1. ALGEBRA 1 Rechnen mit ganzen Zahlen (Grundstufe: 1. – 4. Klasse)

Zielstellung: 1. Sicherer Umgang mit Ziffern, Zahlen und Symbolen
2. Die 2 Grundrechenarten und ihr jeweils erster Spezialfall Mal und Geteilt
3. Der Gebrauch von „ + “ und „ – “ als Rechen- und/oder Vorzeichen
3. Beherrschen des Kleinen „1·1“, der höheren Stufe des Summierens
4. Beherrschen von Ergänzungszahlen bis 100
5. Sicheres Anwenden der 3 Grundrechenregeln
6. Erkennen der Zahlvorsätze in ihrer Symbolik vor Größeneinheiten

Entfällt: Begriffe: Addition, Subtraktion, Division, Summand, Minuend, Subtrahend, Divisor, Dividend (kein praktischer Gebrauch)
Additives Verfahren bei Minusrechnung (kein logisches Geradeausdenken)
Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz (durch Sachverstand ersetzen)
Einteilung in Anzahl, Ordnungszahl usw., die Zahl ist generell eine Maßzahl !

1.1 Ziffern, Zahlen, Symbole und Kurzschreibweisen (Codes)

Alle 10 einstelligen „Zahlen“ (Einer) entsprechend der ureigensten Zählmittel 10 Finger sind die ***Ziffern*** (0 bis 9!), aus denen alle weiteren Zahlen entstehen. Das bedeutet, dass ab „Einer“ 0 (!) immer um 1 aufwärts gezählt wird bis 9 und dann die 2. Stelle davor um einen Zähler erhöht wird (Übertrag 1 genannt). Das wiederholt sich, bis auch die 2. Stelle bei 9 ist und die 3. Stelle dazukommt und so fort:

Ziffer-/Zählfolge:	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
	0 . . . 9	0 . . . 9	0 . . . 9	0 . . . 9
	+1	+1	+1	

Eine ***Zahl*** (Zifferncode) wird zum Rechnen	**135** = 1 H + 3 Z + 5 E
stets zerlegt und wieder zusammengefasst:	135 = 1·100 + 3·10 + 5·1

Links die verschlüsselte Form, die Zahl, rechts die ausgeschriebene Summenform
„+“ (Plus) ist das Rechensymbol für die Summe, das Vergleichssymbol ist „ = “
„· “ (Mal) ist bereits eine verschlüsselte Summe: 3·10 = 10 + 10 + 10

Die im Abstand 1 durch Zählfolge 1 entstehenden Zahlen sind die ***ganzen Zahlen*** („natürliche“). Anfänger haben oft Probleme mit der Schreibform der Ziffern, hier eine Lernmöglichkeit:

0 (in 1 Zug eine Runde)
1, 2, 3 (in 2 Zügen, in Abfolge beide gerade, rund/gerade, beide rund)
4, 5 (in 3 Zügen, in Abfolge alle gerade, einer rund)
6 (in 1 Zug eine Runde mit einem „Anstrich“)
7 (7) (in 3 Zügen, alle gerade) (in der Praxis oft 7 zur Unverwechselbarkeit mit 1)
8 (in 1 Zug zwei Rund / „Achterbahn“)
9 (in 1 Zug eine Rund und einem „Abstrich“)

Die gesamte Mathematik besteht aus Kurzschreibweisen der Grundelemente:

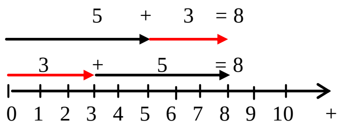
Ziffern	0 und 1	(2 bis 9 sind bereits „Code“)
Rechensymbolen	+ und –	
Vergleichssymbolen	= und ≠	(≠ ungleich, unterteilt in <, >, ≤, ≥)

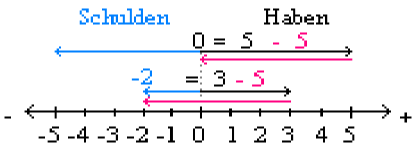
(kleiner, größer, kleiner-gleich ...)

1.2 Die Grundrechnung: Zusammenzählen (Summe) und Abziehen (Differenz)

1.2.1 Die grundlegende Rechenlösung

Das Verrechnen von Zahlen geschieht durch ***Aufsummieren*** (Addieren, Summe bilden,) der Zahlenwerte bzw. dessen Gegenteil ***Abziehen*** (Subtrahieren, Differenz bilden), dem Wegnehmen oder auch Zahlenabstand / Unterschied (*Differenz*) benannt. Grafisch (bildhaft) veranschaulicht wird dies an der ***Zahlengeraden*** mit ihren ***2 Richtungen***:

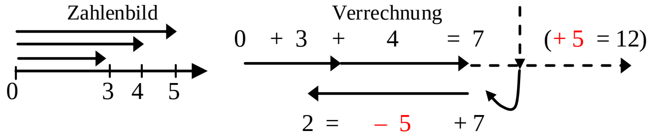




Links wird gezeigt, dass die Rechenreihenfolge vertauscht werden kann, rechts, dass es positive und negative Zahlen gibt. Wird die vorhandene Menge (+5) weggenommen (–5), ist Nichts (0) mehr da. Will ich aber mehr aus(weg)geben (–5) als ich selber habe (+3), muss ich mir noch etwas borgen (–2), also Schulden aufnehmen.

Die ***Zahl ist*** der konkrete Abstand (***Differenz***) zum Zählanfang Null (5 – 0 = 5 oder 0 bis 5). Andererseits führt die ***Summe der Zahlengegenteile*** zum Zählanfang **0**: **5 + (–5) = 0**
Bildhaft besser begreifbar ist die Zahl als Richtungspfeil, da es beim Rechnen entscheidend ist, ob positive (Guthaben) oder negative Zahlen (Ausgaben, Schulden) miteinander verrechnet werden. Schulden müssen ja zurückgezahlt, also vom Guthaben abgezogen werden. Die Zeichen „ + “ und „ – “ können also wahlweise als ***Rechenzeichen*** (Plus / Minus) oder als ***Vorzeichen*** (positiv / negativ) aufgefasst werden. Positive Zahlen sind durch einen rechtsgerichteten Pfeil dargestellt, negative (Schulden) durch einen linksgerichteten.

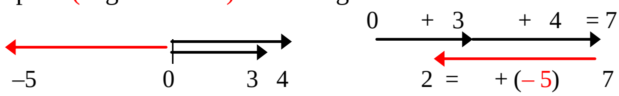
Das ***Verrechnen*** ist das jeweilige ***Aneinanderreihen der Pfeile*** (beim Abakus die Kugeln). Beim Summieren wird die Richtung des Zahlenpfeils nicht verändert, beim Abziehen muss aber logischerweise das Gegenteil gemacht werden, den Pfeil in die Gegenrichtung umklappen.



