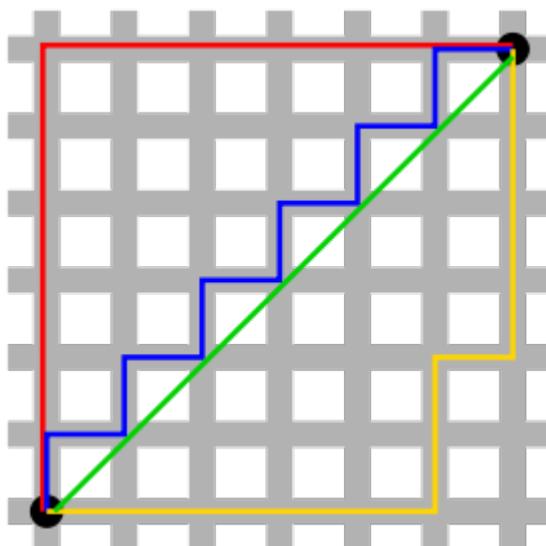
Formalmente, si può definire la **distanza** nella geometria del taxi (in inglese **Manhattan distance**), indicata come distanza L_1 , tra due punti nello spazio euclideo con un fissato sistema di coordinate cartesiane, la somma delle lunghezze delle proiezioni sugli assi cartesiani dei segmenti che congiungono i due punti.

Dunque, la distanza L_1 tra due punti P_1 di coordinate (x_1, y_1) e il punto P_2 di coordinate (x_2, y_2) è

$$L_1(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

La distanza L_1 varia per rotazione del sistema di assi, mentre è invariante per traslazioni e riflessioni.

La distanza L_1 viene anche detta **distanza del taxi**, perché è la minore distanza che dovrebbe essere percorsa da un'automobile per muoversi tra due punti situati in una città suddivisa in isolati quadrati, come Manhattan. Ogni percorso che va da un punto a un altro punto situato 3 isolati a est e 6 isolati a nord dovrà essere lungo almeno 9 isolati. Tutte le strade più dirette sono lunghe esattamente 9 isolati.



Rispetto alla geometria euclidea, nella geometria del taxi non vale il primo criterio di congruenza dei triangoli: è possibile generare due triangoli diversi aventi due lati e l'angolo fra essi compreso ordinamente congruenti. Rimane valido, invece, il V postulato.

Una circonferenza nella geometria del taxi è il luogo di punti che hanno la stessa distanza L_1 dal centro. Queste circonferenze sono in realtà quadrati i cui lati formano un angolo di 45° con gli assi coordinati. In questo contesto, il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza ed il raggio L_1 non è 2π , bensì 8.

Cronologie

Copertina

* (corr) (prec) 19:45, 31 mag 2008 Ramac (discussione | contributi) m (267 bytes) (cambio avanzamento a 100%) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 19:27, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (152 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 19:21, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) m (ha spostato Utente:RaminusFalcon/Copertina a Geometrie non euclidee/Copertina) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 19:19, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (173 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 15:41, 27 mag 2008 Ramac (discussione | contributi) m (162 bytes) (fix) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 12:57, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (113 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 12:56, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (131 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 12:55, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (113 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 12:54, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (92 bytes) (Nuova pagina: {{Copertina | titolo=Geometrie non euclidee |immagine= |px=250 |alt=Geometrie non euclidee }})

Immagine:

(del) (cur) 04:52, 6 January 2006 . . en>User:Voyager Voyager (en>User_talk:Voyager Talk) . . 557x501 (52771 bytes) (Permission of NASA Official: Gary Hinshaw)

Presentazione

* (corr) (prec) 19:50, 31 mag 2008 Ramac (discussione | contributi) m (1.603 bytes) (sistemo) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 19:28, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (1.876 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 19:18, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (1.853 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 19:17, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (1.700 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 19:12, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (2.014 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 12:42, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (33 bytes) (Redirect alla pagina Utente:RaminusFalcon)

Introduzione

* (corr) (prec) 20:03, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (1.865 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 19:22, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) m (ha spostato Utente:RaminusFalcon/Introduzione a Geometrie non euclidee/Introduzione) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 12:49, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (1.828 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 12:36, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (1.801 bytes) (Nuova pagina: Fino alla seconda metà del XIX secolo, la geometria aveva sempre conservato all'interno del pensiero occidentale uno statuto speciale tra tutte le scienze. Essa appariva, come la lo...)

