**Zufall**
**From Wikibooks**

# Was ist eigentlich Zufall ?

Online Version Siehe http://de.wikibooks.org/wiki/Zufall

# Inhaltsverzeichnis

**Warnungen und Hinweise**

Bewertung: Beim vorliegenden Wikibooks-Text gibt es derzeit eine Diskussion über dessen **Neutralität**. Die bei Wikibooks gewollte **neutrale Sichtweise (NPoV, *Neutral Point of View*)** ist umstritten.

Es wird hier Hilfe zur Überarbeitung gewünscht. Sichtweisen müssen neutraler formuliert, bzw. durch seriöse, für Lehrbücher akzeptable Quellenangaben ergänzt werden. Textvorschläge und Hinweise auf der zugehörigen Diskussionsseite sollten im vorliegenden Text konstruktiv berücksichtigt oder eingebaut werden.

**Zur Wikibookseite oder auch Interwiki-Link:** NPoV; Was Wikibooks nicht ist...; Wikipedia: NPoV

Bewertung: In dieser Wikiseite kommen formale Darstellungsprobleme vor und es wird Hilfe zur Überarbeitung gewünscht. Verwendete Begriffe müssen durch ihre Definition oder Quellenangabe gestützt werden, bevor sie im Textzusammenhang des Lehrbuches das erste Mal genutzt werden. Ansonsten ist die Einführung des Begriffes (Notion) im Text formal inkorrekt. Probleme existieren hierbei mit folgenden Begriffen: Entropie, aber auch damit verwandte und abgeleitete Begriffe

Dieses Wikibuch ist eine freie Assoziation zum Thema Zufall, die viele pseudowissenschaftliche Formulierungen enthält.
ACHTUNG:

- Dieser Text ist nicht nur pseudowissenschaftlich, er ist sehr wahrscheinlich sogar **unwissenschaftlich**.
- Den anfänglichen Verkehrszeichen nach zu urteilen ist dieser Text eine einzige Baustelle.
- Dieser Text hat keinen Platz im Buchregal Mathematik, Physik oder Philosophie.
- Dieser Text steht nur unwillig geduldet als Text im Buchregal Diverse , Nicht kategorisiert.
- Dieser Text wurde schon mehrfach mit einem Löschantrag versehen.
- Niemand will den Text verbieten, aber einige bezweifeln, daß er den (leider unscharf formulierten) Qualitätskriterien der Wikibooks entspricht.
- Wenige wollen den Text verbessern oder gar einen Zufallstext Nr 2 schreiben.
- Jeder der diesen Text ganz **zufällig** liest, sollte sich dies also gut überlegen.

http://de.wikipedia.org/wiki/Benutzer:Rho

## Vorwort

### Was ist eigentlich Zufall?

**Einleitung:**
Viel Energie wurde und wird in der Diskussion zum Thema Zufall damit vertan, dass auf der einen Seite der Zufall komplett geleugnet wird, dieser auf der anderen Seite die Ursache für alles sein soll. Schwierig ist auch die Frage, ob Zufall objektiv existiert oder lediglich subjektiv ein Folge des beschränkten Wissens ist.
Man kann statt dessen mit dem Zufall experimentieren und rechnen. Dies fördert meist den Eindruck und ein Gespür, dass die **Mischung aus zufälligen und gesetzmäßigen Ereignissen** der Realität am besten gerecht wird.
Der Zufall zeigt Gesetzmäßigkeiten, nämlich z.B. das Gesetz der großen Zahl. Dieses Gesetz über den Zufall kann man heranziehen, um zu testen, ob berechnete Wahrscheinlichkeiten den praktisch beobachteten Häufigkeiten eines konkreten Zufallsmodells mit beschriebener Verteilungsfunktion entsprechen oder nicht.
Die Vorstellung vom Zufall steht für manche in Widerspruch mit dem Gedanken eines allwissenden persönlichen Gottes, der alles voraussehen kann.

```
Gott würfelt nicht. -- Albert Einstein
```

Siehe auch http://www.uni-potsdam.de/portal/jul05/uniaktuell/wuerfel.html
Anderseits kann Einstein auch den Zufall bestehen lassen, denn grundlegende Naturgesetze und ein darauf beruhender Bauplan lassen Zufälle zu bzw. müssen sie nicht zwangsläufig verhindern. Bsp. ein Hausbau: gegen die Schwerkraft und Naturgewalten kann ein Architekt nichts unternehmen, aber die Schwerkraft kann er sich zunutze machen, um das Haus gegen Naturgewalten weitgehend bestehen zu lassen. Wie sich dann die Hausbewohner einrichten, ist von seiner Warte aus gesehen Zufall, da er ihnen nichts vorschreibt.
Im Vergleich zum allwissenden Gott - soweit es überhaupt zu vergleichen ist - stellt sich dann die Frage, ob dieser von seiner Fähigkeit der Allwissenheit Gebrauch machen "muss" oder ob er sie nur in bestimmten Fällen einsetzen

"kann". Sollte er immer allwissend sein und somit nichts dem Zufall überlassen, dann wäre die 1. logische Schlussfolgerung, dass alles (jede Handlung vom Individuum (sofern davon noch gesprochen werden kann)) vorherbestimmt ist und es 2. keine Möglichkeit der Selbstbestimmung gibt. Denn sollte der freie Wille da sein und ein Mensch aus der Vorherbestimmung ausbrechen, dann wäre Gott nicht allwissend. Hätte er aber diesen Schritt gekannt, wäre es kein Ausbrechen und somit kein freier Wille. 3. Wäre er für all die Zustände verantwortlich, was aber für viele Gläubige unannehmbar ist. Mögliche Folgen: was würde da ein Mörder oder Vergewaltiger als Argument bringen? Gott ist Schuld, ich musste es tun? Die Rechtsprechung müsste grundlegend geändert werden. Das seit menschengedenken existierender Rechtsverständnis wäre falsch. Zufall oder nicht?
Andere können Zufall mit der Existenz Gottes vereinbaren:

```
Zufall ist vielleicht das Pseudonym Gottes,
wenn er nicht selbst unterschreiben will. - Anatole France
```

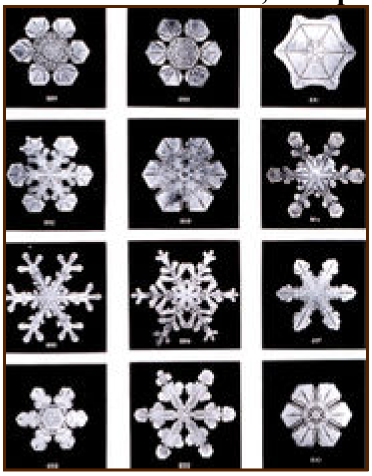
Auch die Diskussion um den freien Willen der Menschen dreht sich öfter um das Thema Zufall.
Es hat sehr lange gedauert, bis man gemerkt hat, daß dem Zufall neben seiner Anwendung im Glücksspiel auch sehr nützliche Seiten abzugewinnen sind. Die Brauchbarkeit des Zufalls als **Gerechtigkeitsfaktor** oder als Testverfahren für schwierige Entscheidungen wurde in der philosophischen-theoretischen Diskussion lange nicht erkannt, obwohl er sicher im Alltagsleben öfter schon dazu benutzt wurde. Beispielsweise muß aus einer Gruppe von Menschen einer ausgewählt werden, um eine sehr gefährliche Aufgabe durchzuführen. Keiner will es machen. Es wird per Los entschieden, wer es machen muß. (Vergleich zum Beispiel Charly Chaplin: Der große Diktator: In einen Kuchen wird eine Geldmünze gebacken. Jeder aus der Gruppe erhält ein Stück Kuchen. Wer hat die Münze in seinem Stück?)
Es ist erstaunlich, daß es in der realen Welt sehr einfache Verfahren gibt, die sehr gute Zufallszahlen und Zufallsreihen liefern, daß es in der Mathematik aber keinen elementaren und trivialen Zufallsprozeß gibt. Man muß mühsam **Pseudozufall**szahlen konstruieren, um mit dem Zufall arbeiten zu können. **Platon** würde sich über den Zufall doch ein bißchen ärgern, denn beim Zufall scheint die Realität dem mathematischen Ideal überlegen zu sein. Gleichzeitig beherrscht der Zufall viele wichtige Prozesse in der Physik, Chemie und Biologie. Deswegen ist ein möglichst gutes Verständnis des Begriffes Zufall sehr wichtig.
Eine elementare Frage zum Thema lautet: Gibt es einen echten Zufall, oder bezeichnen wir etwas nur deshalb als zufällig, weil wir nicht über genügend Informationen für eine genaue Vorhersage verfügen? Was ist echter Zufall und was ist unechter Zufall?
Wenn man die drei Basisbegriffe der heutigen Naturwissenschaften Stoff ( = Materie), Strahlung ( = Energie) und Struktur ( = Information) betrachtet, kann man fragen, wie der Begriff Struktur in weitere Subkategorien untergliedert werden kann.
Die erste und wichtigste Unterteilung der Struktur ist dann die Unterscheidung zwischen Zufallsstruktur und geordneter Struktur oder auch zwischen Zufallsinformation und nicht zufälliger Information.

**Basisbegriffe der Natur- und Strukturwissenschaften**

```
Materie ------------  Energie
   \                     /
    \                   /
     \                 /
      \               /
        Information
            /  \
           /    \
          /      \
         /        \
        /          \
 Zufalls-            geordnete
 Information         Information
      |                 |
      |                 |
      |                 |
Beispiel:             Beispiel:
011011001101111000010  10101010101010101010
      |                 |
      |                 |
      |                 |
Stochastik            Restliche Mathematik
Statistik
```

- Reiner gleichförmiger Zufall ist eher langweilig.
- Eine Ordnung ohne jeden Zufall ist auch eher langweilig.

>> **Interessant ist die Mischung aus Zufall und Ordnung.**
Wenn man 1 Gramm Wasser betrachtet , dann ist eine Wassertropfen mit Zufallsstruktur der Wassermoleküle eher langweilig. Ein geordneter Einkristall des Wassers ist auch langweilig ( wenn es so etwas gibt). Interessant ist es zwischen drin: beispielsweise ein Schneekristall . Hier gibt es eine unendliche Vielfalt der Formen.
**Abb.:Schneeflocken , ein Spiel von Zufall und Ordnung**



**Was ist Zufall ?**
Man spricht von Zufall, wenn ein Ereignis nicht notwendig oder nicht beabsichtigt auftritt. Umgangssprachlich bezeichnet man ein Ereignis auch als zufällig, wenn es nicht absehbar, vorhersagbar oder berechenbar ist. Sind Zufälligkeit und Unberechenbarkeit oder Unvorhersagbarkeit das selbe? Gibt es so etwas wie Zufall objektiv? Der Bayessche Wahrscheinlichkeitsbegriff verneint diese Frage und definiert Zufall beziehungsweise Wahrscheinlichkeiten als nichts Objektives, sondern lediglich als subjektive Höhe des Wetteinsatzes: Gegeben eine Menge von Information/Messungen/Datenpunkten und nach einer Einschätzung gefragt, wie hoch würde man auf die Korrektheit seiner Einschätzung wetten?

Als zufällig gelten Ereignisse wie eine Augenzahl beim Würfeln oder das Ergebnis eines Münzwurfs, jedenfalls wenn eine Manipulation ausgeschlossen wurde.
Zufall ist das unberechenbare Geschehen, das sich unserer Vernunft und Absicht entzieht. - Gebrüder Grimm (Deutsches Wörterbuch)

**Einige wichtige Basisaussagen über den Zufall**

- Ein elementarer Zufallsprozeß ist der Münzwurf, denn er liefert eine zufällige Entscheidung zwischen zwei Alternativen. Man beachte, daß es für den Münzwurf irrelevant ist, ob das Ergebnis prinzipiell unberechenbar ist oder bei genauer Kenntnis der Rahmenbedingungen vorausgesagt werden kann. Solange alle Beteiligten gleich wenig über das Ergebnis wissen, wird der Münzwurf als fair empfunden.
- Eine beispielsweise durch Münzwurf erzeugte Zufallsfolge von 0 und 1 lässt sich ohne Verlust kaum komprimieren.
- Durch den Zufall ergibt sich keine Verletzung des Kausalitätsprinzips.
- Je mehr Ordnung und Regelmäßigkeit man in einem System erkennt, desto weniger Zufall verbleibt darin.
- Zufall heißt nicht, daß alles möglich ist. Ein zufälliger Münzwurf kann nur Kopf oder Zahl ergeben. Falls die Münze auf der Kante liegen bleibt, wirft man sie eben nochmals ...
- Manche meinen, wenn Zukunft völlig festgelegt und vorherbestimmt ist (deterministische Weltanschauung), dann gibt es keinen Zufall. Andere meinen, die Nachkommastellen der Zahl Pi 3,14159... seien völlig zufällig. Offensichtlich wird hier das Wort "Zufall" in widersprüchlichen Bedeutungen verwendet.
- Die Mischung aus zufälligen und nichtzufälligen Ereignissen wird der Realität am besten gerecht. Die Frage ist lediglich, in welchem Verhältnis zu mischen ist.
    - Bevor man ein Ereignis als zufällig ansieht, sollte man sich eingehende Gedanken darüber machen, ob es wirklich rein zufällig ist. Manchmal ist der Zufall eine zu bequeme Erklärungsvariante.
    - Das menschliche Gehirn neigt andererseits dazu, auch in rein zufällige Geschehnisse Gesetzmäßigkeiten hinein zu interpretieren, da das kausale Denken insgesamt sich sehr erfolgreich erwiesen hat. Interessant ist in diesem Zusammenhang das Experiment von Wright an der Universität Stanford mit dem "vielarmigen Banditen", siehe z.B. Paul Watzlawick, Wie wirklich ist die Wirklichkeit?
- Es kann kein Verfahren geben, wie man "echten" Zufall (was immer das sein soll) von jenen Ereignissen

unterscheiden kann, die nur scheinbar zufällig sind, tatsächlich aber einem unbekannten deterministischen Gesetz gehorchen: Eine mit einem One-Time-Pad verschlüsselte Nachricht hat ohne Kenntnis des Schlüssels ganz die gleichen Eigenschaften wie eine "echte" Zufallsfolge. Für die Besitzer des Schlüssels aber ist sie keine Zufallsfolge, sondern eine ganz normale Nachricht. Zufall lässt sich also nur ausschließen (indem man ein deterministisches Gesetz findet), nicht aber nachweisen.