(± 0) + (+3) + (+4) – (+5) = (+2)
3 + 4 – 5 = 2 → 3 + 4 = 7 ; 7 – 5 = 2

Im ersten Fall sind beide Möglichkeiten, Rechenzeichen und Vorzeichen geschrieben.
Zur Abtrennung werden die Vorzeichen in eine Klammer gesetzt. Der ***Zählanfang* 0** und das ***positive Vorzeichen entfallen*** aber generell (2. Zeile), nur das negative Vorzeichen für einen linksgerichteten Zahlenpfeil (negative Zahl) muss eingeklammert werden:

3 + 4 + (– 5) = 2



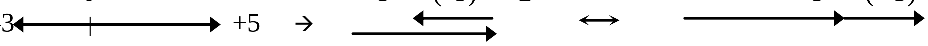
Wir erkennen weiterhin, dass es die gleiche Rechenweise ist, eine positive Zahl abzuziehen – (+5), z.B. Einkaufen (Geld weggeben) oder eine negative Zahl dazuzuzählen +(–5), praktisch der Schuldenanteil (geborgtes Geld) des Gesamtguthabens, der einmal zurückgezahlt werden muss: Guthaben 12 € + Schulden (–5)€ (geborgtes Geld) = 7 € (eigenes Geld)

Das Abziehen positiver Zahlen ist das Gleiche wie das Summieren negativer Zahlen
– (+ 1) = + (– 1) = – 1

Werden andernfalls jedoch Schulden erlassen (nicht zurückgezahlt) – (– 5) , wirkt sich das positiv auf das Guthaben aus (Schulden sind jetzt Guthaben): **– (– 5) = + 5**

Wird das Negative negiert (ins Gegenteil umgedreht), ***ist das Positiv***

0 5 + (–3) = 2 5 – (– 3) = 8

–3  +5

–3 Pfeil an Pfeilspitze +5 ansetzen (Summieren) aber beim Abziehen zusätzlich **umdrehen**

Die Grundrechnung ist bildhaft gesehen das Aneinanderreihen der Zahlpfeile.
Beim Summieren werden die Zahlpfeile nur aneinandergeschoben.
Beim Abziehen wird der Pfeil zusätzlich in die Gegenrichtung umgedreht.

1.2.2 Das Aufspalten/Zerlegen von Zahlen - Ergänzungszahlen

Da keine Einer mit Zehnern verrechnet werden können (1 Apfel + 1 Birne ja auch nicht), sind Zahlen immer aufzuspalten / zu zerlegen.

Beim ***Kopfrechnen*** wird aber immer nur eine Zahl zerlegt. Man rechnet entweder *über* die vollen (runden) 10er, 100er... oder *mit* runden Zahlensprüngen:

		1. Zw.rchng.	2. Zw.rchng.	3. Zw.rechng.	
16 + 7	→	16 + 4 + 3	→ 16 + 4 = 20,	20 + 3 = 23	(Ergänzungszahl 4 für 16)
16 + 9	→	16 + 10 – 1	→ 16 + 10 = 26,	26 – 1 = 25	(Ergänzungszahl 1 für 9)
78 + 56	→	78 + 22 + 34	→ 78 + 22 = 100,	100 + 34 = 134	(Ergänzungszahl 22 für 78)
78 + 56	→	78 + 50 + 6	→ 78 + 50 = 128,	128 + 6 = 134	(50er Sprung + 6))

Die ***Kunst der Aufspaltung*** :
Maximal 3 Zwischenrechnungen mit möglichst ***niedrigen Zahlen***.
In Bsp.1/3 wird in die Ergänzungszahl (4; 22) für die nicht zerlegte Zahl (16; 78;) aufgespalten. Der große Vorteil ist, dass die 2. Spaltzahl (3; 34) nicht mehr „verrechnet“, sondern nur an die „Volle“ drangehängt wird, da diese wieder Zählanfang 0 bedeutet und im Ergebnis sowieso benannt ist: Dreiundzwanzig (3 +(und) 20 = 23), Einhundertundvierunddreißig (100+34 = 134). In Bsp. 2 ist aber die 9 nicht in 4+5, sondern günstiger in 10–1 „zerlegt“ (um 1 ergänzt) worden. Ein 10er- oder 100er-Spung in der Zwischenrechnung ist eben einfacher. Der Vorteil liegt hier darin, bei großen Zahlen kleine zu verrechnende Ergänzungs- bzw. Spaltzahlen zu bekommen. In Bsp. 4 wird mit einem 50er-Sprung und kleiner Spaltzahl 6 gerechnet.

Eine ***Ergänzungszahl*** ist die Differenz einer Zahl zu einem „vollen/runden“ 10er oder 100er

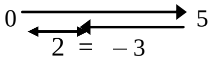
Das Aufspalten in ein- und zweistellige Ergänzungszahlen muss genauso beherrscht werden wie das spätere Kleine Einmaleins!

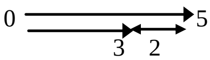
Beim ***schriftlichen Rechnen*** werden alle Zahlen stets nach ihrer Stellenverschlüsselung E_{iner}, Z_{ehner}, $H_{underter}$ aufgespaltet, so dass innerhalb des Stellenwertes nur mit Ziffern gerechnet wird. Die schriftliche Summe wird folgendermaßen ermittelt:

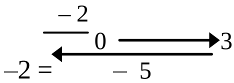
H Z E	sprich	schreibe	oder in Zeile (meist Kopfrechnen)	
3 4 5	4 plus 5 gleich 9	9	(300+40+5) + (200+30+4)	→ zerlegen
+ 2 3 4	3 plus 4 gleich 7	7	300 + 200 + 40 + 30 + 5 + 4	ordnen
5 7 9	2 plus 3 gleich 5	5	500 + 70 + 9	rechnen

Abziehen bedeutet Rückwärtszählen. Das Ergebnis ist der Zahlabstand zu 0 und gleichzeitig der Größenunterschied der beiden Zahlen. Diese ***Differenz*** wird aber oft viel günstiger als direkter Zahlenvergleich über das Vorwärtszählen (***Ergänzen***) von der kleineren zur größeren Zahl ermittelt, bildhaft von Pfeilspitze zu Pfeilspitze. Zu Beachten ist lediglich, dass das Ergebnis immer das ***Vorzeichen der größeren Zahl*** bekommt!

Rechnung: +5 – 3 = +2 gedanklich: von 3 bis 5 = 2 (Differenz) aber 3 – 5 = – 2







Beim mündlichen Rechnen wird sowohl nach vorn gezählt (von - bis), als auch rückwärts (Zahl abziehen), je nachdem, wo man weniger zu zählen hat. Schriftlich wird generell das von-bis-Prinzip angewendet:

	H Z E		sprich:	schreibe:
	8 5 4	854	von 1 bis 4 ist gleich 3	3 E
–	2 3 1	– 231	von 3 bis 5 ist gleich 2	2 Z
	6 2 3	623	von 2 bis 8 ist gleich 6	6 H

Eine unlogische Rechnung ist das „Additive Verfahren“, am obigen Beispiel 1+3 = 4, 3+2 =5 usw. Dort wird bereits die Kontrollrechnung Summe verwendet, noch bevor das Ergebnis ausgerechnet ist! Das ist kein logisches Geradeausdenken!

So wie hier die Zahlen in ihre Einzelteile Einer, Zehner, Hunderter zerlegt und verrechnet werden, werden in der gesamten Mathematik die einzelnen Glieder einer Gleichung zerlegt und gleichartig verrechnet. Dies ist der immer gleiche und <u>einzige</u> Lösungsweg!

Summe und Differenz bilden sind praktisch nicht trennbar. Sie bilden eine Einheit.