Il problema del V postulato e la sua storia

* (corr) (prec) 09:51, 21 giu 2008 82.60.53.2 (discussione) (5.390 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 20:03, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (5.388 bytes) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 19:22, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) m (ha spostato Utente:RaminusFalcon/Il problema del V postulato e la sua storia a Geometrie non euclidee/Il problema del V postulato e la sua storia) (annulla singola modifica)
* (corr) (prec) 12:49, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (5.351 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 12:37, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (5.324 bytes) (Nuova pagina: Il libro I degli ""Elementi" di Euclide" contiene una serie di principi su cui viene fondata la sua intera geometria, divisi in definizioni, assiomi e postulati (qualsiasi afferm...))

Immagini:

Gne0.jpg

18:43, 26 mag 2008 5240300 (9 KB) RaminusFalcon (discussione | contributi) (Disegno per Geometrie non euclidee {{GFDL}} oppure {{Cc-by-sa-2.5}})

Gne0a.jpg

18:43, 26 mag 2008 3370317 (22 KB) RaminusFalcon (discussione | contributi) (Disegno per Geometrie non euclidee {{GFDL}} oppure {{Cc-by-sa-2.5}})

Gne0b.jpg

18:44, 26 mag 2008 3470188 (7 KB) RaminusFalcon (discussione | contributi) (Disegno per Geometrie non euclidee {{GFDL}} oppure {{Cc-by-sa-2.5}})

La nascita delle geometrie non euclidee

* (corr) (prec) 17:25, 11 ott 2008 94.36.228.54 (discussione) (2.247 bytes) (typo) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 20:03, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (2.247 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 19:22, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) m (ha spostato

Utente:RaminusFalcon/La nascita delle geometrie non euclidee a Geometrie non euclidee/La nascita delle geometrie non euclidee) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 12:49, 27 mag 2008 81.72.123.170 (discussione) (2.210 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 12:37, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (1.617 bytes) (Nuova pagina: Dopo due millenni e mezzo passati dai matematici a cercare di dimostrare il V postulato di Euclide, all'inizio dell'Ottocento, si giunse alla teorizzazione di geometrie in cui tale...)

La geometria iperbolica di Lobacevskij

* (corr) (prec) 20:03, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (2.562 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 19:22, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) m (ha spostato

Utente:RaminusFalcon/La geometria iperbolica di Lobacevskij a Geometrie non euclidee/La geometria iperbolica di Lobacevskij) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 19:21, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) m (2.525 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 12:51, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (2.525 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 12:50, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (2.582 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 12:38, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) m (2.499 bytes) (Nuova pagina: Nel 1829, il matematico russo Nicolaj Ivanovic ""Lobacevskij"" scrive nell'introduzione alla sua opera "Nuovi principi della geometria": « I vani sforzi compiuti dai tempi di E...)

Immagini:

Gne1.jpg

18:44, 26 mag 2008 3870218 (8 KB) RaminusFalcon (discussione | contributi) (Disegno per Geometrie non euclidee {{GFDL}} oppure {{Cc-by-sa-2.5}})

Modelli per la geometria di Lobacevskij

* (corr) (prec) 20:03, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (4.153 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 19:22, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) m (ha spostato Utente:RaminusFalcon/Modelli per la geometria di Lobacevskij a Geometrie non euclidee/Modelli per la geometria di Lobacevskij) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 12:51, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (4.116 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 12:38, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (4.089 bytes) (Nuova pagina: Ci sono alcuni validi modelli che descrivono la geometria di Lobacevskij: i modelli di Klein, di Poincaré e di Beltrami. ===Il modello di Klein=== Iniziamo dal ""modello di Klein"..."