  - Beispielsweise ist die in der Informationstheorie verwendete Shannon-Entropie eine rein statistische Zählung von Zeichenhäufigkeiten und sagt nichts über einen deterministischen oder zufälligen Zusammenhang der Zeichen aus.

'Menge an Zufall' gibt es so nicht. Das ist ein hin und wieder aufkommendes Missverständnis bei Benutzung der Begriffskombinationen. Zumindest gibt es dies nicht in der Mathematik. Man könnte diesen Begriff definieren. Dann käme per se durch Definition die Ausdrucksmöglichkeit heraus.
Betrachtet man die Folgen im Nachhinein, weil sie schon existieren, kann man Häufigkeiten bestimmen oder eine Häufigkeitsverteilung. Möchte man etwas über Zufallsabhängige Folgen aussagen, die man durch Zufall erzeugen kann, so ist die Wahrscheinlichkeit oder eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (auch Verteilungsfunktion) heranzuziehen.
Eine 'informationstheoretische Entropie' gibt es nicht. Wohlwollend ausgelegt, ist es vermutlich die von Shannon hergeleitete Entropie.
Das ist die gemittelte Summe der Informationsgehalte der einzelnen Zeichen in der Folge. Shannon definiert diese über Wahrscheinlichkeiten. Wir können in gegebenen Folgen nur Häufigkeiten messen. Da seine Entropie nur über die Wahrscheinlichkeiten bestimmt wird, ist die Anordnung der Zeichen innerhalb der Folge irrelevant.
Die Entropie um der Entropie Willen zu bestimmen ist unfruchtbar. Man kann diese zwar bestimmen, muß hierbei aber bestimmte Überlegungen anstellen:

1. Welche Aussage soll über die Folgen getroffen werden?
2. Welches Maß ist hierzu geeignet? (Anm.: Es gibt verschiedene Entropiemaße, reicht hier nicht eine Verteilungsfunktion oder die Angabe der Wahrscheinlichkeit / Häufigkeit aus?)
3. Wenn es ein solches Maß gibt, dann geht's weiter...

- Hat der Zufall ein Gedächtnis?
  - Das Zufallsexperiment des einmaligen Wurfs eines Würfels hat kein Gedächtnis. Das Zufallsexperiment der einmaligen eingeworfenen Roulettekugel auch nicht. Fällt die Kugel z.B. auf 5, so ändert das im idealen Roulettespiel nichts an den Chancen, daß das nächste Mal wieder die 5 kommt
    - Im realen Roulettespiel sind wegen mechanischer Unregelmäßigkeiten die Chancen vorhanden, daß eine Ungleichverteilung der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zahlen herrscht. Roulette hat also ein Gedächtnis in dem Sinn, daß die Wahrscheinlichkeit, daß eine der häufig gefallenen Zahlen wieder kommt, höher oder zumindest gleich hoch ist wie die Wahrscheinlichkeit, daß eine der bisher selten gefallenen Zahlen kommt. Im realen Roulette müssen die Zylinder daher häufig getauscht werden, damit niemand diese Ungleichverteilung ausnutzen kann.
  - Kartenspiele haben üblicherweise ein Gedächtnis: die gezogene Karte kommt meist entsprechend der Regeln nicht zurück ins Spiel. Wird eine hohe Karte gezogen, so sinken die Chancen, daß das nächste Mal wieder eine hohe Karte gezogen wird. Daraus können Gewinnstrategien für das betreffende Spiel entsprechend der Regeln abgeleitet werden.

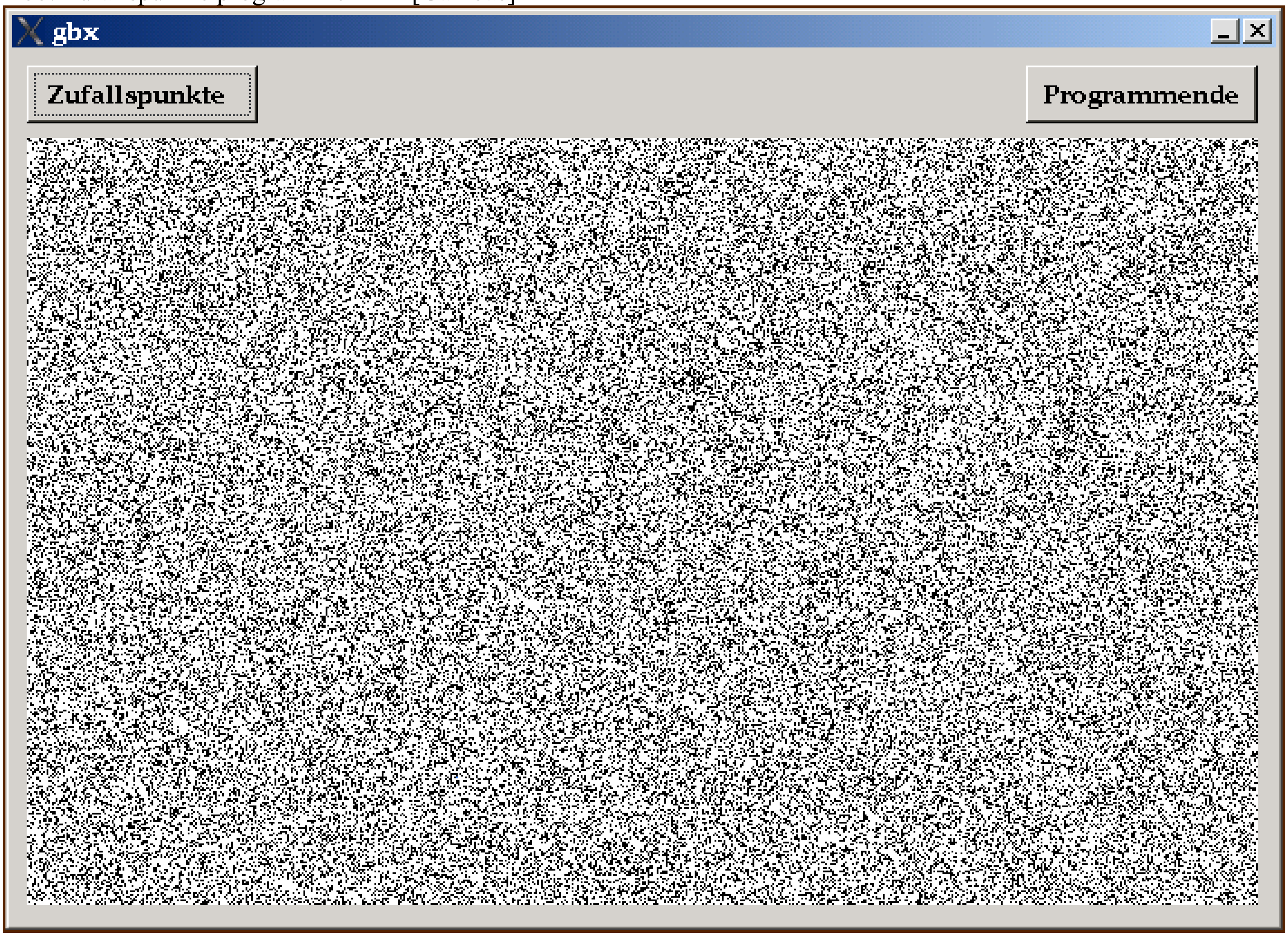
**Der Zufall hat kein Gedächtnis. Was versteht man unter dieser Aussage ?**
Beobachtet man Roulettespieler, dann kann man an ihrem Verhalten erkennen, wie sie oft den Zufall falsch einschätzen. Gab es beispielsweise hintereinander 4 mal eine rote Zahl, dann setzen einige Spieler vermehrt auf Schwarz, weil sie meinen, die Wahrscheinlichkeit für Schwarz sei nach 4mal Rot größer geworden. Das ist ein Fehlschluß. Der Roulettetisch und die Kugel berücksichtigen in keiner Weise vorherige Würfe. Etwas plakativ ausgedrückt kann man sagen: Das Roulettespiel hat kein Gedächtnis. Hat das Roulettespiel keine Null bleibt die Wahrscheinlichkeit für Rot oder Schwarz jedesmal bei 0,5.
Ähnliches gilt für das Lottospiel. Durch ein sogenanntes Systemlotto versucht man aus historischen Lottodaten Trends für zukünftige Gewinnzahlen zu erkennen. Das ist wahrscheinlich vergebliche Mühe, wenn die Lottoapparatur gut geeicht ist und wirklich zufällige Zahlen liefert.

**Wo finden wir den Zufall?**
Fangen wir mit der Erklärung des Begriffes Zufall zunächst mit leicht einsehbaren Aussagen aus dem heutigen Alltagsleben an.
Zufall im praktischen Alltag steckt

- in den Lottozahlen,
- im Würfel

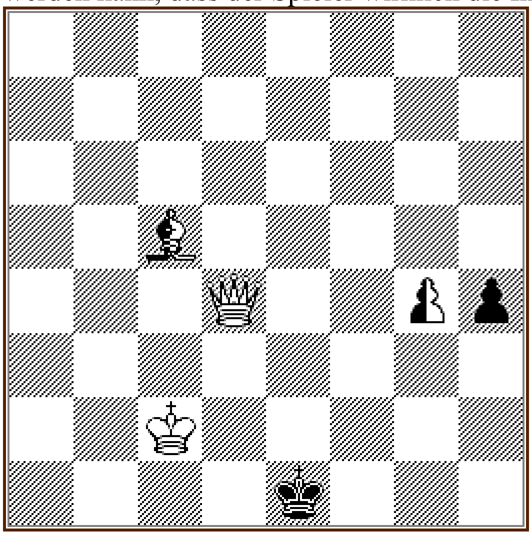
- im Münzwurf
- im Roulettetisch
- in gemischten Spielkarten
- in Gasmolekülen
- in der Brownsche Molekularbewegung
- im radioaktiven Zerfall des Urans
- in der Evolution der Lebewesen
- in der Variation und Rekombination des Erbgutes
- wird wirksam bei der Befruchtung einer Eizelle und der Fixierung des Geschlechtes

Abb: Zufallspunkte programmiert mit [Gambas]




**Wo finden wir keinen oder wenig Zufall?**
Im **Computer** fällt es offensichtlich schwer echten Zufall zu erzeugen. Der digitale Computer ist zunächst einmal eine deterministische Maschine und bis ins letzte Bit berechenbar. Durch Pseudozufallszahlen versucht man den echten Zufall nachzuahmen. Manche Computer bieten allerdings die Möglichkeit, zufällige Bits des beispielsweise in den Gerätetreibern vorhandenen "Umgebungslärms" in einem "Entropie-Pool" zu sammeln und diese für die Erzeugung von hochqualitativen physikalischen Zufallszahlen zu verwenden, so z.B. /dev/random unter Linux.
In den **Planetensystemen** ist es offensichtlich relativ einfach über Jahrtausende korrekte Vorausberechnungen zu machen . Hier ist der Zufall durch riesige Massekonzentrationen weitgehend außer Kraft gesetzt worden.
In einer **geordneten binären Zahlenreihe** zb
01010101010101010101010101010101010101010101010101010101
steckt kein oder sehr wenig Zufall.
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22
In jeder **logisch geordneten Zahlenreihe** steckt kein oder wenig Zufall?
Doch ... 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 25
Die Zahlenfolge ist geordnet: 'Kleinere Zahlen nach vorne!'
Wahrscheinlich hätten wir aber mit der Zahl 23 gerechnet. Das ist aber eine Eigenschaft des Betrachters: Das Bildungsgesetz muß möglichst einfach sein. Einfachere Bildungsgesetze für Folgen werden meist präferiert.
Wie geht diese Folge weiter?
1, 2,
Klar: 3! Nööö, nicht klar. Sie folgt nämlich dem Bildungsgesetz

$a_{n+1} = 2a_n$
Also mit $a_0 = 1$ dann $a_1$ ist 2 mal 1, also $a_1 = 2$, dann $a_2 = 4$.
Hätte jemand geantwortet: Klar: 4! Na dann hätte ich daraus eine andere Folge stricken können.
Daraus resultiert die Frage, ob Zufall nicht bloß etwas mit unserer eingeschränkten Wahrnehmung und dem Versuch der Erklärung der Welt in für uns verständlichen Modellen und der Begrenzung der Beschreibungsfähigkeit der gewählten Modelle zu tun hat.
Im **Schachspiel** steckt kein Zufall. Aber das Spiel ist so komplex, daß ein Mensch wohl nicht die Möglichkeit aller Züge wahrnehmen kann. Wenn es exakt eine sichere Möglichkeit zu gewinnen gäbe für weiß und vorausgesetzt werden kann, dass der Spieler wirklich die Intention hat, zu gewinnen, dann wäre alles klar!