Jede Rechnung kann in ihre Gegenrechnung umgeformt (umgeschrieben) werden, ohne sie zu verändern, indem Rechenzeichen <u>und</u> Vorzeichen umgedreht werden (<u>doppeltes Negieren</u>!):

5 – (+3) = **2** oder auch 5 + (–3) = **2**

Die gleichen Verhältnisse liegen vor, wenn eine Rechnung mit ihrer Gegenrechnung kontrolliert wird, indem die Zahl auf die Gegenseite geschrieben <u>und</u> ihr Rechenzeichen umgedreht wird (<u>doppeltes Negieren</u> oder kurz: Gegenseite - Gegenrechnung) :

5 – 3 = 2 denn 2 + 3 = 5

Die ***Gleichung*** ist die Zeilenform einer Rechnung gegenüber der Spaltenform, dem Untereinanderschreiben. Letztere wird später nur in Tabellen genutzt.
<u>2. Betrachtung</u>: Eine ***Zahl*** (das Ergebnis) ***kann x-beliebig*** in andere Zahlen und Rechenarten ***zerlegt*** (umgeformt) ***werden***. Dies wird bei weiteren Rechenaufgaben noch sehr wichtig sein!

10 = 5 + 5 = ... = 2E5
10 = 6 + 4 = (3 +3) + (2 +2) = (2 +2 +2) + (2 +2) = 5E2
10 = 2 + 8 = 2 + (4 + 4) = 2 + (2 + 2) + (2 + 2) = 5E2
10 = 1 + 9 = 1 + (4 + 5) = 1 + (3 + 3 + 3) = 1 + (3E3)
10 = 50 – 40 = (2E25) – (4E10)
10 = 100 : 10 (4. Klasse)
10 = √100 (8. Klasse)

1.2.3 Mehrfachsummen und Mehrfachdifferenzen - der Übertrag und das Borgen

	H	Z	E			
	2	6	7	E : 6 + 8 (14) + 4 (18) + 7 = 25 E	schreibe 5 Einer	+ 2 Zehner dazu
+	5	8	4	Z: 2(Übertrag) + 7 +5 + 8 + 6 = 28 Z	schreibe 8 Z	+ 2 Hunderter dazu
+	3	5	8	H: 2(Übertrag) + 4 + 3 +5 + 2 = 16 H	schreibe 6 H	+ 1 Tausender
+	4 +2	7 +2	6	T: 1(Übertrag)		
1	6	8	5			

Beim ***Aufsummieren*** der Einer kommt man in den Zehnerbereich. Da nur Gleichartiges zusammengezählt, also untereinander geschrieben werden darf, muss die Anzahl der entstandenen Zehner unter den Zehnern als ***Übertrag*** (rot) gut geschrieben werden. Diese Verfahrensweise gilt entsprechend für alle Stellenwerte.

Das mehrfache ***Abziehen*** einzelner (positiver) Zahlen ist gleich dem Aufsummieren negativer Zahlen. Am Günstigen ist jedoch die Zahlensumme, die dann nur einmal abgezogen wird:

856 – 234 – 362 – 123 = 856 + (– 234 – 362 – 123) oder 856 – (+234 + 362 + 123)

Anwendung

	H	Z	E				
	8 −1	5 −1	6				
– +	2	3	4	E : 3 + 2 + 4 = 9	bis 16 E	(1 Z „geborgt", unten wieder dazu)	= 7 E
+	3	6	2	Z : 1 + 2 + 6 + 3 = 12	bis 15 Z	(1 H „geborgt")	= 3 Z
+	1 +1	2 +1	3	H : 1 + 1 + 3 + 2 = 7	bis 8 Hunderter		= 1 H
	1	3	7				

In der Ausgangszahl müssten die Zehner und Hunderter um jeweils 1 verkleinert werden, da 1 Zehner für das Verrechnen der Einer weggenommen (geborgt) wurde und ebenso 1 Hunderter für das Verrechnen der Zehner. Da es nun aber die gleiche Verrechnungsweise ist, von einer positiven Zahl abzuziehen oder zu einer negativen Zahl dazuzuzählen, wird zur ***einfacheren Gleichbehandlung mit der Mehrfachsumme die oben geborgte Ziffer stattdessen bei der Minuszahl unten dazugeschrieben und die Ausgangszahl belassen.***

Das bisher erläuterte Sachverständnis ist die Grundlage der gesamten darauf aufbauenden Algebra (Gleichungslehre)! Sie kann mit 3 allgemeingültigen Rechenregeln umfassend und erschöpfend abgehandelt werden:

1.2.4 Die 3 grundlegenden Rechenregeln

Alle aus der Grund(Strich-)Rechnung Summe / Differenz hervorgehenden höheren Rechenweisen gibt folgender Überblick zum jeweiligen Gebrauch bzw. zur Vorausschau:

		höhere Stufe →	Codierung ; Verrechnung
a^x	log	Exponential-Fkt. (spezielle Potenz) und Logarithmus	10. Klasse
x^n	$\sqrt{x}$	Potenz und Wurzel als spezielles Mal und Geteilt	8. Klasse
·	: $^Z/_N$	Mal und Geteilt/Bruch als spezielle Summe/Differenz	3. Klasse
Σ; ∫	Ç; $^{dy}/_{dx}$	allgemeines Summensymbol u. Differenz-(Verhältnis)	11. Klasse
+	–	Plus und Minus als spezielle ***Grundrechensymbole***	1. Klasse

Diese Unterteilung wird entsprechend der Klassenstufe ständig wiederholt und vertieft. Alle weiteren Rechenregeln können daran abgelesen werden und man muss sie nicht extra „lernen".

1. Regel: Nur ***Gleichartiges*** kann verrechnet werden!

Das genaue Zusammen- oder Untereinanderschreiben und Verrechnen von Zahlen ergibt sich von ganz allein durch die ***gleichartige Bezeichnung*** von Einern, Zehnern, Hundertern, denn jeweils nur diese können miteinander verrechnet werden! Später gilt das Gleiche für x, x^2, y, gleichnamige Brüche, Glieder (Terme) sowie Funktionen.

2. Regel: Die ***Reihenfolge*** der Verrechnung geht ***von der höheren zur niederen Rechenart***, nur die ***Klammer*** unterbricht die Reihenfolge! Bei gleicher Rechenart ist die Reihenfolge egal. (ersetzt Aussage von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributiv-„Gesetz“. Man sagt kurz: ***Punktrechnung geht vor Strichrechnung***

$2 + 5 - (+ 5 - 3) = 2 + 5 - (2) = 6$ (Klammer zuerst rechnen) ; aber auch
→ $2 + 5 + (-5) + 3$ . . . . $= 6$ (Klammer auflösen durch Vorzeichenumkehr,
(s. Regel 3: Doppeltes negieren , Rechenzeichen + und die Vorzeichen)

3. Regel: Beim Umformen der Gleichung oder eines Gliedes wird immer ***doppelt negiert***! oder beide Seiten einer Gleichung/Ungleichung, eines Bruches ***gleichartig ändern*** Kurzfassung: ***Gegenseite → Gegenrechnung***

In der Mathematik trifft diese ***Regel*** den ***Hauptkern der Aufgabenlösung***: Das Zerlegen, die Umformung, das Zusammenfassen und die Umstellung der Zahlen bzw. Glieder (Terme). Die Unbekannte muss herausgestellt (eliminiert, die Gleichung aufgelöst) werden. Es entsteht die Berechnungsformel. Egal wie „kompliziert“ die Gleichung ist, wird die Zahl (das Glied) auf die Gegenseite gebracht, muss die Gegenrechnung angewendet werden (doppelte Umkehrung: Gegenseite und Gegenrechnung, beim Bruch später sind es die 2 „Seiten“ Zähler und Nenner).