Immagini:

Gne2.jpg

18:44, 26 mag 2008 2640252 (7 KB) RaminusFalcon (discussione | contributi) (Disegno per Geometrie non euclidee {{GFDL}} oppure {{Cc-by-sa-2.5}})

Gne3.jpg

18:45, 26 mag 2008 2050198 (15 KB) RaminusFalcon (discussione | contributi) (Disegno per Geometrie non euclidee {{GFDL}} oppure {{Cc-by-sa-2.5}})

Gne4.jpg

18:45, 26 mag 2008 2010218 (7 KB) RaminusFalcon (discussione | contributi) (Disegno per Geometrie non euclidee {{GFDL}} oppure {{Cc-by-sa-2.5}})

Gne5.jpg

18:45, 26 mag 2008 6120344 (12 KB) RaminusFalcon (discussione | contributi) (Disegno per Geometrie non euclidee {{GFDL}} oppure {{Cc-by-sa-2.5}})

Gne6.jpg

18:45, 26 mag 2008 7630415 (23 KB) RaminusFalcon (discussione | contributi) (Disegno per Geometrie non euclidee {{GFDL}} oppure {{Cc-by-sa-2.5}})

La geometria di Riemann

* (corr) (prec) 20:04, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (3.935 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 19:22, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) m (ha spostato

Utente:RaminusFalcon/La geometria di Riemann a Geometrie non euclidee/La geometria di Riemann) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 12:52, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (3.898 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 12:39, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (3.871 bytes) (Nuova pagina: Dopo

Lobacevskij, altri grandi matematici diedero contributi fondamentali alla costruzione di sistemi geometrici alternativi a quello euclideo. È già stato osservato che l'unica negaz...)

Immagini:

Gne7.jpg

19:11, 26 mag 2008 7530347 (29 KB) RaminusFalcon (discussione | contributi) (Disegno per Geometrie non euclidee {{Cc-by-sa-2.5}} oppure {{GFDL}})

Gne8.jpg

19:12, 26 mag 2008 3920281 (11 KB) RaminusFalcon (discussione | contributi) (Disegno per Geometrie non euclidee {{Cc-by-sa-2.5}} oppure {{GFDL}})

La "geometria del taxi"

* (corr) (prec) 20:04, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (2.455 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 19:23, 31 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) m (ha spostato

Utente:RaminusFalcon/La "geometria del taxi" a Geometrie non euclidee/La "geometria del taxi") (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 12:52, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (2.418 bytes) (annulla singola modifica)

* (corr) (prec) 12:39, 27 mag 2008 RaminusFalcon (discussione | contributi) (2.391 bytes) (Nuova pagina: Verso la fine del XIX secolo, il matematico tedesco "Hermann Minkowski" studiò la cosiddetta ""geometria del taxi"" ("Taxicab geometry" oppure "Manhattan distance" in ingl...)

Immagine:

Manhattan distance.svg

01:14, 25 apr 2006 2830283 (18 KB) Psychonaut ({{Information| |Description=Figure illustrating Manhattan verses Euclidean distance. The red, blue, and yellow lines all have the same length (12), whereas the green line has length $\sqrt{72} \approx 8.4853$ |Source=Created by [[User:Psychona

Licenza

GNU Free Documentation License (<http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>)

Version 1.2, November 2002

Copyright (C) 2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc.

51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software. We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text

formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History".) To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

* A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

* B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

* C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

* D. Preserve all the copyright notices of the Document.

* E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

* F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

* G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

* H. Include an unaltered copy of this License.

* I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

* J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

* K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

* L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

* M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

* N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

* O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties--for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements."

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects. You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.