Ist diese einzige sichere Gewinnmöglichkeit für weiß beim Schachspiel vorhanden? Trotz aller Technik und unseres Wissens können wir uns hier nicht sicher sein. Unser Wahrnehmungsvermögen und unsere Merkfähigkeit in dieser Hinsicht ist beschränkt. Mindestens daher ist der Ausgang eines Schachspiels selbst bei professionellen Spielern ungewiss.
Ist also am Anfang, wenn verlost wird, wer anfangen darf, der einzige Zufall zu erwarten? Ist der erste Zug zufällig? Für wen? Den Spieler selbst? Den Spielpartner? Den Zuschauer? Als Spieler kann man natürlich die Steine zufällig setzen, dann wird man aber wohl gegen ernsthaft spielende Gegenüber schnell verlieren. Wenn man gut spielen will, muss man möglichst deterministisch spielen und alle sich ergebenden Möglichkeiten so weit und so tief wie möglich vorausberechnen. Computer spielen auch so gerne und so gut Schach, weil die Suchtiefe für die möglichen Züge oft höher ist, als bei einem Menschen. Aber selbst bei modernsten Computerprogrammen wird bei Zugvarianten, die gleich gut durch den Algorithmus des Computerprogramms bewertet werden, über einen Pseudozufallszahlengenerator eine Zugentscheidung herbeigeführt. Dem Menschen als Computergegner oder Programmierer des Schachprogramms scheint die Entscheidung per Pseudozufallszahlen zufällig. Oder zumindest zufällig genug...
Ob ein strenger Mathematiker für solch eine Beschreibung in allen Einzelheiten Verständnis hat? Der umgangssprachlich benutzte Zufall und die begrenzte Wahrnehmung lässt den Alltagsmenschen hier wohl solche Aussagen durchaus zutreffend und meist nachvollziehbar durchführen.
Neben der streng formalen mathematischen Betrachtung ist daher bei einer umfassenden Betrachtung des Zufalls ein Spießroutenlauf bei den Erklärungen zu erwarten.
Die meisten **menschlichen Handlungen** sind kein Zufall sondern teilweise bewußtes teilweise unterbewußtes Abwägen von Alternativen und Auswahl der zum gegebenen Zeitpunkt anscheinend vorteilhaftesten (Ökonomie des Alltagslebens). Das ist zumindest die Meinung der meisten wissenschaftlich tätigen Psychologen.
Wahrscheinlich war ein im wesentlichen deterministisch arbeitendes Gehirn in der Evolution erfolgreicher als ein häufig zufallsgesteuertes Gehirn.
Die **Mathematik** kommt als Strukturwissenschaft in weiten Teilen ohne den Zufall aus. Von einigen Basisaxiomen ausgehend versucht die Mathematik logische nichtzufällige Begriffs- und Beziehungsgebäude zu errichten. Nur die Stochastik ist der Zweig der Mathematik, der sich explizit mit Zufallsereignissen beschäftigt.

**Welche Arten von Zufällen gibt es ?**

**Analytischer und synthetischer Zufall**
Es gibt
- analytische Zufallsfolgen ( Der Ursprung der Sequenz ist unbekannt , die Sequenz schaut zufällig aus)
- synthetische Zufallsfolgen ( Die Sequenz wird mit einem echten Zufallsgenerator erzeugt )

Dabei ist der analytische Zufall immer der grundlegendere. Denn man muß erst einen Zufallsgenerator analytisch überprüft (*auf Zufall geeicht*) haben, bis man ihn für den synthetischen Zufall einsetzen kann.

**Beispiele**
- elementares Zufallsereignis 0 - 1 , Münze: Wappen oder Zahl
- echte 01 Zufallsfolge durch eine Serie von Münzwürfen gewonnen
- kurze - lange Zufallsfolgen
    - je länger eine Zufallsfolge ist, desto klarer ist sie als zufällig erkennbar
- schiefe Zufallsfolgen ( zb Würfel mit 5 mal der Zahl 6 und einmal der Zahl 1 )
- codierte Zufallsfolgen zb würfelzahlen 1-6 bei 1000 mal Würfeln
- Pseudozufallsfolgen, künstlich errechneter Zufall
- gemischte zufällige und geordnete Folgen
- historisch teilweise zufällige Folgen
    - zb genetischer Code
    - zb Sprache
- gut komprimierte geordnete Sequenz - die schaut dann sehr zufällig aus und läßt sich kaum mehr komprimieren.

**Welche weitere Arten von Zufällen gibt es ?**
- echter Zufall , Pseudozufall ,
- subjektiver Zufall (zb Würfel), objektiver Zufall (zb radioaktiver Zerfall)
- 50 / 50 Zufall (Münze), Lottozufall ( sehr seltenes Ereignis )
- Zufall in der Natur
    - natürlicher Zufall ( Zufall in der Natur
        - anorganischer Zufall ( zb Radioaktivität )
        - biologischer Zufall ( zb Geschlecht männlich - weiblich)
- Zufall in der Kultur = künstlicher Zufall ( durch Menschen bewußt herbeigeführt , zb Münze , zb Würfel )
    - elementarer Zufall ( Münzwurf ) 2 Möglichkeiten , 50 /50 Chance

**Koinzidenz**
2 Ereignisse oder Ereignisketten sind zufällig irgendwie verbunden
- zufällige gleichzeitige Ereignisse
    - zb ein Kind wird geboren gleichzeitig geht der Mond auf.
- zufällige gleichörtliche Ereignisse
    - zb an einem Ort in der Wüste fällt ein Meteorit herunter, an derselben Stelle findet sich in 10 m Tiefe Wasser
- zufällige gleichzeitige und gleichörtliche Ereignisse
    - Ein Mensch wird von einem Meteoriten getroffen.

**Bedeutung des Zufalls für den Einzelnen**
- Glück
- Pechzufall
- Zufall der Vor- und Nachteile bietet

**Was nützt uns der Zufall**
Ganz egal ob man an den echten Zufall glaubt oder nicht, im praktischen Alltag ist der Zufall längst nicht mehr wegzudenken, denn man kann einige schöne ( und unschöne ) Dinge damit machen.

**Gerechtigkeit produzieren**
Knappe Studienplätze vergeben. Organempfänger auslosen.

**Spiele spannend machen**
In den meisten Spielen ist ein Zufallsfaktor eingebaut. zb Lotto , Klassenlotterie etc Kein Zufallsfaktor findet sich im Schachspiel. Es kann rein deterministisch gespielt werden.

**Kartenspiele:**
Beim Patiencen legen werden die Karten anfangs zufällig gemischt. Aufgabe des Spielers ist es, wieder eine geordnete Reihenfolge herzustellen.

**Das Game of Life von Conway**
Auch das Game of Life von Conway kann man mit einer Zufallsbesetzung der Zellen gestartet werden und endet irgendwann in einem stabilen Zustand.

Siehe

- http://www.mathe-online.at/galerie/modsim/modsim.html
- http://www.madeasy.de/2/life.htm
- http://psoup.math.wisc.edu/Life32.html
- http://www.radicaleye.com/lifepage/
- http://dmoz.org/Computers/Artificial_Life/Cellular_Automata/Conway's_Game_of_Life/

**Literatur**

- Das Spiel von Manfred Eigen - ein sehr lesenswertes Buch

**Randomisation**

Randomisierte Versuche zum Wirksamkeitsnachweis durchführen. Die Wirksamkeit von Medikamenten nachweisen.
Unter dem Begriff **Randomisation** versteht man die zufallsmässige Aufteilung einer größeren Anzahl von Versuchspersonen oder Versuchstieren in 2 oder mehrere Gruppen. Umgangssprachlich kann man den Begriff Randomisation auch mit Auslosen übersetzen.
Durch eine Randomisation kann man nicht gewollte, systematische Einflüsse auf Versuchsergebnisse verkleinern. Man braucht die Randomisation bei der Durchführung von statistischen Testverfahren.
Die Wirksamkeit von medizinischen Maßnahmen wird oft mittels Randomisation in eine Gruppe von behandelten und in eine Gruppe von nichtbehandelten Versuchspersonen überprüft.
Manche bringen ethische Bedenken bei der Forderung nach einer Randomisation vor. Diese sind aber meist nicht zutreffend, da die Randomisation die statistische Aussagekraft erhöht und damit gewährleistet, dass möglichst wenige Personen mit der unwirksamen Alternative behandelt werden.

**Kryptographie**

Echte Zufallszahlen sind wichtig für die Kryptographie z.B. für die Erzeugung von geheimen Schlüsseln sowie in der Simulation zufälliger Prozesse!

**Stochastik**

Die Wissenschaft vom Zufall.

**Statistik**

Echte Unterschiede in 2 sonst gut vergleichbaren Gruppen herausarbeiten. Die Echtheit von Meßdaten überprüfen.

**Neue Lösungen suchen**

Ausprobieren von zufälligen Möglichkeiten beim Problemlösen und behalten von brauchbaren Möglichkeiten.

**Zufall und Geld**

Geld verdienen kann der Staat mit Lotto, Toto, Klassenlotterie. In Spielcasinos Geld gewinnen kann der einzelne Mitspieler, wenn er viel Glück hat.

**Unregelmäßige Flächen berechnen**

**Kontroverse Vorstellungen von Zufall**

Interessant ist, daß viele Menschen glauben, es gäbe keinen Zufall. Andere wiederum meinen alles sei nur Zufall. Mit viel Vehemenz werden beide Standpunkte vertreten. Beide Gruppen haben wahrscheinlich unrecht, denn die Wirklichkeit zeigt eine gute Mischung von Zufallsereignissen und gesetzmäßig ablaufenden Ereignissen.

**Es gibt keinen Zufall**

Albert Einstein hatte große Probleme mit dem Zufall in seinem Weltbild einen Platz einzuräumen. Das Zitat "Gott würfelt nicht!" stammt von ihm. Wahrscheinlich hat er unrecht mit dieser Bemerkung, denn in den Naturgesetzen hat der Zufall einen wichtigen Platz.
Auch Hume konnte sich nur schwer mit dem Zufall anfreunden: *Man gibt allgemein zu, dass nichts da ist ohne Ursache für sein Dasein, und dass Zufall im strengen Sinne nur eine Verneinung ist und keine wirkliche Kraft bezeichnet, die irgend ein Dasein in der Natur hätte.* [Hume: Untersuchung in Betreff des menschlichen Verstandes, S. 134. Digitale Bibliothek Band 2: Philosophie, S. 15317 (vgl. Hume-Unters., S. 88)]
Einige Meinungen zum Zufall aus dem Internet:

- Claudia schrieb am 11.9. 2000 um 11:23:19 Uhr über Zufall
    - *Zufall gibt es nicht.*
- Daniel schrieb am 24.5. 2001 um 23:33:07 Uhr über Zufall

        - *Ich glaube nicht an Zufall! Zufall gibt es nicht! Es gibt nur KA oder Karma! und wir alle die die meinen Text lesen gehören zu einem KA-TET denn wir haben uns beeinflusst, ihr mich, dass ich diesen Text geschrieben habe und ich euch dass ihr euch die Zeit genommen habt ihn zu lesen! Es ist kein Zufall!!!*
- Felix schrieb am 10.2. 2000 um 13:48:19 Uhr über Zufall
    - *Zufall ist ein Unwort, daß aus dem Wortschatz gestrichen werden sollte.*
    - *Es gibt keine Zufälle. Es gibt nur unvollkommene Einsicht des Menschen, mangelndes Verstehen und mangelndes Erklärungsvermögen. Alles ist miteinander verbunden und steht in ewiger Wechselwirkung. Alles bedingt und beeinflusst sich gegenseitig.*

**Der Zufall und die Kausalität widersprechen sich ?**
Dazu wieder eine Meinung aus dem Internet:
- Chandowar schrieb am 1.8. 2001 um 11:36:09 Uhr über Zufall
    - *Es gibt keinen Zufall. Alles hat eine Ursache, auch wenn wir es nicht erkennen können oder vergessen haben.*

Manche Menschen meinen im Kausalitätsgedanken und in Zufallsereignissen stecke ein Widerspruch . Diese Ansicht ist wahrscheinlich falsch. Siehe dazu den Abschnitt Zufall und Philosophie in diesem Text

**In einem Zufallsverfahren steckt ein Gottesurteil, denn nur Gott könne den Zufall vorausahnen**
In der Bibel werden Szenen beschrieben, die eine zufällige Auswahl als ein Gottesurteil ansahen. Auch im Mittelalter wurde öfter in Gerichtsverfahren der Schuldige aus einer Reihe von Verdächtigen per Los "gefunden". Nur Gott könne den Ausgang des Losverfahrens voraussehen.
Wie die Theologie und die verschiedenen Religionen zu diesem Thema stehen, wäre interessant zu hören. Ein neuzeitlich ausgebildeter Richter würde so ein Verfahren jedenfalls als Unsinn ablehnen.

**Die Evolution sei ein reiner Zufallsprozeß**
Diese Ansicht wird von den meisten Biologen abgelehnt. Sie sehen die Evolution als historischen Mischprozeß aus Zufall und Notwendigkeit (Selektion) an.
Von der Gegenseite wird der Biologie immer wieder vorgeworfen, sie behaupte, daß das Leben aus reinem Zufall entstanden ist. Die folgenden Zitate zeigen diese Auffassung, die den Zufall in der Lebensentstehung ablehnt.