Aufgabe: $3 + x = 11 \quad | -3$
Ausführlich: $-3 + 3 + x = 11 - 3$ → $0 + x = 11 - 3$ (gleichartiges Ändern beider Seiten)
Kurzfassung: $+3 + x = 11$ → $x = 11 - 3$ (Gegenseite mit Gegenrechnung)

Negation (Negieren) heißt Umkehr, Gegenrichtung oder Gegenlösung
Doppelte Umkehr bedeutet aber keine Wertänderung, die Gleichung bzw. das Ergebnis bleibt gleich. Die Verrechnung von Klammern wird durch dieses Verständnis kaum noch falsch gelöst:

$-$ (-3)	=	$+3$	oder	$(-2) \cdot (-3) = \mathbf{+6}$	⟷	$+2 \cdot (-3) = \mathbf{-6}$
Gegenteil vom Negativen	=	Positiv	oder	doppelt negiert = positiv		1mal negiert = negativ

Diese Regel allgemeiner formuliert in *Gegenseite → Gegenprinzip* hat aber noch ein viel größeres Anwendungsgebiet. Nicht nur in der Mathematik, sondern in allen Wissenschaftsbereichen ist sie gültig, da die Natur dual (2seitig) aufgebaut ist! Man braucht nur eine Seite richtig zu begreifen und kennt damit auch die Gegenseite als deren Umkehrprinzip. Damit wird auch das ***Lernen auf die Hälfte reduziert***, wenn man richtig Schlussfolgern (logisch denken) kann. Im späteren Fach Technik ist diese Betrachtung wichtig für das logische „Nicht“, das den technischen Gegenzustand darstellt (symbolisiert). Die Elektrotechnik z.B. hat nur 2 Schaltzustände „An“ und „Aus“. Alle Dezimalzahlen (Ziffern 0 bis 9) müssen deshalb für die Technik in Dualzahlen (nur 0 und 1) umgewandelt (codiert) werden!

1.3 Der 1. Rechen-Spezialfall: Multiplizieren (Produkt) und Teilen (Bruch)

1.3.1 Das Multiplizieren (Malnehmen, Vervielfachen) - das Produkt

Ein ***Spezialfall*** ergibt sich, wenn immer die gleichen Zahlen aufsummiert werden, z.B. die Dreier-Reihe:

Faktor Grundzahl

3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30 = 10 · 3

Faktor Anzahl

Zahlenreihen können mit der logischen Aussage „Ich soll die Zahl 3 10mal summieren" kürzer gefasst (codiert) werden als ***Produkt*** „ $10 \cdot 3_{\text{summiert}}$ ".

Der Spezialfall der Summe gleicher Zahlen wird also zur höher verschlüsselten Rechenform Produkt bzw. Rechenart Multiplikation. Oft noch falsch wird nur das Ergebnis als Produkt bezeichnet. Die 2 Faktoren genauer betrachtet stellen die Anzahl der gleichen Grundzahlen dar! Multiplikation, Malnehmen, Vervielfachen und Produkt bezeichnen die gleiche Rechnung. ***Multiplikation als Rechenweise*** und ***Produkt als Schreibform*** sind in der Praxis üblich. Ebenso wird praktisch in der Grundrechnung nur Summe und Differenz (bilden) gesagt.

Ein ***Produkt*** = ***Faktor*** mal ***Faktor***: 24 = 4 · 6 = 6+6+6+6 = 2·10 + 4·1 oder
24 = 6 · 4 = 4+4+4+4+4+4
Zahl → Produkt(form) Summen- (Normalform)

Eine ganze Zahl kann in 2 Schreibformen umgeformt (zerlegt) werden: In ihre Faktoren (ihre ***Produktform***) oder in ihre Summanden (ihre ***Normalform***, die Grundrechnung). Dabei zählen die beiden Glieder (2·10) und (4·1) als Summanden, da ihre äußere Verrechnung „+" ist. Die Klammern müssen nicht gesetzt werden, da Punktrechnung enger verbindet (2. Rechenregel)!

Alle Ziffernreihen (außer 0 und 1) der Abfolge nach als einzelne Produkte geschrieben, werden als „Kleines Einmaleins" bezeichnet.

Das „**Kleine Einmaleins**"

Beim Erlernen oder besser ***Einprägen*** des Kleinen „**1x1**" (die Ergebnisse dürfen nicht erst errechnet werden!) wird mit folgender Systematik der sicherste und schnellste Erfolg erzielt: Wenn man nicht über die einzelnen Ziffernreihen, sondern über die wenigen sich ergebenden Produktergebnisse des Einer-, 10er-, 20er- bis 80er-Bereiches geht, werden sowohl Wiederholungen durch Faktorentausch als auch falsche Ergebnisse vermieden.

4	2·2	**10**	2·5	**20**	4·5	**30**	5·6	**40**	5·8	**54**	6·9	**72**	8·9
6	2·3	**12**	2·6; 3·4	**21**	$\boxed{3\cdot7}$	**32**	$\boxed{4\cdot8}$	**42**	6·7	**56**	7·8		
8	$\boxed{2\cdot4}$	**14**	$\boxed{2\cdot7}$	**24**	$\boxed{4\cdot6}$;3·8	**35**	$\boxed{5\cdot7}$	**45**	$\boxed{5\cdot9}$				
9	$\boxed{3\cdot3}$	**15**	$\boxed{3\cdot5}$	**25**	5·5	**36**	6·6 ; 4·9	**48**	$\boxed{6\cdot8}$	**63**	$\boxed{7\cdot9}$	**81**	9·9
		16	4·4 ; 2·8	**27**	3·9			**49**	7·7	**64**	$\boxed{8\cdot8}$		
		18	3·6 ; 2·9	**28**	4·7								

Der ***Zählanfang*** **1** = „1EZiffer" ist weggelassen, da es die Ziffer selber ist und ebenfalls das 10fache, da an die Ziffer nur eine Null angehängt wird!
An einem Tag nur einen 10er Bereich erlernen, also maximal nur 6 Ergebnisse mit ihren dazugehörigen Produkten. Die Ergebniszahlen (fett) ohne Beachtung der Produkte 5 min vorwärts (4→ 6→ 8→ 9) und 5 min rückwärts (9→ 8→ 6→ 4) ***einprägen***. Nach kleiner Pause die Produktfolge (2·2, 2·3, 2·4, 3·3) mit Vertauschen der Faktoren der Reihe nach vorwärts 5min abfragen lassen, dann rückwärts und erst zuletzt durcheinander. Der schnelle Lerneffekt liegt darin verborgen, dass beim reihenweise Abfragen das Ergebnis bereits im Kopf ist und die dazugehörigen

Faktoren bzw. Produkte sich leichter einprägen. Ein falsches Ergebnis wird dadurch kaum genannt. Am nächsten Tag wiederholen. Mit den anderen Zehnerbereichen genauso verfahren. Ein zusätzlicher Lerneffekt ist die Tatsache, dass einen Zähler unterhalb des Ergebnisses gleicher Faktoren (später Quadratzahl genannt) das Produkt aus dem nächstniedrigeren Faktor mal dem nächsthöheren Faktor liegt: z.B. $4 \cdot 4 = 16$, $3 \cdot 5 = 15$

Schriftliches Multiplizieren und sehr große Zahlen:

Da das Produkt nur die codierte Summenbildung ist, wird in der gleichen Weise verfahren: Die Zahlen werden aufgeschlüsselt, einzeln nach dem Kleinen „1x1" malgenommen und ihre Ergebnisse aufsummiert z.B.

				Übertrag
238 · 4 → (200 + 30 + 8) · 4 →	8 E · 4 = 32	Einer	= 32	Zehner
	+ 3 Z · 4 = 12	Zehner	= 120	Hunderter
	+ 2 H · 4 = 8	Hunderter	= 800	
	952		952	

Das 3zeilige Verfahren wird nur gedanklich mit Stellenübertrag gerechnet und als eine Zeile geschrieben. Dies bringt auch eine kürzere Schreibweise, wenn beide Faktoren mehrstellig sind:

238 · 4 2 5

238 · (4·100 + 2·10 + 5·1) → 238 · 4 · 100 (H) → ZT T 9 5.200 (8_{+1} 12_{+3} 32 00)

+ 238 · 2 · 10 (Z) → + 4.760

+ 238 · 5 · 1 (E) → + 1.190

1 0 1.150 (EinhunderteinsTausend undeinhundertfünfzig)

HT

Tausendvielfache (Dreiergruppen) **werden bei sehr großen Zahlen zur besseren Übersicht mit Punkt abgetrennt**.

Kurzfassung: 238 · 4 2 5		
9 5 2 0 0	4 mal 8 gleich 32	schreibe 2 merke 3 Z (Ü)
+ 4 7 6 0	~~4 mal 3 gleich 12 + 3 Z~~	~~schreibe 5 merke 1 H (Ü)~~
+ 1 1 9 0	~~4 mal 2 gleich 8 + 1 H~~	~~schreibe 9 H für 1. Zeile~~
1 0 1.1 5 0	. . . für 2. + 3. Zeile gleiche Vorgehensweise	

Ob beim 2. Faktor (425) mit dem höchsten Stellenwert 4 oder dem Einer 5 begonnen wird ist unwesentlich. Die Ergebnisse müssen nur ***stellenmäßig richtig untereinander*** stehen. Für nicht belegte Stellenwerte werden die Nullen (gelb) nicht extra hingeschrieben.

Ergebniskontrolle: Da die Gegenrechnung Teilen noch nicht beherrscht wird, kommt nur eine ***Überschlagsrechnung*** mit den „Vollen" in Frage:

238 · 425 → 200 · 400 = 80.000

40 · 400 = 16.000

240 · 400 = 96.000

Es ist darauf zu achten, wieviel bei den Faktoren auf- oder abgerundet wurde, um den Überschlag richtig einzuschätzen: 2· 400 ist zuviel gerechnet, aber 238·25 fehlen noch! Das richtige Ergebnis muss also im 6stelligen Bereichliegen liegen!

Große Zahlen: 432.567.123

H Z E M H Z E T H Z E (immer nach der 3. Stelle von E Z H ergibt sich ein neuer Begriff!

4 3 2 . 5 6 7 . 1 2 3 VierhundertzweiunddreißigMillionen . FünfhundertsiebenundsechzigTausend . Einhundertdreiundzwanzig

Das „Klammerrechnen" speziell ***Ausklammern*** (Faktorisieren):

Um mit möglichst kleinen Zahlen zu rechnen, werden aus größeren Summanden bei Vorhandensein einer gleichenthaltenden Zahl (hier die 2) diese als gemeinsamer Faktor vor die einzuklammernde Gesamtsumme geschrieben:

$200 + 30 + 8 = 2\cdot(100 + 15 + 4)$ da $2\cdot100 + 2\cdot15 + 2\cdot4 = 200 + 30 + 8$

Ausklammern → Gegenverfahren (Probe): ***Ausmultiplizieren***

oder	$3\cdot7 + 3\cdot5$	=	$3\cdot(7+5)$	=	36
	$21 + 15$	=	$3\cdot12$	=	36
	Normalform: erst Punktrechnung	⇔	Produktform: erst (Klammer-)Summe		

Das Produkt von Summen:

$$(3+5)\cdot(7+5) = 3\cdot7 + 3\cdot5 + 5\cdot7 + 5\cdot5$$

→ *jedes* Glied der einen mit *jedem* Glied der anderen Klammer ausmultiplizieren

Eine ***Gegen-*** bzw. ***Umkehrrechnung*** ist als Kontrollrechnung unerlässlich. Das ist das ***Teilen*** bzw. die ***Bruchrechnung***. Sie wird später noch sehr ausführlich behandelt, denn sie ist der Hauptanteil der Mathematik. Jede Kommazahl (gebrochene Zahl) beinhaltet die Bruchrechnung! Die Grundlagen dazu werden in der 5. bis 7. Klasse vermittelt.
Eine Kontrolle des begriffenen Sachzusammenhangs zwischen Grundrechnung Summieren und höherer Stufe Multiplizieren muss aber ebenfalls sein. So sollte öfter auch das Umwandeln eines Produktes in seine tiefere Form Summe geübt werden:

$3\cdot4 = 12$	→	$4+4+4 = 12$ oder $4\cdot3 = 3+3+3+3 = 12$
$3\cdot2\cdot4 = (3\cdot2)\cdot4 = (6)\cdot4 = 24$	→	$(2+2+2) + (2+2+2) + (2+2+2) + (2+2+2) = 24$ oder
$2\cdot3\cdot4 = (2\cdot3)\cdot4 = (6)\cdot4 = 24$	→	$(3+3) + (3+3) + (3+3) + (3+3) = 24$ oder
$2\cdot4\cdot3 = (2\cdot4)\cdot3 = (8)\cdot3 = 24$	→	$(4+4) + (4+4) + (4+4) = 24$ oder . .
$4\cdot2\cdot3 = (4\cdot2)\cdot3$, $4\cdot3\cdot2 = (4\cdot3)\cdot2$, $3\cdot4\cdot2 = (3\cdot4)\cdot2$		

Kopfrechnen:

Im Gegensatz zum schriftlichen werden zuerst die höheren Stellenwerte gerechnet. Nach jedem Teilschritt werden die aufzusummierenden Zahlen kleiner und der Behalteneffekt der Zwischenergebnisse verbessert!

$238\cdot4 = 200\cdot4 + 30\cdot4 + 8\cdot4 = 800 + 120 + 32 = 952$

Günstiger jedoch: $(240 – 2)\cdot4 = 200\cdot4 + 40E4 – 2\cdot4 = 800 + 160 – 8 = 952$

Besonders das Vervielfachen mit den „***Vollen***" ohne zu rechnen wird ausgenutzt. Wie beim Summieren die Ergänzungszahlen eine einfachere Rechnung ergeben, werden beim Multiplizieren zusätzlich ***Verhältnisse zur 10*** oder **100** aufgestellt.