**Fred Hoyle**
*Die orthodoxe Biologie in ihrer Gesamtstruktur [hält] daran fest, daß Leben zufällig entstand. Seit jedoch die Biochemiker in steigendem Maße die ehrfurchtgebietende Komplexität des Lebens entdecken, ist sein zufälliger Ursprung ganz offensichtlich so wenig wahrscheinlich, daß man diese Möglichkeit völlig ausschließen kann. Leben kann nicht zufällig entstanden sein.* Siehe

**Michael Denton (ISCID)**
*Ganz gleich, wohin wir blicken, in welche Tiefe wir schauen, stellen wir eine Formschönheit und eine absolut unübertroffene Ingeniosität fest, die den Gedanken an einen Zufall nicht zuläßt. Sollte man wirklich glauben, daß willkürliche Prozesse eine Realität hätten hervorbringen können, deren kleinstes Element - ein funktionsfähiges Protein oder Gen - so komplex ist, daß es unsere eigenen schöpferischen Fähigkeiten weit in den Schatten stellt, eine Realität, die dem Zufall genau entgegengesetzt ist und in jeder Hinsicht alles übertrifft, was die Intelligenz des Menschen hervorbringen könnte?*
- Siehe http://www.iscid.org/

**Michael_J._Behe**
- http://de.wikipedia.org/wiki/Michael_J._Behe
- Liste von Behes Online-Artikeln über Intelligent Design

**William_A._Dembski**
Dembski ist der Ansicht, es sei statistisch unwahrscheinlich, dass natürliche Selektion die außerordentliche Vielfalt des Lebens hervorbringen könne. Dieser Standpunkt kristallisierte sich bei einer Konferenz über Zufälligkeit (Randomness) an der Ohio State University 1988 heraus, wo der Statistiker Persi Diaconis zum Abschluss sagte: *Wir wissen, was Zufälligkeit nicht ist. Was sie ist, wissen wir nicht.* Dembski nennt dieses Ereignis den Katalysator für seine nachfolgenden Arbeiten über Design. [2] Er stellte im Ergebnis die Hypothese auf, dass Zufälligkeit ein abgeleiteter Begriff sei, der nur unter Rückgriff auf Design, als den grundlegenderen Begriff, verstanden werden könne. Diese Gedanken präsentierte er 1991 in seinem Papier "Randomness by Design", das in der Zeitschrift Noûs erschien. [3]
- http://de.wikipedia.org/wiki/William_A._Dembski
- http://www.designinference.com/

**Dr.Plichta**
Der Chemiker und Mathematiker Dr. Plichta ist ein Gegner der Zufallstheorie. Für ihn hat die Welt einen mathematischen Hintergrund.

**Prof Gitt**
Der Informatiker Prof. Gitt meint, dass viele Faktoren, die das Leben auf der Erde bestimmen, nicht zufällig entstanden sein können.

**Wie kann man Zufall künstlich erzeugen ? Zufallsgenerator**

**Zufallszahlengenerator**
Als Zufallszahlengenerator, gelegentlich auch Zufallsgenerator oder schlicht Generator, bezeichnet man eine Prozedur, die eine Folge von Zufallszahlen erzeugt.
Das Simulationslemma besagt: Mit Hilfe von Standard-Zufallszahlengeneratoren kann man prinzipiell Zufallsvariablen (bzw. unabhängige, identisch verteilte Folge von Zufallsvariablen) zu jeder anderen Verteilung F über R simulieren (Inversionsmethode).

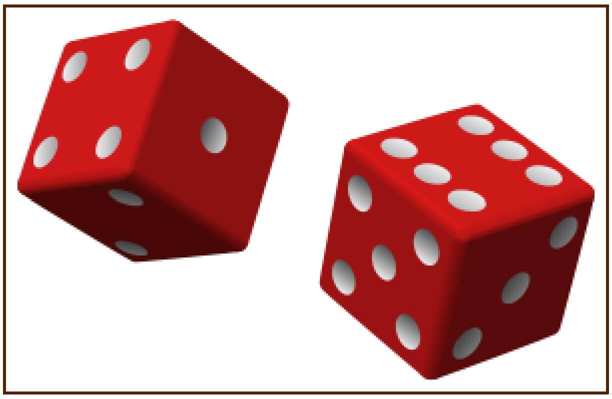
**Arten von Zufallszahlengeneratoren**
Man unterscheidet unter anderem folgende Arten von Zufallszahlengeneratoren (Auswahl): physikalischer Zufallszahlengenerator (z. B. Ausnutzung radioaktiver Zerfallsvorgänge oder elektronischer Impulsschwankungen) arithmetischer Zufallszahlengenerator (basieren auf der Arithmetik) rekursiver arithmetischer Zufallszahlengenerator (Verwendung rationaler Zahlen) Kongruenzgenerator linearer Kongruenzgenerator multiplikativer Kongruenzgenerator gemischter linearer Kongruenzgenerator Fibonacci-Generator inverser Kongruenzgenerator Schieberegister mit Rückkopplung lineares Schieberegister nichtlineares Schieberegister Auszählreime in Kinderspielen stellen eine Art analoge Version von Zufallsgeneratoren da.
Rekursive arithmetische Zufallszahlengeneratoren gehören zu den Pseudozufallszahlengeneratoren, da sie bestimmte Eigenschaften von Zufallszahlen verletzen und man nur von Pseudozufallszahlen sprechen kann.

**Beispiele**
Münze, Würfel, Roulette, Urne

**Münze:**


**Reissnagel**
Der Reissnagel ist das Beispiel eines binären Zufallsgenerators mit ungleicher Zufallsverteilung p ungleich q.


**Würfel:**
Abb.:Zwei Spielwürfel



Ein Spielwürfel ist ein als Zufallsgenerator verwendeter Gegenstand, der auf mehrere, voneinander unterscheidbare Arten stabil auf der Ebene zu liegen kommen kann. Die meisten Würfel sind heute aus Holz oder Kunststoff und haben einen Durchmesser von etwa eineinhalb Zentimetern. Spielwürfel werden vor allem in den nach ihnen benannten Würfelspielen und in Glücksspielen, gelegentlich auch in Brettspielen verwendet.
Zum Bestimmen des Zufallsergebnisses wird der Würfel auf eine ebene Fläche geworfen. Sind mehrere Würfel gleichzeitig zu werfen oder soll das Ergebnis nicht allen Spielern einsichtig sein, so ist es zweckmäßig einen Würfelbecher zu benutzen. Nachdem der Würfel zur Ruhe gekommen ist, kann das Ergebnis an seiner Lage abgelesen werden.
Weitere in Spielen gebräuchliche Zufallsgeneratoren sind Spielkarten, das Glücksrad und das Knobeln. Formen Die am meisten verwendete, klassische Form ist die eines geometrischen Würfels, worauf auch der Begriff Spielwürfel zurückgeht. Um seine Rolleigenschaft zu verbessern, sind die Ecken heute häufig abgerundet. Die Flächen sind meistens mit ein bis sechs Punkten versehen, die auch als Augen bezeichnet werden, wobei die Augensumme sich gegenüberliegendener Seiten in der Regel sieben ergibt. Die Orientierung der gegenüberliegenden Paare (1,6), (2,5), (3,4) ist im westlichen Kulturkreis so festgelegt, dass die Ziffern 1, 2 und 3 im Gegenuhrzeigersinn gesehen werden, während sie im Fernen Osten im Uhrzeigersinn ausgerichtet sind.
In der Antike und im Mittelalter wurden Sprunggelenkknöchelchen von Paarhufern wie Schafen oder Ziegen zum Würfeln verwendet. Im Mittelalter waren sie unter dem Namen Buckelhörner bekannt; der lateinische Name lautet astragali. Durch deren kantige Form sind vier verschiedene Ruhepositionen möglich. Die Wahrscheinlichkeit für diese Ergebnisse ist unterschiedlich hoch, eine Tatsache, die auch in den Regeln des beliebten römischen Würfelspiels Astragaloi berücksichtigt wird.
Im Sinne dieses Artikels ist auch ein Münzwurf als Würfel anzusehen. Münzen wurden wohl seit ihrer Erfindung auch für Zufallsentscheidungen benutzt.

20-seitiger Spielwürfel
Vor allem im Papier-und-Bleistift-Rollenspiel kommen auch vom Würfel verschiedene Polyederformen zum Einsatz. Dabei wünscht man, dass die einzelnen Ergebnisse mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten und die Ruhepositionen eine gewisse Stabilität in ihrer Lage aufweisen. Diese Eigenschaften sind für die fünf platonischen Körper erfüllt, die nicht zuletzt auch deshalb gerne benutzt werden, da ihnen aufgrund ihrer zahlreichen Symmetrien ein hoher ästhetischer Reiz zugesprochen wird. Weil der klassische Würfel selbst auch ein platonischer Körper ist, ergeben sich als neue Formen vier-, acht-, zwölf- und 20-seitige Spielwürfel.

 4-seitiger Spielwürfel

Das vierseitige Tetraeder weist dabei die Besonderheit auf, dass in den Ruhepositionen keine Fläche, sondern eine Ecke des Körpers nach oben weist, und sich deshalb die Ergebnisse nicht auf die gewohnte Weise von den Seiten ablesen lassen. Deshalb sind hier häufig die nach oben ragende Ecke oder, wie auf dem Foto zu sehen, die Kanten der untenliegenden Seite an den sichtbaren, angrenzenden Seiten markiert.
Ebenfalls gebräuchliche zehn- und 100-seitige Würfel weisen im Verhältnis zu ihrer Flächenanzahl weniger Symmetrien auf als die platonischen Körper. Sie werden aber gerne benutzt, um beispielsweise in unserem Dezimalsystem zufällige Prozentzahlen zu erzeugen.

Einen Spielwürfel, bei dem jedes mögliche Ergebnis mit exakt gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt, nennt man einen idealen Würfel. Für die meisten Würfel wird die Form eines idealen Würfels gewählt, wobei physikalisch bedingt immer gewisse Abweichungen bei der Fertigung auftreten. Bei einem guten Würfel ist diese Abweichung sehr gering. Gelegentlich wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung bewusst zugunsten bestimmter Ergebnisse manipuliert, möglichst ohne den Würfel optisch zu verändern, um sich im Spiel einen Vorteil zu verschaffen. In diesem Fall spricht man von einem gezinkten Würfel. Die Möglichkeiten beinhalten das Verändern der Gewichtsverteilung, unterschiedlich stark abgerundete Kanten bzw. Ecken sowie das Verziehen von manchen Flächen. Zu stark gezinkte Würfel verraten sich durch eine torkelnde Rollbewegung, was beim Einsatz eines Würfelbechers aber nicht auffällt. Eine weitere Manipulationsmöglichkeit ist es, im Inneren des Würfels einen Dauermagneten zu platzieren um den Würfelwurf bei Bedarf durch einen zweiten, beispielsweise unter die Tischplatte gehaltenen, Magneten zu beeinflussen. Um das Zinken zu erschweren, werden im Kasino transparente Würfel eingesetzt.

**Urne**

- Ohne zurücklegen
- Mit zurücklegen

Eine Urne ist ein Behälter in dem meist feststoffliche Dinge temporär oder dauerhauft aufbewahrt werden.
Lotterieurnen
Bei Lotterien und verwandten Spielen werden Lose oder Kugeln in eine Urne gesteckt und anschließend verdeckt gezogen, um ein Zufallsereignis zu erzeugen. Urnen haben sich dabei als universelle Werkzeuge der Stochastik erwiesen, da man mit Ihnen fast alle Arten von Zufall und Wahrscheinlichkeit simulieren kann. Wichtig ist der Unterschied der Ziehung mit Zurücklegen und ohne Zurücklegen.
Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Lotterie
Abb: Urne mit 6 verschiedenen Kugeln


Eine Frage an die Experten: Wieviel Bit an Entropie steckt in jedem Zug dieser 6er Urne unter der Voraussetzung,

daß alle Kugeln gleichwahrscheinlich p = 1/6 gezogen werden ?
Antwort; S = 2,585... bit
Siehe auch Entropie des 6er Würfels

**Roulette**
Roulette ist ein Glücksspiel, bei dem üblicherweise in einer Spielbank mit Hilfe einer Kugel in einem rotierenden, liegenden Rad (genannt: Kessel) eine Zufallszahl gezogen wird. Die Spieler wetten auf die Zahl oder auf Zahlengruppen (so genannte Chancen), indem sie ihren Einsatz mit Hilfe von Spielmarken (Jetons) auf die entsprechenden Felder des Spieltisches legen. Wird die Zahl gezogen oder ist in der entsprechenden Zahlengruppe, wird ein Vielfaches des Einsatzes als Gewinn ausgezahlt und der Einsatz zurückgegeben. Wird die Zahl nicht gezogen, fällt der Einsatz an die Spielbank.
Die Erfindung des Roulettespiel wird dem französischen Mathematiker Blaise Pascal zugeschrieben. Er soll es zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten entworfen haben. Es wird mit den Zahlen 0 bis 36 gespielt. In manchen Spielbanken, so in Belgien, gibt es auch, zum Vorteil der Spielbank, die Doppelnull. In den USA wird auf einem vereinfachten Tableau mit Doppelnull gespielt.
Standardtypen der Wetten
Im Roulettespiel gibt es Standards bei den Wetten. Gewettet werden kann

- auf eine einzelne Zahl, z.B. 1, genannt: Plein, Gewinnwahrscheinlichkeit 1/37, bei Gewinn gibt es das 35-fache des Einsatzes und den Einsatz zurück.
- auf zwei auf dem Spielplan nebeneinanderliegende Zahlen, z.B. 1 und 2 oder 1 und 4, genannt: Cheval, Gewinnwahrscheinlichkeit 2/37, bei Gewinn gibt es das 17-fache des Einsatzes und den Einsatz zurück.
- auf drei auf dem Spielplan nebeneinanderliegende Zahlen, z.B. 1, 2 und 3, genannt: Transversale Plein, Gewinnwahrscheinlichkeit 3/37, bei Gewinn gibt es das 11-fache des Einsatzes und den Einsatz zurück.
- auf vier Zahlen, die auf dem Spielplan ein Quadrat bilden, z.B. 1, 2, 4 und 5, genannt: Carre; oder auf die ersten vier Zahlen 0, 1, 2 und 3, genannt: Die ersten Vier. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist 4/37, bei Gewinn gibt es das Achtfache des Einsatzes und den Einsatz zurück.
- auf sechs auf dem Spielplan nebeneinanderliegende Zahlen, z.B. 1 bis 6, genannt: Transversale Simple, Gewinnwahrscheinlichkeit 6/37, bei Gewinn gibt es das Fünffache des Einsatzes und den Einsatz zurück.
- auf 12 auf dem Spielplan nebeneinanderliegende Zahlen, z.B. 1 bis 12, genannt: Dutzende; oder 12 untereinanderliegende Zahlen, z.B. 1, 4, 7, ..., 34, genannt: Kolonnen. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist 12/37, bei Gewinn gibt es das Zweifache des Einsatzes und den Einsatz zurück.
- auf 18 Zahlen, die einer Gruppe angehören, die so genannten "einfachen Chancen". Dabei werden drei unterschiedliche Gruppen gebildet, nämlich die Zahlen 1 bis 18, genannt: Manque, und 19 bis 36, genannt: Passe; die geraden Zahlen 2, 4, 6, ..., 36 genannt: Pair, und die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ..., 35 genannt: Impair; sowie die so genannten roten Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, ..., 36, genannt: Rouge; und die so genannten schwarzen Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 11, ..., 35, genannt: Noir. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 18/37, bei Gewinn gibt es den einfachen Einsatz und den Einsatz zurück.
- auf Zahlen, die im Kessel nebeneinander angeordnet sind. Dabei werden im Standard drei Gruppen unterschiedlicher Größe gebildet, welche die Namen "Große Serie 0/2/3", "Serie 5/8" und "Orphelins" tragen.