$28\cdot5$ (Hälfte von 10)	→	$28\cdot10 = 280$; die Hälfte davon ist gleich 140
$28\cdot9$ $(10 – 1)$	→	$28\cdot10 = 280$; $280 – 28\cdot1 = 280 – 20 – 8 = 252$
$28\cdot16$ $(10 + 5 + 1)$	→	$28\cdot10 = 280$; $280 + {}^{280}/_2 = 420$; $420 + 1\cdot28 = 448$
$28\cdot48$ $(100:2 – 2)$	→	$28\cdot100 = 2800$; $2800 : 2 = 1400$; $1400 – 2\cdot28 = 1344$
*$(:2\cdot100 – 2)$	→	$28 : 2 = 14$; $14\cdot100 = 1400$; $1400 – 2\cdot28 = 1344$
$8\cdot27$ $(20 + 7)$	→	$(8\cdot20) + (8\cdot7) = 160 + 56 = 216$
*$(30 – 3)$	→	$(8\cdot30) – (8\cdot3) = 240 – 24 = 216$
* günstiger, weil mit kleineren Zahlen gerechnet wird		

1.3.2 Das Teilen („Dividieren“) **auf ganze Zahlen -** der ganzzahlige Bruch

Bisher wurde durch die natürliche Zählweise 1, 2, 3 . . . generell die Zahlenart „ganze Zahl“ verwendet. Aus Erfahrung wissen wir, dass beim Aufteilen einer Sache diese hinterher nicht mehr ganz, sondern in „Bruchteile“ zerkleinert ist. Dies wird in der gegenteiligen Zahlenart „gebrochene Zahl“ ausgedrückt. 2 mögliche Formen davon sind die ***Kommazahl*** und der ***Bruch***. Dieser Abschnitt ist die Einführung in die Bruchrechnung, aber vorerst noch mit ganzen Zahlen. Die Bruchrechnung wird hier als Teilerverhältnis ganzer Zahlen auf ganzzahlige Ergebnisse dargestellt. Sie ist die Gegenrechnung zur Multiplikation und gleichzeitig die ***erste höhere Stufe der Minusrechnung*** (Differenz, Übersicht der Rechenarten s.1.2.2).

15 – 3 – 3 – 3 – 3 – 3 = 0 = 15 + 5· (–3)
15 : 5 (gleiche Teile / Teiler) = 3 (Teilgröße)

0 → 15
0 = –3 –3 –3 –3 –3 +15

Im Gegensatz zu $5 \cdot 3_{summiert}$ = 15 (5faches von 3) dem Vervielfachen
wird $15 + (5 \cdot 3_{abgezogen}) = 0$ exakt 15 – (3 + 3 + 3 + 3 + 3) = 0 gerechnet.
Anzahl · Grundzahl

Die Zahl 15 ist gleichmäßig in seine 5 gleichgroßen Anteile, die 5 Grundzahlen vom Wert 3 zerlegt bzw. geteilt worden. Die ***Anzahl*** der gleichgroßen Anteile wird deshalb ***Teiler*** genannt und später in der eigentlichen Bruchrechnung ***Nenner***. Das Rechenzeichen für das Teilen ist der Doppelpunkt „ **:** “, später der Bruchstrich „ — “.
Die Teilerrechnung (Division) sucht direkt als Ergebnis den Wert (die Größe) der Anteile bzw. mehrfach abzuziehenden Grundzahl bei vorgegebenem Teiler.

15 : 5 = 3 denn Kontrolle → 3 · 5 = 15 → der Teiler ist 5, die Größe der Teile ist 3 aber
15 : 3 = 5 denn → 5 · 3 = 15 → der Teiler ist 3, die Größe der Teile ist 5
(« 15 – 5 – 5 – 5 = 0)

Beim späteren Umschreiben der Teileraufgabe 15 : 5 in die ***Bruchdarstellung*** $\frac{15}{5}$ wird nicht in erster Linie das Ergebnis, die Größe der Teile (3) gesucht, sondern das ***Größenverhältnis*** (Proportion) zwischen dem ***Zähler*** (15) und dem ***Nenner*** (5) betrachtet, was allerdings wieder das Gleiche ist, denn 15 ist das 3fache von 5.

Ungenau wird die Teilerrechnung vorerst, wenn kein ganzes Ergebnis herauskommt, d.h. eine Zahl kann nicht genau in gleiche ganze Teile geteilt werden, erkenntlich daran, dass ein ***Rest*** verbleibt. Diese wird erst später als gebrochene Zahl in der Bruchrechnung gelöst.
15 : 4 = 3 Rest 3 denn 3 · 4 = 12 ... +3 (die noch durch 4 zu teilen wäre) → 15

Entgegen dem gewohnten ***Aufschlüsseln*** der Zahlen beim Rechnen darf der Teiler nur als Ganzes verrechnet werden (gleiche Anteile)! Die zu teilende Zahl (Zähler) wird vom höchsten Stellenwert her geteilt. Ist dieser kleiner als der Teiler, werden die 2 ersten Stellenwerte verwendet:

536 : 6 → 5 : 6 (geht nicht) → 5 3 6 : 6 = 8 9 Rest 2 53 : 6 = 8
– 4 8 denn 8· 6 = 48 bis 53 bleibt 5 (Z)
– 5 6 5 Z + 6 E (heruntergezogen)
– 5 4 56 : 6 = 9
2 denn 9·6 = 54 verbleibt Rest 2

864: 12 = 72 8 : 12 (geht nicht)
– 84 86 : 12 = 7 denn 7 · 12 = 84
24 verbleiben 2 Z + 4 E → 24 : 12 = 2 ohne Rest

Rechnen mit „Vollen“: 800 : 2 → 8 00 : 2 = 4 0 0 denn 4· 2 = 8 und kein Rest aber
8 00 noch 0 Z : 2 = 0 und 0 E : 2 = 0

Achtung!
„Nicht vorhandene“ (0) Zehner und Einer müssen auch geteilt werden und ergeben 0.
Wird nichts auf Kinder (Teiler) aufgeteilt, bekommt jedes Kind nichts, Ergebnis = 0.
Wenn aber kein Teiler (0) da ist, auf den verteilt werden soll, ist eine Rechnung Unsinn.
Eine Zahl durch 0 zu teilen, ist mathematisch nicht definiert (nicht erklärt) bzw. verboten.

1.4 Größen, Vorsätze und Einheiten

Alle Dinge/ Sachen unserer Umwelt, die ganz konkret (wertmäßig) oder allgemein erfasst und behandelt werden sollen (rechnerisch oder als Bild / Grafik), werden als ***Größen*** bezeichnet. Eine Größe wird mathematisch immer mit einem Zahlenwert und einer fachspezifischen Einheit erfasst, z.B. die (Größe) Länge l = 2 m (Meter als Einheit)
In höheren Klassen gibt es immer wieder große Probleme beim Aufgabenlösen mit der ***Einheiten„umrechnung***“. Um dies zu vermeiden, muss beim Einführen von Einheiten erkannt werden, dass der 1. Buchstabe vor der Grundeinheit bis auf wenige Ausnahmen <u>nicht</u> die Einheit darstellt, sondern ein ***Vergrößerungs-*** oder ***Verkleinerungsvorsatz***, also selber eine Zahl bzw. Zahlenfaktor, genauer gesagt ein „volles“ Vielfaches bzw. „voller“ Teiler von 10 ist!

Vergrößerung: Tausendfache (dreistellig)

Kilo	K	= 1 Tausend	1.000
Mega	M	= 1 Million	1.000.000
Giga	G	= 1 Milliarde	1.000.000.000

Verkleinerung: Teiler mit 10ern (einstellig)

Dezi	d	= Zehntel	$^1/_{10}$	= 0,1
Zenti	c	= Hundertstel	$^1/_{100}$	= 0,01
Milli	m	= Tausendstel	$^1/_{1000}$	= 0,001

z.B. 1 ganze Torte in 10 gleiche Teile → 1 : 10 oder $^1/_{10}$ oder ausgerechnet 0,1
1 *Stückchen Torte* ist dann $^1/_{10}$ oder 0,1 oder **1 *Dezi*** (**d**) ***gross***.
1 *Euro* sind **100 *Cent***, **1 *Cent*** ist dann $^1/_{100}$ oder 0,01 oder **1 *Zenti*** (**c**) von 1 Euro = **1c €**

Dies macht das Um- oder Zusammenschreiben verschiedener „Einheiten“ leichter, denn nach Rechenregel 1 dürfen nur <u>gleichartige</u> <u>Einheiten</u> verrechnet werden!

Buchstabe mal Grundeinheit (K · m) oder Zahl mal Grundeinheit (1000· m)
z.B. 4 Km + 5 m → 4 Km oder 4000 m da 4 (K)m = 4· (1000) · m

	4 Km	oder	4000 m
+	0,005 Km	+	5 m
	4,005 Km	=	4005 m

$1 \cdot m = 1 \cdot \frac{K}{1000} m = \frac{1}{1000} Km = 0{,}001 Km$ → die „Einheit“ vergrößert sich im selben Maße, wie sich der Zahlenfaktor verkleinert oder umgekehrt (s. Proportionalität 3.5.2):
1 m = 100 **c**·m = 100 · $^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{100}}$ · m also 1 m = 100_{fach} ·1 cm, damit ist 1 cm das Gegenteil vom 100fachen, das ist der 100ste Teil (analog 1 Cent = 100ster Teil von 1 Euro).

Desgleichen:

$1\,Km^2 = 1\cdot(K\cdot m)^2 = 1\cdot K^2\cdot m^2 = 1\cdot 1000^2 Em^2 = 1.000.000\,m^2$
$1\,cm^2 = 1\cdot(c\cdot m)^2 = 1\cdot c^2\cdot m^2 = 1\cdot (^1/_{100})^2 Em^2 = {}^1/_{10000}\cdot m^2$

Ungenau exakt, denn „Quadrat“(hoch 2) gehört auch zu „K“ bzw. zu „c“

Ab 8. Klasse werden Zahlen meist allgemein durch Buchstaben symbolisiert (ersetzt), wofür alle Rechengesetze ebenfalls gelten. Das ***Mal-Zeichen*** „·“ wird dabei ***generell weggelassen***:
z.B.: geg: a = 5 cm ges.: A A = a b (Fläche A = Länge a <u>mal</u> Breite b)
b = 4 cm A = 5 cm · 4 cm = 5 · 4 (cm · cm)
A = 20 $(cm)^2$ (Klammer wird allgemein weggelassen)
A = 20 cm^2 (oder $^{20}/_{10000}$ m^2 = 0,0020 m^2)

1.5 Sachaufgaben:

Die Sachaufgaben in der Grundstufe beziehen sich auf das Verrechnen ganzer Zahlen in den 2 Grundrechenarten Zusammenzählen und Abziehen sowie ihrer jeweils ersten Stufe (Spezialfall gleicher Zahlen), dem Vervielfachen (Multiplizieren) und dem Teilen (Dividieren).
Alle Aufgaben sind darauf gerichtet, diese 4 Rechenarten grundlegend zu beherrschen.
Der erste und schwierigste Vorgang bei der Lösung ist das Herausfinden der Verrechnung der gegebenen und gesuchten Werte, der richtige ***Lösungsansatz***, das Aufstellen der Gleichung. Mindestens der **10te *Teil der Zeitvorgabe*** sollte dafür genutzt werden, denn selbst wenn man sehr gut rechnen kann ist mit einem ***falschen Ansatz*** die ***gesamte Lösung falsch*** und die Rechnung umsonst! Da das Rechnen immer das Gleiche ist, sollten statt 2 **-** 3 Aufgaben zu lösen lieber von ca. 10 Aufgaben nur der jeweilige Ansatz, die Gleichung gefunden werden!
Jede Rechenaufgabe hat immer wieder den gleichen Rechenweg / Rechenablauf :

Aufgabenstellung:	Wichtigster Schritt, die Aufgabe richtig zu verstehen, gegeben und gesucht herausschreiben, bei längerem Text symbolhaft Stichpunkte
Lösungsansatz :	Gleichung oder Ungleichung mit einer Gesuchten x (Unbekannten)
Lösung:	Glieder umformen / umstellen, richtiges Rechnen mit Rechenregeln 1 bis 3
Lösungsergebnis:	Unbekannte als Zahlergebnis sowie Antwortsatz, später Berechnungsformel oder Funktion mit Grafik (Bild) und Auswertung

Beispiel:
Hans wird nach seinem Alter gefragt. Er antwortet: „Meine Schwester ist 4 Jahre älter als ich. Mein Vater ist 28 Jahre älter als ich und meine Oma ist 4 mal so alt wie meine Schwester. Zusammen sind wir 132 Jahre alt“.

Lösungsansatz:

x : Alter von Hans (Unbekannte, soll berechnet werden, alle anderen Angaben werden auf das Alter „x“ von Hans bezogen)

$x + 4$: Alter der Schwester

$x + 28$: Alter des Vaters

$4 \cdot (x + 4)$: Alter der Oma

$$x + (x + 4) + (x + 28) + 4 \cdot (x + 4) = 132$$
$$x + x + 4 + x + 28 + 4x + 16 = 132$$
$$7x = 132 - 4 - 28 - 16 = 84$$
$$x = 84 : 7 = 12$$ (Hans ist 12 Jahre alt)

Die ***Lösung*** einer Gleichung geschieht durch ***Umformen*** der Glieder (Zahlenzerlegung), ***Umstellung*** (Seitenwechsel, doppeltes Negieren, Unbekannte links, bekannte Werte rechts) und direktes ***Verrechnen***. Sofern nur einmal negiert wird, z.B. nur das Rechenzeichen umgekehrt, wird die Rechnung falsch!

Kopfrechnen:

Das Kopfrechnen ist der wichtigste Bestandteil der Mathematik. Nichts kann das Gehirn besser trainieren, eine schnellere Auffassungsgabe für das vielseitige Wissen in der Schule und im Leben zu bekommen. Es ist erschreckend, dass viele Schüler der 5. / 6. Klasse einfache Summen- und Produktaufgaben nur mit dem Rechner bewältigen können!
Meist wird ohne Kontrolle dem Rechnerergebnis vertraut und nicht begriffen, dass Tippfehler häufiger vorkommen, als man sich im Kopf bei genügender Übung verrechnen kann. Kopf- und schriftliches Rechnen sollte generell den Vorzug bekommen, der Rechner erst in höheren Klassen (8.) eingesetzt werden.