Generell gilt: **Je höher die Gewinnwahrscheinlichkeit, umso geringer die Gewinnausschüttung, und umgekehrt.** Die Standardwetten erlauben es den Spielern, mit dem geforderten Minimaleinsatz auf mehr als eine Zahl zu wetten. Darüber hinaus steht es jedem Spieler frei, pro Durchgang seine eigenen Zahlenkombinationen zu bilden, für die er im Allgemeinen dann jedoch mehr als den Minimaleinsatz aufwenden muss.
Die **Chance** beim Roulette-Spiel bedeutet die Art und Höhe eines Einsatzes gemäß den Spielregeln.
Konventionelle Satzmöglichkeiten sind:

- Plein = 1 Nummer
- Cheval = 2 Nummern
- Transversale Simple = 3 Nummern
- Erste Drei = 3 Nummern (1, 2, 3)
- Carré = 4 Nummern
- Erste Vier = 4 Nummern (0, 1, 2, 3)
- Transversale Simple = 6 Nummern
- Dutzend = 12 Nummern (auch doppelte Chance genannt)
- Kolonne = 12 Nummern (auch doppelte Chance genannt)
- Einfache Chance = 18 Nummern

Daneben spricht man von "objektiven" und "subjektiven" Chancen, um die Möglichkeit des Gewinns zu verdeutlichen. Die "subjektive" Chance ist das Setzen auf eine "Glückszahl" (wie Geburtstag oder Hochzeitstag) ohne Beachtung der Permanenz (der bisher gefallenen Nummern) oder statistischer Verteilungen. Im Gegensatz dazu nutzt die "objektive" Chance bestimmte Ausprägungen der Permanenz aus und setzt z.B. auf die 3 letzten noch nicht gefallenen Nummern oder auf den Wechsel einer Farbe nach Zero. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung

entlarvt solche einfachen "Strategien" jedoch als keineswegs "objektiv", sondern als bloßen Wahn. Personen, die allzu fest an diese Strategien glauben, sind vermutlich Spielsucht-gefährdet.
Man spricht von Chancengröße *m*, um die Anzahl der gesetzten Nummern eines Satzes anzugeben. Bei einfachen Chancen (Rot oder Schwarz) ist m = 18, beim Carré ist m = 4.

**Zufall in der Mathematik**
Die **Stochastik** ist die Teildisziplin der Mathematik, die sich mit dem Zufall beschäftigt. Etwas plakativ hat man die Statistik früher als *die Physik der Mathematik* bezeichnet und oft als vermeintlich unexakt eingeschätzt. Diese Einstellung hat sich mittlerweile weitgehend geändert. Zur rein deskriptiven Statistik ist die bewertende Statistik und die Wahrscheinlichkeitstheorie hinzugekommen.
Die Mathematik setzt eine Vorstellung vom Zufall voraus und liefert Rechenmodelle, mit denen sich zufällige Ereignisse quantifizieren lassen. Eine grundlegende Klärung, was denn Zufall eigentlich ist, kann in der Mathematik nicht erfolgen. Trotzdem war das Experimentieren und das Rechnen mit dem Zufall sehr fruchtbar. Ohne sich in Grundsatzdiskussionen zu verstricken, wurden wichtige Erkenntnisse über den Zufall gewonnen, die die Philosophie nicht liefern konnte.
Man muß 3 Begriffe trennen:
- Zahl der Möglichkeiten ( Ereignisraum eines Zufallsexperimentes)
- Wahrscheinlichkeit
- Menge an Zufallsinformation = Entropie in der Mathematik

Für den idealen einmaligen Münzwurf gilt dann beispielsweise:
- Zahl der Möglichkeiten : 2
- Wahrscheinlichkeit jeder Möglichkeit 0,5
- Entropie = Log2(2) = 1 bit

Wiederholt man den Münzwurf 2 mal , dann gilt:
- Zahl der Möglichkeiten : 4
- Wahrscheinlichkeit jeder Möglichkeit 0,25
- Entropie = Log2(4) = 2 bit

**Zufall quantitativ**
In der formalen Welt der Mathematik lassen sich abstrakte Strukturen definieren, die aus der menschlichen Vorstellung beziehungsweise Erwartung von Zufall motiviert sind. Glücksspiele motivierten die ersten mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorien und werden auch heute noch oft zu ihrer Illustration eingesetzt.
Die folgenden Begriffe sind zentral zur formalen Beschreibung des Zufalls:

> **(Zufalls)experiment**: Die durchgeführten und/oder beobachteten Vorgänge (beispielsweise zweimaliges Werfen eines Würfels).
> **Ergebnis** oder Elementar-Ereignis: Beobachtung (beispielsweise erster Wurf '3', zweiter Wurf '5').
> **Ereignis**: Aus Elementarereignissen zusammengesetze Menge (das Ereignis "gerade Zahl gewürfelt" ist aus den Elementarereignissen "2,4 oder 6 gewürfelt" zusammengesetzt).
> **Wahrscheinlichkeit**: Jedem Elementarereignis wird ein Zahlenwert zwischen *0* (tritt nie ein) und *1* (tritt immer ein) zugeordnet (beispielsweise Gleichverteilung: Die Wahrscheinlichkeit für jede Zahl auf dem Würfel ist gleichgroß, nämlich 1/6). Bei einem Kontinuum möglicher Ergebnisse spricht man von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Offensichtlich sind nur solche Zufallsexperimente interessant, die mehr als ein mögliches Ergebnis haben.
Die Statistik versucht, zu einem gegebenen Zufallsexperiment die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung zu ermitteln.

**Zufallsexperiment**
In der Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnet ein Zufallsexperiment eine Serie von gleichwertigen und voneinander unabhängigen Versuchen. Als Versuch versteht man hier einen Vorgang, der ein nicht vorhersagbares, erfassbares Ergebnis zur Folge hat, zum Beispiel das Werfen einer Münze oder eines Spielwürfels.
Obwohl das Ergebnis jedes einzelnen Versuchs zufällig ist, lassen sich bei hinreichend häufiger Wiederholung Gesetzmäßigkeiten erkennen. Die interessierenden Größen eines Zufallsexperimentes nennt man Zufallsvariablen.

**Beispiel eines Zufallsexperimentes**
Die Stufen eines Zufallsexperiments sind
1. Vor dem Experiment: Mindestens 2 Ergebnisse sind möglich, es ist aber noch nichts entschieden.
2. Das Zufallsexperiment wird durchgeführt.
3. Aus den mindestens 2 möglichen Ergebnissen wurde eines zufällig ausgewählt.

Das einfachste Zufallsexperiment hat zwei mögliche Ergebnisse, die die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.
Man kann mit einer Münze diese Art von Zufallsexperiment durchführen und selber Zufallszahlen erzeugen. Dabei ordnet man der einen Seite der Münze die Zahl 0, der anderen die Zahl 1 zu. Durch Notieren vieler Wurfergebnisse

erhält man eine Folge von 0 und 1. Eine solche Folge ist das Ergebnis eines sehr einfachen Zufallsprozesses.
Die so erhaltenen Zufallsfolgen von 0 und 1 sind leicht statistisch untersuchbar. Dabei kann man Eigenschaften dieser Zufallsfolgen feststellen, die bei nicht-zufälligen Folgen (also Folgen, die deterministisch nach irgendeinem Gesetz ermittelt werden) nicht auftreten. Auf diese Weise kann man Zahlenfolgen auf echte Zufälligkeit prüfen. Auffällige statistische Abweichungen von reinen Zufallsfolgen können zum Beispiel verwendet werden, um wissenschaftliche Fälschungen zu enttarnen, da Messungen stets auch einen zufälligen Messfehler beinhalten, während erfundene Zufallsfehler oft gerade durch den Versuch, sie möglichst zufällig erscheinen zu lassen, deutliche Abweichungen vom Zufallsergebnis enthalten.
Je länger eine Zahlenfolge ist, desto klarer kann unterschieden werden, ob es sich um eine zufällige oder nicht zufällige Folge handelt. Theoretisch kann auch ein Zufallsexperiment eine Folge von hundert Nullen hintereinander liefern, nur ist das so unwahrscheinlich, dass man in diesem Fall mit gutem Recht von einer Regelmäßigkeit ausgehen darf. Auf der anderen Seite gibt es deterministische Algorithmen, deren Ergebnisse sehr ähnlich denen eines Zufallsexperiments sind, so genannte Pseudozufallsgeneratoren. Bei guten Pseudozufallsgeneratoren braucht man eine sehr lange Zahlenreihe, um den Unterschied zum echten Zufall erkennen zu können. In der Informatik werden gelegentlich Zufallszahlen benötigt. Der Versuch, sie mit dem Computer zu *berechnen*, ist ein Widerspruch in sich.
Eine Folge, die die Realität abbildet, ist nicht immer rein deterministisch oder rein zufällig, sondern es liegt häufig eine Mischung aus beidem vor. Ein einfaches Beispiel wäre, wenn man beispielsweise stets eine Ziffer per Münzwurf bestimmt, die nächste als den Unterschied zwischen den beiden vorhergehenden Ziffern, dann wieder Münzwurf, und so fort. Durch Untersuchung solcher Folgen bekommt man ein recht gutes Verständnis für den Zufall und die Mischung von Zufälligem und Nichtzufälligem, wie es ja oft in der Realität anzutreffen ist.
Ein elementares Zufallsereignis beruht auf Gleichheit und Ungleichheit

- Die zwei möglichen Varianten müssen gleich sein (das heißt gleichwahrscheinlich).
- Trotzdem müssen sie irgendwie ungleich, nämlich unterscheidbar sein.

(Münze: beide Seiten müssen mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten können, trotzdem müssen beide Seiten verschieden geprägt (beziehungsweise gefärbt etc.) sein, sonst könnte man sie nicht unterscheiden.)
Siehe auch Abbildungen unter http://www.madeasy.de/2/zufall.htm#5

**Zufallsvariable, Zufallsgröße**
Als **Zufallsvariable** oder **Zufallsgröße** bezeichnet man eine mathematische Variable, die je nach dem Ergebnis einer als zufällig aufgefassten Prozedur verschiedene Werte annehmen kann. Die Prozedur kann eine Auslosung sein, die Berechnung einer Pseudozufallszahl oder die Messung einer statistisch verteilten und/oder mit Messfehler behafteten Größe.
Beispielsweise ist die **Augenzahl eines Würfels** eine Zufallsvariable, die die Werte 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 annehmen kann.
Wenn die Menge der möglichen Werte einer Zufallsvariablen endlich (wie beim Würfel) oder abzählbar unendlich ist, nennt man die Zufallsvariable **diskret**. Wenn die Wertemenge überabzählbar ist, typischerweise also aus reellen Zahlen besteht (wie bei der idealisierten Messung einer physikalischen Größe), heißt die Zufallsvariable **stetig** (kontinuierlich).
Die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Werte einer diskreten Zufallsvariable bilden eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln mit zwei Würfeln die Gesamtaugenzahl $Z$ zu erreichen, folgt zum Beispiel der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(Z)=(6-|7-Z|)/36$.
Den möglichen Wert einer kontinuierlichen Zufallsvariablen kann man dagegen keine endliche Wahrscheinlichkeit zuordnen; man muss hier mit Wahrscheinlichkeitsdichten und/oder kumulativen Wahrscheinlichkeitsverteilungen arbeiten.
In einer abstrakteren Formulierung der Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnet man als Zufallsvariable eine messbare Funktion von einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen Maßraum. Normalerweise wählt man als Bildraum die Menge der |reellen Zahlen, ausgestattet mit der Borelschen σ-Algebra.