1.6 Algebra 1 - Übersicht

Voraussetzungen: Unterscheidungsmerkmale von Sachen, Gegenständen, Zahlen und Größen
Nur ***Gleichartiges*** kann miteinander verglichen, zusammengefasst bzw. geordnet werden!
Vergleiche: mehr/größer als (>), weniger/kleiner als (<), gleich viel / gleich groß (=)

Zahlenarten: ***Ganze*** Zahlen (Abart natürliche Z.): 1 2 3 . . . bis 1.000.000 (1 Million)
Unterbegriffe: gerade (durch 2 teilbar) + ungerade (nicht durch 2 teilbar)
Gebrochene Z.: ganzzahliges Ergebnis mit Rest 12 : 5 = 2 Rest 2 → 2,4
oder 25 m + 85 cm = 25,85 m (vorrangig für Größen verrechnen)

Zahlenaufbau: Einstellige „Zahlen" 0 bis 9 sind ***Ziffern***, aus denen eine Zahl besteht
Die ***Zahl*** ist verschlüsselte Gleichung: $2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 2H + 3Z + 5E = 235$

Rechenarten: 2 gegensätzliche Grundrechenarten (alle anderen sind Spezialfälle dieser beiden)
Summe bilden („+" Zusammenzählen, Summe bilden, vergrößern, mehr)
Differenz bilden („–" Abziehen, verkleinern, weniger / von - bis Unterschied)
Multiplizieren „ · " ist bereits Spezialfall (Kurzschreibweise) der Summe
$0 + 4 + 4 + 4 = \boxed{3 \cdot 4_{\text{summiert}}} = 12$ = das 3fache von 4
Kleines „1· 1" sind die Reihensummen bzw. die Vielfachen der Ziffern 2 bis 9
Teilen ist Spezialfall der Differenz: $12 – 4 – 4 – 4 = 0 = \boxed{3 \cdot 4_{\text{abgezogen}}}$ von 12
12 : 3 = 4 (3fach abgezogene Zahl) oder $^{12}/_{3} = 4 = {}^{1}/_{3}$ von 12 (3 ist *Teiler* von 12)

Rechenregeln: 1. ***Nur Gleichartiges verrechnen*** (Einer nicht mit Zehnern, Meter nicht mit m² → E unter E, Z unter Z oder 1.Stelle mit 1.Stelle, 2.Stelle mit 2.Stelle usw.)
2. „Höhere" Rechenart zuerst (***Punkt- vor Strichrechnung***), Klammern () jedoch zu aller erst, bei gleicher Rechenart ist Reihenfolge egal.
3. Beim Umformen immer ***doppeltes Negieren*** (Umkehren) anwenden! oder Für Gegenseite die Gegenrechenart anwenden; Kontrollrechnung
$+3 + x = 10$ → $x = 10 – 3 = 7$ → denn (Kontrolle) $7 + 3 = 10$
statt mehrfachem Abziehen die Zahlen addieren und ihr Ergebnis abziehen
$36 – 5 – 8 – 5 = 36 – (5+5+8)$ → $36 – 18 = 18$ oder vorwärts zählen:
18 bis 20 bis 30 bis 36 ; Ergebnisse zusammen 2 + 10 + 6 = 18
oder Minus als negatives Vorzeichen sehen: $36 + (–18) = 18$ →
ohne Änderung in Umkehrrechenart umwandeln (Umschreiben)!

Sachaufgaben:

1. Es gibt nur einen ***einzigen Lösungsweg*** (Rechenablauf) für jede Aufgabe:
Aufgabe → rechnerische Formulierung (Gleichung/Ungleichung) → Umformung, Beherrschen der 3 Rechenregeln (Unbekannte links, alle gegebenen Größen rechts) → Lösungsergebnis (rechte Seite verrechnet) → Ergebnisformulierung (Antwortsatz, Bild / Grafik)
2. ***Hilfsmittel*** für Aufgabenlösung:
Gesuchte Zahl/Größe (Unbekannte) - Symbolik: □ ; ? ; x z.B. 4 > □
Gesuchte Rechenoperation/Rechenart - Symbolik: O z.B. 3 O 5 = 8
Hilfsdarstellung der Aufgabe: Rechenfiguren, Gitter, Tabelle, Operatorpfeil, Zahlengerade
Zahlenzerlegung: Beherrschen von Ergänzungszahlen, Rechnen über die „Vollen" 10er, 100er
24 + 8 { 6+2} → 24 + 6 = 30 ; 30 + 2 = 32 (8 in 6/ Ergänzungszahl + 2 zerlegt)
oder 24 + 8{10 –2} → 24 + 10 = 34 ; 34 – 2 = 32 (8 in 10 – 2 zerlegt)
3 – 5 → 3 – 3 = 0; 0 – 2 = – 2 (2 borgen, im Minus stehen, Konto überziehen)
Kopfrechnen: $7 \cdot 32 = 7 \cdot (3 \cdot 10 + 2) = 7 \cdot 3 \cdot 10 + 7 \cdot 2 = 210 + 14 = 224$
$7 \cdot 38 = 7 \cdot (40 – 2) = 7 \cdot 40 – 7 \cdot 2 = 280 – 14 = 266$
3. ***Größen***: Länge, Masse, Volumen, Zeit, Geld – bestehend aus Zahlenwert · Einheit
physikal. Einheiten haben codierte Zahlsymbole z.B. 5 Km = 5·1000·m (K=1000)
Kilo **K** = 1000, Dezi **d** = $^{1}/_{10}$ (1 von 10 gleichen Anteilen), Zenti **c** = $^{1}/_{100}$
1 € : 100 = 1 Cent ; 1 Cent = $^{1}/_{100}$ von 1 € (1 von 100 Cent-Anteilen)
4. ***Zahlen***-/Reihen***folge***: Zahlen ordnen - Vorgänger, Nachfolger (3 Vorgänger von 4)

2. GEOMETRIE 1 (Grundstufe)

Flächen (Planimetrie):

Elementbegriffe:

Seiten: b a

Ecken: A B Gerade Strecke A B

Beziehungen: parallel senkrecht rechter Winkel Symmetrie

Symmetrie-Achse

Deckungsgleichheit beim Übereinanderlegen

(Kongruenz) entsteht nur 1 Fläche/Umriss

Grundformen: ***Dreieck*** ***Viereck*** ***Kreis*** (Durchmesser = 2 x Radius)

Spezielle Vierecke: rechtwinklig: ***Quadrat*** ***Rechteck*** (je 2 gleiche Seiten)

(4 gleiche Seiten)

schiefwinklig: ***Parallelogramm*** (je 2 parallele Seiten)

(schräg)

Trapez (nur 2 Seiten sind parallel)

Körper (Stereometrie):

Elementbegriffe: Flächen, Mantel, Ecken, Kanten - Gerader Anstoß zweier Flächen

Grundformen:

Parallelformen: Körper mit gleichlangen, parallelen ***Kanten***; Seitenflächen = ***Mantel***

Prisma: Grund-/Deckfläche = kongruente Vielecke, die Seiten Vierecke

Quader: Grund-/Deckfläche sind Rechteck oder Quadrat; 4 gleiche Seiten

(Quadre = 4) Spezieller Quader: Würfel (6 gleiche, parallele Quadrate)

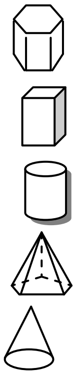
Zylinder: Grund-/Deckfläche sind gleiche Kreisflächen, der Mantel ein Rechteck

Spitzformen: ***Pyramide***: Grundfläche sind Vielecke, die Seiten Dreiecke

Spezielle Pyramide: ***Tetraeder*** (Grund- und Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke)

Kegel: Grundfläche ist ein Kreis oder eine Ellipse

Rundform : ***Kugel*** (allseitig gleichmäßig gekrümmt)



Darstellungen:

Körpernetze: Würfel

Dargestellt wird die Gesamtoberfläche des Körpers durch gezieltes „Auseinanderfalten“ in die Ebene. Die so gewonnene Ansicht der Oberflächenform erleichtert das Auffinden der Oberflächenformel.

Das Schrägbild:

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die räumliche Ausdehnung des Körpers in der Ebene darzustellen (auf die Fläche abzubilden / zu projizieren). Bei den Parallelformen sind aus 2 verschiedenen Blickwinkeln bereits 2 unterschiedliche Schrägbilder zu erkennen. Die erste Art wird am häufigsten verwendet: Die Tiefe ist als halbes Maß der Seitenlänge unter einem 45°Winkel zu zeichnen!