**Zufallszahlen**
In der Statistik bezeichnet man mit **Zufallszahl** den Wert einer Zufallsvariable bei einem Zufallsexperiment. Das Ergebnis des Experiments ist von früheren Ergebnissen unabhängig.
Zufallszahlen werden bei verschiedenen Methoden der Statistik benötigt, z.B. bei der Auswahl einer repräsentativen Stichprobe aus einer Grundgesamtheit, bei der Verteilung von Versuchstieren auf verschiedene Versuchsgruppen (Randomisierung), bei der Monte-Carlo-Simulation u.a.
Zur Erzeugung von Zufallszahlen gibt es verschiedene Verfahren. **Echte Zufallszahlen** werden mit Hilfe physikalischer Phänomene erzeugt: Münzwurf, Würfel, Roulette, Rauschen (Physik) elektronischer Bauelemente, radioaktive Zerfallsprozesse. Diese Verfahren sind jedoch recht zeitaufwändig. In der realen Anwendung genügt meist eine Folge von Pseudozufallszahlen, d.h. *scheinbar* zufällige Zahlen, die nach einem festen, reproduzierbaren Verfahren erzeugt werden. Sie sind also nicht wirklich zufällig, haben aber ähnliche statistische Eigenschaften (gleichmäßige Häufigkeitsverteilung, geringe Korrelation) wie echte Zufallszahlenfolgen.
Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Verteilung_von_Zufallszahlen

**Pseudozufallszahlen**
Als **Pseudozufallszahlen** bezeichnet man Zahlenfolgen, die durch einen deterministischen Algorithmus (Pseudozufallszahlengenerator) berechnet werden (und somit *nicht* zufällig sind), aber (für hinreichend kurze Sequenzen) zufällig aussehen. Bei jedem Start der Zufallszahlenberechnung mit gleichem Startwert wird die gleiche Zahlenfolge erzeugt (weswegen diese Zahlen weit davon entfernt sind, wirklich zufällig zu sein). Pseudozufallszahlen erzeugt man mit Pseudozufallszahlengeneratoren.
Die Zufälligkeit wird durch statistische Eigenschaften der Zahlenfolge bestimmt, wie Gleichwahrscheinlichkeit der einzelnen Zahlen und statistische Unabhängigkeit verschiedener Zahlen der Folge. Wie gut diese statistischen Forderungen erfüllt sind, bestimmt die Güte eines Pseudozufallszahlengenerators.
Eine Folge von Pseudozufallszahlen wird mittels deterministischer Algorithmen ausgehend von einem echt zufällig gewählten Startwert berechnet. Ein solcher Startwert kann z.B. die Systemzeit des Computers in Millisekunden im Moment des letzten Einschaltens sein. Diese Folge besitzt die Eigenschaft, dass es schwer ist, anhand einiger Zahlen die nächsten Zahlen der Folge vorherzusagen. Eine Folge von Pseudozufallszahlen "sieht zufällig aus".

**Eigenschaften von Pseudozufallszahlalgorithmen**
Einige Zufallszahlenalgorithmen sind periodisch. Auch wenn es meist besser wäre nicht-periodische Algorithmen zu verwenden, sind die periodischen oft deutlich schneller. Durch geschickte Wahl der Parameter kann man die Periode beliebig groß machen, weshalb sie in der Praxis den nicht-periodischen oft deutlich überlegen sind. Einige Pseudozufallszahlengeneratoren sind auch nur endlich, d.h. man kann mit ihnen nicht beliebig viele Zahlen erzeugen (von daher sind sie in gewissem Sinne verwandt mit den periodischen).

**Drei Beispiele für Pseudozufallszahlengeneratoren**

**endlicher Generator**
Um eine Folge von $N$ Zahlen zwischen 0 und $m$ zu erzeugen, wähle man ein $k$ größer als $m^2$, ein $p$ größer als $(k + N)^2$ und nicht durch kleine Primzahlen teilbar (wobei klein hier bedeutet: kleiner als $m$).

$$a_n = (p \mod (k+n)) \mod m$$

**periodischer Generator**
Man nehme Startzahlen $a_0$, $p$, $b$ und $m$, wobei $m$ die größte dieser Zahlen ist.

$$a_n = (A_{n-1}p + b) \mod m$$

Ein weiteres Beispiel stellt der Mersenne Twister dar.

**nicht-periodischer/unendlicher Generator**
Man nehme die Nachkommastellen einer Wurzel einer ganzen Zahl als Zufallszahlen

**Verwendung von Pseudozufallszahlen**
Pseudozufallszahlen werden u.a. in der Rechnersimulation angewandt, bei der statistische Prozesse mit Hilfe von Software simuliert werden. Pseudozufallszahlen können auch bei der Fehlersuche in Computerprogrammen nützlich sein. Andererseits macht diese Eigenschaft Pseudozufallszahlen für bestimmte Anwendungen unbrauchbar (so muss man beispielsweise in der Kryptographie aufpassen, dass man Pseudozufahlszahlen nicht an den falschen Stellen verwendet). Anwendung finden Pseudozufallszahlen auch in Rauschgeneratoren.

Ein weiterer Vorteil der Pseudozufallszahlen ist, dass sie auf jedem Rechner ohne Rückgriff auf externe Daten erzeugt werden können (was sie für bestimmte Bereiche der Kryptographie trotz oben genannter Nachteile wieder interessant macht). Zur Erzeugung echter Zufallszahlen braucht man entweder einen echten Zufallsgenerator (z.B. durch Digitalisieren von Rauschen oder durch Ausnutzen von Quanteneffekten) oder zumindest eine Quelle quasizufälliger (normalerweise nicht vorhersagbarer) Ereignisse wie Zeiten von Benutzereingaben oder Netzwerkaktivität.

**Links zu Zufallsgeneratoren**
- Siehe auch: http://www.swisseduc.ch/informatik/werkstatt/multiplik/zufgen/
- http://www.canb.auug.org.au/~dbell/programs/blumrand.tar.gz
  - blumrand - ein sehr guter Pseudozufallsgenerator

**Das Gesetz der großen Zahl**
Das Gesetz der großen Zahlen besagt, daß sich die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses immer weiter an einen Mittelwert der Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis annähert, je häufiger das Zufallsexperiment durchgeführt wird.

Beispiel: Münzwurf

| Anzahl der Würfe | davon Kopf | | Verhältnis Kopf/Gesamt | | relativer Abstand |
|---|---|---|---|---|---|
| | theoretisch | beobachtet | theoretisch | beobachtet | |
| 100 | 50 | 48 | 0,5 | 0,48 | 0,02 |
| 1000 | 500 | 491 | 0,5 | 0,491 | 0,009 |
| 10000 | 5000 | 4970 | 0,5 | 0,497 | 0,0030 |

**Zufallsfolge - Zufallssequenz**
Eine Zufallssequenz oder Zufallsfolge entsteht durch die wiederholte Anwendung eines statistischen Experiments. Eine Zufallssequenz ist im Allgemeinen eine Abfolge von Realisationen einer Zufallsvariablen. Der Begriff wird meistens im Sinne einer Abfolge von zufällig aus einem bestimmten Alphabet oder Zahlenvorrat ausgewählten Zeichen gebraucht.
Die einfachste Zufallssequenz gewinnt man durch einen wiederholten Münzwurf, wenn man einer Seite der Münze die 0 und der anderen die 1 zuordnet. Man kann andere Zufallssequenzen so in eine einfache 0-1-Sequenz umcodieren (**dichotomisieren**), ohne dass der Zufallscharakter verloren geht.
Beispiel: 1011011010101001110010110011100000011110010100001111010100010011011110110000100010
1010001110111001010111011111110000010011010000110111011110101011000001000111011000
1000000100111111000001111101001000110111100101010000010110100001100011010001100111 1
0111110001101110010011000000111110010000001100001000000110101010000011000101100001
1100111100100001101111111100100101010011111001000100100001001001000010001010011100
1111011000001010011111110010111110111011000111011010110000011101100111101011001110
Diese Folge wurde durch wiederholten Münzwurf gewonnen. Auffällig ist, wie oft längere zusammenhängende Sequenzen von 0 oder 1 zu finden sind.
Eine Zufallssequenz ist durch eine verschwindende serielle Korrelation oder auch Autokorrelation gekennzeichnet, d.h. der Korrelationskoeffizient zwischen aufeinander folgenden Werten in der Sequenz ist nicht signifikant von Null verschieden.
Viele natürlich vorkommenden zeit- bzw. ortsdiskreten Signale (z.B. DNA, siehe auch DNA-Sequenzanalyse) werden statistisch analysiert, indem man zunächst die Nullhypothese eines zugrunde liegenden Zufallsprozesses postuliert. Kann man diese Hypothese widerlegen, liegen also Korrelationen in der Sequenz vor, weisen diese unter Umständen auf in der Sequenz verborgene Nutzinformation hin. Speziell bei dichtomen Folgen kann man die Sequenzen mit Hilfe des Run-Tests auf Zufälligkeit überprüfen, wobei mit "Run" eine Folge gleicher Ausprägungen in der Sequenz bezeichnet wird. Der Test führt zur Ablehnung, wenn zu wenig, aber auch zu viel Runs in einer Sequenz sind.

**Run-Test auf Zufälligkeit einer Sequenz**
Der **Run-** oder **Runs-Test** (auch **Wald-Wolfowitz-Test** oder **Iterationstest**) ist ein nichtparametrischer Test auf Zufälligkeit einer Folge. Konzeptionell wird von einer zweigeteilten Grundgesamtheit, also beispielsweise einem Urnenmodell mit zwei Sorten Kugeln, ausgegangen. Es sind n viele Kugeln mit Zurücklegen entnommen worden. Es soll die Hypothese geprüft werden, dass die Entnahme zufällig erfolgt ist.

**Vorgehensweise**
Es wurden einer dichotomen Grundgesamtheit n Kugeln entnommen. Die Ergebnisse liegen in ihrer chronologischen Abfolge vor. Es werden nun alle benachbarten Ergebnisse gleicher Ausprägung zu einem Lauf oder Run zusammengefasst. Als deutsches Wort für den Begriff Run verwendet man am besten den Begriff **Serie** oder auch Serie von gleichen Ziehungen. Wenn die Folge tatsächlich zufällig ist, sollten nicht zu wenig Runs vorliegen, aber auch nicht zu viele.
Beispiel: Kugelfarbe Weiß dargestellt als eine Null und Kugelfarbe Schwarz dargestellt als eine Eins. Man zieht folgende Reihenfolge:
0011101110000010100110111010011000011100110010111001110111001010011110010101011000001111 0000
001101111110010110 11
0010110110011111100110111001011100011110001001011100000100010001001010101101110110111000
Der erste Run besteht dann aus zwei weißen Kugeln ( 00 ) , dann folgt eine Serie von 3 schwarzen Kugeln ( 111 ) , dann folgt eine einzelne weiße Kugel ( 0) etc.
Es wird die Hypothese aufgestellt: **Die Entnahme erfolgte zufällig**.

Für die Festlegung der Zahl der Runs, bei der die Hypothese abgelehnt wird, wird die Verteilung der Runs benötigt: Es seien $n_1$ die Zahl der Kugeln erster Sorte und $n_2 = n - n_1$ der zweiten Sorte; es sei r die Zahl der Runs. Nach dem Symmetrieprinzip ist die Wahrscheinlichkeit für jede beliebige Folge der Kugeln bei zufälliger Entnahme gleich groß. Es gibt insgesamt

$$\frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\cdot n_2!}$$

Möglichkeiten der Entnahme.

Bezüglich der Verteilung der Zahl der Runs unterscheidet man die Fälle:

1. Die Zahl der Runs r ist geradzahlig:

   Es liegen $q = \frac{r}{2}$ Runs der Kugeln der ersten Sorte und $p = \frac{r}{2}$ Runs der Kugeln der zweiten Sorte vor. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau r Runs eingetreten sind, ist dann

$$P(R=2q) = \frac{2\binom{n_1-1}{q-1}\binom{n_2-1}{q-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$$

2. Die Zahl der Runs r ist ungeradzahlig:

   Es liegen $q = \frac{r-1}{2}$ Runs der Kugeln der ersten Sorte und $p = \frac{r+1}{2}$ Runs der Kugeln der zweiten Sorte vor oder der umgekehrte Fall. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau r Runs eingetreten sind, berechnet sich dann als Summe aus diesen beiden Möglichkeiten

$$P(R=2q+1) = \frac{\binom{n_1-1}{q}\binom{n_2-1}{q-1} + \binom{n_1-1}{q-1}\binom{n_2-1}{q}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$$

Ist r zu klein oder zu groß, führt das zur Ablehnung der Nullhypothese. Bei einem Signifikanzniveau von alpha wird $H_0$ abgelehnt, wenn für die Prüfgröße r gilt:

$r \le r(\frac{\alpha}{2})$ oder $r \ge r(1-\frac{\alpha}{2})$

mit r(p)als Quantil der Verteilung von R an der Stelle p, wobei hier das Prinzip des konservativen Testens angewendet wird. Da die Berechnung der kritischen Werte von r für die Ablehnung der Hypothese umständlich ist, bedient man sich häufig einer Tabelle.

**Einfaches Beispiel**

Für eine Podiumsdiskussion mit zwei politischen Parteien wurde die Reihenfolge der Sprecher angeblich zufällig ermittelt. Es waren von der Partei Supi 4 Vertreter anwesend und von der Partei Toll 5 Vertreter. Die Reihenfolge der Sprecher war folgendermaßen vorgegeben:

```
S S  T  S  T T T  S  T
```

Ein Vertreter von Toll beschwerte sich, dass S vorgezogen würde. Es wurde ein Runtest vorgenommen:
Es ist $n_1 = 4$ und $n_2 = 5$. Man erhielt r = 6 Runs.
Nach der Tabelle des Runstests wird $H_0$ abgelehnt, wenn $r \le 2$ oder $r \ge 9$ ist. Also liegt die Prüfgröße r = 6 im Nichtablehnungsbereich; man kann davon ausgehen, dass die Reihenfolge der Sprecher zufällig ist.

**Ergänzungen**

**Parameter der Verteilung von R**

Der Erwartungswert von R ist

$$ER = \frac{2n_1n_2}{n} + 1$$

und die Varianz

$$varR = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n)}{n^2(n_1+n_2-1)}.$$

**Grundgesamtheit mit mehr als zwei Ausprägungen des Merkmals**
Liegt eine Folge reeller Zahlen xi eines metrischen Merkmals vor, wird die Folge dichotomisiert: Man bestimmt den Median z der Stichprobe. Werte x < z werden als Kugeln 1. Sorte, Werte x > z als Kugeln 2. Sorte interpretiert. Diese dichotome Folge kann dann wieder auf Zufälligkeit getestet werden.
Liegt eine nichtnumerische Symbolsequenz mit mehr als zwei Ausprägungen vor, muss zunächst eine numerische Reihe erzeugt werden, wobei hier das Problem bestehen kann, dass die Symbole nicht geordnet werden können.

**Normalapproximation**
Für Stichprobenumfänge $n_1$,$n_2$ > 20 ist die Zahl der Runs R annähernd normalverteilt mit Erwartungswert und Varianz wie oben. Man erhält die standardisierte Prüfgröße

$$z = \frac{r - (\frac{2n_1n_2}{n} + 1)}{\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n)}{n^2(n_1+n_2-1)}}}$$

Die Hypothese wird abgelehnt, wenn

$z < -z(1-\frac{\alpha}{2})$ oder $z > z(1-\frac{\alpha}{2})$

mit $z(1-\frac{\alpha}{2})$ als Quantil der Standardnormalverteilung für die Wahrscheinlichkeit $1-\frac{\alpha}{2}$.

**Anwendungen**
Der Runtest kann angewendet werden, um Stationarität bzw. Nicht-Korrelation in einer Zeitreihe oder anderen Sequenz zu überprüfen, vor allem wenn die Verteilung des Merkmals unbekannt ist. Die Nullhypothese ist hier, dass aufeinanderfolgende Werte unkorreliert sind.
Der Run-Test ist nicht so mächtig wie der Kolmogorov-Test oder der Chi-Quadrat-Test, kann aber mit letzterem kombiniert werden, da beide Prüfgrößen asymptotisch unabhängig voneinander sind.

**Beispiel für ein metrisches Merkmal**
Es liegt die Folge

```
13 3 14 14 1 14 3 8 14 17 9 14
13 2 16 1 3 12 13 14
```

vor. Sie wird mit dem Median z = 13 dichotomisiert. Dazu wird der Median 13 von allen Werten abgezogen. Für die erste Ausprägung ( Werte über Nulll) wird + gesetzt, für die zweite Ausprägung ( Wert < 0) wird - gesetzt.

```
0 -10 1 1 -12 1 -10 -5 1 4 -4 1
0 -11 3 -12 -10 -1 0 1
+ - + + - + - - + + - +
+ - + - - - + +
```

Man erhält bei $n_1$ = 11 (+) und $n_2$ = 9 (-) r = 13 Runs. R ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert

$$ER = \frac{(2 \cdot 11 \cdot 9)}{20} + 1 = 10,9$$

und der Varianz

$$varR = \frac{2 \cdot 11 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 11 \cdot 9 - 20)}{20^2 \cdot 19} 4,6$$

Die Prüfgröße z errechnet sich dann als

$$\frac{13 - 10,9}{\sqrt{4,6}} = 1.0$$

Bei einem Signifikanzniveau von 0,05 wird $H_0$ abgelehnt, wenn |z| > 1,96. Dies ist nicht der Fall.
**Entscheidung:** Die Hypothese wird nicht abgelehnt. Die Elemente der Stichprobe sind vermutlich zufällig

entnommen worden.

**Programmierung des Runtestes**
Zitat: *Wenn du es nicht programmiert hast, dann hast du es nicht verstanden.*
Hier findet sich ein Programm für den Runtest. http://de.wikibooks.org/wiki/Gambas:_Statistik#Runtest
Leider funktioniert der Runtest nicht bei beliebigen 01 Sequenzen , sondern nur wenn die Zahl von 0 und 1 ungefähr gleich ist. Beispielsweise kann man eine Sequenz 00000000000000000010 im Runtest nicht auf ihre Zufälligkeit überprüfen.

**Beispiellisting einer Entropieberechnung mit dem Runtestes für eine 01 Folge fester Länge**
Programmiersprache Gambas

- Die Länge der 01 Folge ist variierbar , hier s = 8. ( Länge ist die Variable s im Listing)
- Die Zahl der Nullen und Einsen ist zur Vereinfachung gleich groß.
- Das Programm startet von alleine.
- Die Ergebnisausgabe erfolgt im Direkfenster.
- Bewertung:
    - pz Werte um die 0 sind ein Zeichen hoher Entropie. Pz-Werte über 1,5 oder unter -1,5 sind ein Zeichen niedriger Entropie

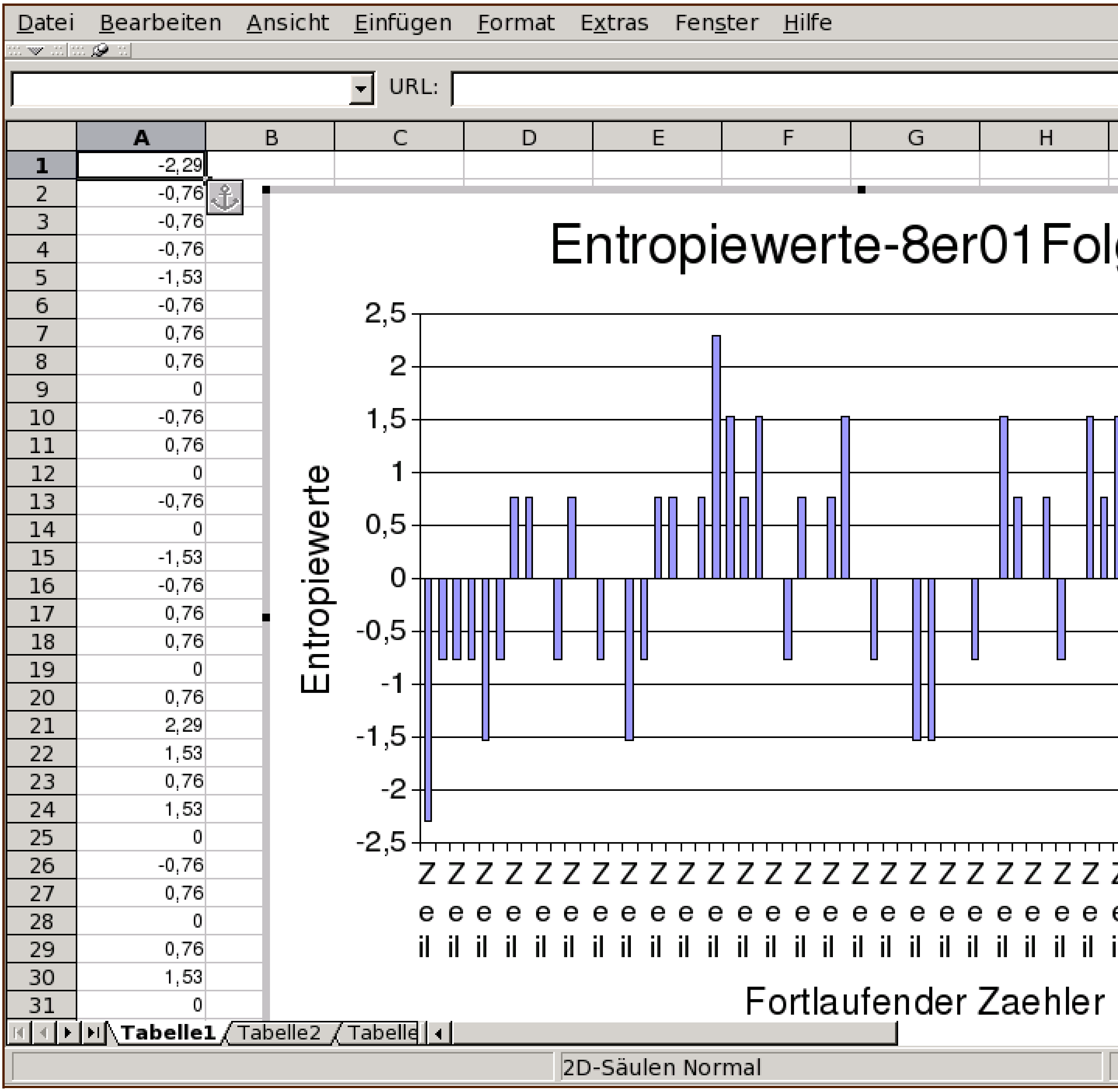
```
PUBLIC SUB Form_Open()
s AS Integer
'Laenge der Binaerzahl
z AS Integer
'Zaehler von 0 bis 2^s-1
zz AS Integer
'Zaehler von 1 bis alle Varianten mit ozaehler = izaehler
t AS String
'binaerzahl
ozaehler AS Integer
'Zahl der Nullen
izaehler AS Integer
'Zahl der Einser
tt AS String
'binaerzahl als String
n AS Integer
'Laenge der Binaerzahl
char AS String
UM AS Float
varianz AS Float
svar AS Float
'Quadratwurzel der Varianz
zwei AS Integer
summe AS Integer
run AS Integer
nn AS Integer
chari AS String
charnext AS String
runzaehler AS Integer
pz AS Float
'Pruefvariable entspricht dem Entropiewert der Folge
s = 10
'Laenge der 01 Folge
zz = 0
FOR z = 0 TO (2^s - 1)
 t = Bin$(z,s)
 tt = Str(t)
 'PRINT "tt = " & tt
 ozaehler = 0
 izaehler = 0
 FOR n = 1 TO Len(tt)
      char = Mid$(tt, n, 1)
         SELECT CASE TRUE
```

```
       CASE char = "0"
        ozaehler = ozaehler + 1
       CASE char = "1"
        izaehler = izaehler + 1
     END SELECT
 NEXT
 'PRINT izaehler
 'PRINT ozaehler
 IF izaehler = ozaehler THEN
 zz = zz + 1
 t = tt
 PRINT "zz = " & zz & " t = " &  t;
 'runtest
 UM = 2 * s/2 * s/2 /( s/2 + s/2 ) + 1
 'PRINT "UM  = " & UM
 zwei = 2 * s/2 * s/2
 summe = s
 varianz = zwei *( zwei - summe) / (summe * summe * (summe - 1))
IF varianz < 0 THEN varianz = -varianz
'PRINT "Varianz = " & varianz
runzaehler = 1
  FOR nn = 1 TO Len(t) - 1
        chari = Mid$(t, nn, 1)
     charnext = Mid$(t, nn + 1, 1)
     IF chari <> charnext THEN runzaehler = runzaehler + 1
  NEXT
'PRINT " runzaehler = " & runzaehler;
svar = Sqr(varianz)
pz = ( runzaehler - UM)/svar
PRINT " pz = " & Str(pz)
'PRINT Str(pz)
ENDIF
NEXT
END
```

**Ergebnisausgabe:**

```
zz = 1 t = 00001111 pz = -2,291287847478
zz = 2 t = 00010111 pz = -0,763762615826
zz = 3 t = 00011011 pz = -0,763762615826
zz = 4 t = 00011101 pz = -0,763762615826
zz = 5 t = 00011110 pz = -1,527525231652
zz = 6 t = 00100111 pz = -0,763762615826
zz = 7 t = 00101011 pz = 0,763762615826
zz = 8 t = 00101101 pz = 0,763762615826
zz = 9 t = 00101110 pz = 0
zz = 10 t = 00110011 pz = -0,763762615826
zz = 11 t = 00110101 pz = 0,763762615826
zz = 12 t = 00110110 pz = 0
zz = 13 t = 00111001 pz = -0,763762615826
zz = 14 t = 00111010 pz = 0
zz = 15 t = 00111100 pz = -1,527525231652
zz = 16 t = 01000111 pz = -0,763762615826
zz = 17 t = 01001011 pz = 0,763762615826
zz = 18 t = 01001101 pz = 0,763762615826
zz = 19 t = 01001110 pz = 0
zz = 20 t = 01010011 pz = 0,763762615826
zz = 21 t = 01010101 pz = 2,291287847478
zz = 22 t = 01010110 pz = 1,527525231652
zz = 23 t = 01011001 pz = 0,763762615826
zz = 24 t = 01011010 pz = 1,527525231652
zz = 25 t = 01011100 pz = 0
zz = 26 t = 01100011 pz = -0,763762615826
```

```
zz = 27 t = 01100101 pz = 0,763762615826
zz = 28 t = 01100110 pz = 0
zz = 29 t = 01101001 pz = 0,763762615826
zz = 30 t = 01101010 pz = 1,527525231652
zz = 31 t = 01101100 pz = 0
zz = 32 t = 01110001 pz = -0,763762615826
zz = 33 t = 01110010 pz = 0
zz = 34 t = 01110100 pz = 0
zz = 35 t = 01111000 pz = -1,527525231652
zz = 36 t = 10000111 pz = -1,527525231652
zz = 37 t = 10001011 pz = 0
zz = 38 t = 10001101 pz = 0
zz = 39 t = 10001110 pz = -0,763762615826
zz = 40 t = 10010011 pz = 0
zz = 41 t = 10010101 pz = 1,527525231652
zz = 42 t = 10010110 pz = 0,763762615826
zz = 43 t = 10011001 pz = 0
zz = 44 t = 10011010 pz = 0,763762615826
zz = 45 t = 10011100 pz = -0,763762615826
zz = 46 t = 10100011 pz = 0
zz = 47 t = 10100101 pz = 1,527525231652
zz = 48 t = 10100110 pz = 0,763762615826
zz = 49 t = 10101001 pz = 1,527525231652
zz = 50 t = 10101010 pz = 2,291287847478
zz = 51 t = 10101100 pz = 0,763762615826
zz = 52 t = 10110001 pz = 0
zz = 53 t = 10110010 pz = 0,763762615826
zz = 54 t = 10110100 pz = 0,763762615826
zz = 55 t = 10111000 pz = -0,763762615826
zz = 56 t = 11000011 pz = -1,527525231652
zz = 57 t = 11000101 pz = 0
zz = 58 t = 11000110 pz = -0,763762615826
zz = 59 t = 11001001 pz = 0
zz = 60 t = 11001010 pz = 0,763762615826
zz = 61 t = 11001100 pz = -0,763762615826
zz = 62 t = 11010001 pz = 0
zz = 63 t = 11010010 pz = 0,763762615826
zz = 64 t = 11010100 pz = 0,763762615826
zz = 65 t = 11011000 pz = -0,763762615826
zz = 66 t = 11100001 pz = -1,527525231652
zz = 67 t = 11100010 pz = -0,763762615826
zz = 68 t = 11100100 pz = -0,763762615826
zz = 69 t = 11101000 pz = -0,763762615826
zz = 70 t = 11110000 pz = -2,291287847478
```
**Abbildung Grafische Darstellung der Entropiewerte einer 8er und einer 10er 01 Folge**




**Literatur**


- Bradley, (1968). Distribution-Free Statistical Tests, Chapter 12.
- Entropy tests for random number generators
  - http://www-perso.iro.umontreal.ca/~lecuyer/myftp/papers/entrop.ps
- Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal
  - Peter Grassberger
  - Physics Department, University of Wuppertal, D-5600 Wuppertal 1, Germany
  - Itamar Procaccia
  - Chemical Physics Department, Weizmann Institute of Science, Rehovot 76100, Israel
    - A new method for estimating the Kolmogorov entropy directly from a time signal is proposed and tested on examples. The method should prove valuable for characterizing experimental chaotic signals.
- Siehe auch: http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35d.htm


**Zufall und Entropie**

Zwischen dem Zufall und der Entropie, wie er in der Informationstheorie definiert wurde, besteht ein enger Zusammenhang. **Entropie** ist ein Maß für die Menge an Zufallsinformation, die in einem System oder einer Informationsfolge steckt.

Das informationstheoretische Verständnis des Begriffes **Entropie** geht auf Claude E. Shannon zurück und existiert seit etwa 1948. In diesem Jahr veröffentlichte Shannon seine fundamentale Arbeit *A Mathematical Theory of Communication* und prägte damit die moderne Informationstheorie.

**Definition der Entropie**

Shannon definierte die Entropie $H$ einer gegebenen Information $I$ über einem Alphabet (Informatik) $Z$ durch

$$H(I) = -\sum_{j=1}^{|Z|} p_j \cdot \log_2 p_j$$
,

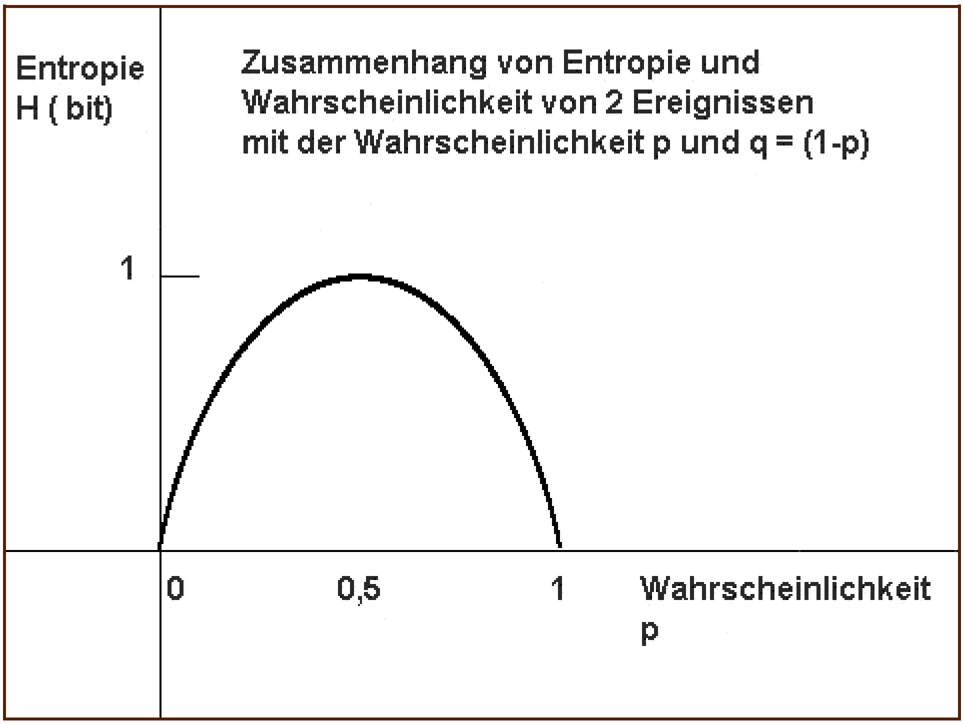
wobei $p_j$ die Wahrscheinlichkeit ist, mit der das $j$-te Symbol $z_j$ des Alphabets $Z$ im Informationtext $I$ auftritt. Die Entropie erhält die Pseudoeinheit *bit*. $H$ multipliziert mit der Anzahl der Zeichen im Informationstext ergibt dann die mindestens notwendige Anzahl von Bits, die zur Darstellung der Information notwendig sind.
Obige Formel ist für den mathematisch nicht vorgebildeten schwer verständlich. Sie wird leichter zu verstehen, wenn man von ganz einfachen Beispielen wie dem Münzwurf, einem Sechser- oder Achterwürfel ausgeht und die Entropie dazu berechnet. Siehe dazu die weiter unten angegebenen Beispiele.

**Interpretation**

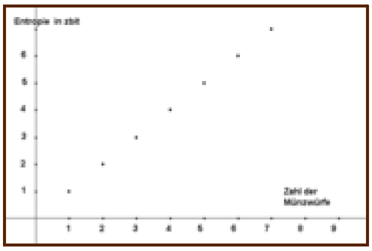
**Entropie** ist grob gesagt ein Maß für die Menge an Zufallsinformation, die in einem System oder einer Informationsfolge steckt. Dabei ist die Einheit der Zufallsinformation (1 bit) definiert als die Informationsmenge, die in einer Zufallsentscheidung eines idealen Münzwurfes enthalten ist. Ein idealer Münzwurf hat nur 2 Möglichkeiten Wappen oder Zahl , die beide mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p = 0,5 auftreten.
Shannons ursprüngliche Absicht, die Entropie als das Maß der benötigten Bandbreite eines Übertragungskanals zu nutzen, wurde schnell verallgemeinert. Die Entropie wurde generell als ein Maß für den Informationsgehalt betrachtet. Wenn die Entropie etwa einen Wert von *1* hat, dann gilt die Information als zufällig. Bei einer kleinen Entropie enthält der Informationstext Redundanzen oder statistische Regelmäßigkeiten. Die Zahl $H(I)$ gibt intuitiv die durchschnittliche Information an, die in einem Symbol der Quelle enthalten ist.
Die rein statistische Berechnung der informationstheoretischen Entropie nach obiger Formel ist gleichzeitig ihre Beschränkung. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit, eine *0* oder *1* in einer geordneten Zeichenkette "1010101010..." zu finden, genauso groß, wie in einer Zeichenkette, die durch statistisch unabhängige Ereignisse (etwa wiederholten Münzwurf) entstanden ist. Daher ist Shannons Entropie für beide Zeichenketten identisch, obwohl man intuitiv die erste Kette als weniger zufällig bezeichnen würde. Eine angemessenere Definition der Entropie einer Zeichenkette liefert die bedingte Entropie und Quellentropie, die beide auf Verbundwahrscheinlichkeiten aufbauen.

**Beispielsberechnung der Entropie : Münzwurf**

Bei einem Münzwurf sind idealerweise „Kopf“ oder „Zahl“ gleichwahrscheinlich. Indem man die Entropie als Maß für die Ungewissheit auffasst, wird sie hier daher einen maximalen Wert aufweisen. Es ist völlig ungewiss, ob beim nächsten Wurf „Kopf“ oder aber „Zahl“ geworfen wird. Die Entropie wird hier als **1 bit** definiert.
Anders bei einer gezinkten Münze, etwa einer Münze, die im Mittel in 60 % der Fälle „Kopf“ und nur in 40 % der Fällen „Zahl“ anzeigt. Die Ungewissheit ist hier geringer als bei der normalen Münze, da man eine gewisse Präferenz für „Kopf“ hat. Gemessen als Entropie liegt die Ungewissheit bei nur noch etwa 0,971 .
Bei der Münze ergänzen sich die Wahrscheinlichkeiten beider Möglichkeiten zu Summe 1 , da es nur 2 Möglichkeiten gibt.
```
p + q = 1
```
Die Entropie läßt sich in diesem Fall mit folgender Formel berechnen :
```
H = - ( p * ld p + q * ld q)
```
Unter ld wird der Logarithmus zur Basis 2 verstanden (log dualis , binärer Logarithmus)
Ersetzt man q durch den Ausdruck 1- p , so erhält man die Formel
```
H = - ( p * ld p + ( 1- p ) * ld (1-p))
```
Für p = 0,5 ergibt sich beispielsweise daraus :
```
H = - ( 0,5 * ld 0,5 + 0,5 * ld 0,5 ) = - ( -0,5 + (-0,5)) = 1
```
denn der Logarithmus der Zahl 0,5 zur Basis 2 ist gleich - 1.
Die Funktion der Entropie in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit kann man grafisch folgendermaßen darstellen:




Für jedes p kann man daraus die Entropie direkt ablesen. Die Funktion ist symmetrisch zur Geraden p = 0,5 . Sie fällt bei p = 0 sehr steil zu einem Entropie Wert von = 0 ab . Auch bei p Werten, die sich dem sicheren Ereignis von p = 1 nähern fällt die Entropie auf 0 ab.
Dieser Zusammenhang gilt jeweils für ein Zufallsereignis . Bei mehreren Zufallsereignissen muß man die einzelnen Entropien zusammenzählen und man kann so leicht Entropiewerte über 1 erreichen. Die Wahrscheinlichkeit p dagegen bleibt auch bei Wiederholungen definitionsgemäß immer zwischen 0 und 1 !
Wiederholt man den Münzwurf 2 mal wächst die Zahl der Möglichkeiten auf 4. Die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Möglichkeit liegt bei 0,25. Die Entropie des zweimaligen Münzwurfes ist dann 2 bit. Wenn man einen idealen Münzwurf mehrfach wiederholt, dann addiert sich die Entropie einfach. Die Entropie einer Reihe von 20 idealen Münzwürfen berechnet sich einfach: H = 20 * 1 bit = 20 bit . Dies wird im folgenden Bild dargestellt.



Entropie in Abhängigkeit der Zahl der Münzwürfe

Sei nun eine Folge von Münzwürfen als Bitfolge zu speichern. Während es sich bei der normalen Münze anbietet, „Kopf“ stets durch 0 und „Zahl“ stets durch 1 zu repräsentieren (oder umgekehrt), so sind bei der gezinkten Münze kompaktere Kodierungen möglich. Diese erhält man beispielsweise durch den Huffman-Kode.

**Beispielsberechnung der Entropie: Idealer 6er Würfel**
Bei einem Wurf eines idealen Würfels mit 6 Möglichkeiten ist die Entropie größer als 1. Allgemein ist sie größer als eins für ein Zufallsereignis aus einem Zufallsexperiment mit mehr als 2 gleichberechtigten Möglichkeiten im Ergebnisraum. Ihr Wert wird bei gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten im Ergebnisraum folgendermaßen berechnet:

$H = \log_2(\text{Zahl der gleichberechtigten Elemente im Ergebnisraum}).$

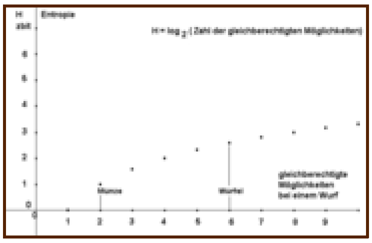
Beim idealen Würfel sind 6 Möglichkeiten im Ergebnisraum. Daraus folgt die Entropie für einmal werfen:

$H = \log_2 6 = \log_2 2*3 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3 \approx 1 + 1.585 = 2.585 \text{ bit}$

Einfach zu berechnen ist die Entropie eines Wurfes eines idealen Achterwürfels: Er hat 8 gleichberechtigte Möglichkeiten.

$H = \log_2 8 = 3 \text{ bit}$

Die folgende Abbildung stellt den Zusammenhang zwischen der Entropie und der Zahl der gleichberechtigten Möglichkeiten eines Zufalleexperimentes dar.



Entropie vs. Zahl der Möglichkeiten

**Zufall und Ordnung**

Betrachtet man eine binäre Datei einer bestimmten Länge z.B. mit 20 Stellen, dann kann man die Gesamtinformationsmenge ausrechnen, die mit 20 Stellen dargestellt werden kann: I = $2^{20}$ = 1 048 576 Bit = $2^{17}$ Byte = ca. 130 KiB. Ein Teil der Möglichkeiten aus dieser Gesamtinformationsmenge sind reine Zufallsfolgen, der Rest sind mehr oder minder geordnete Folgen. Die Grenze zwischen beiden Bereichen ist nicht scharf zu ziehen, sondern nur mit einem Wahrscheinlichkeitsniveau von z.B. 95% festzulegen. Je weiter man von der Grenze weg ist, desto klarer ist die Zuordnung. Der Mathematiker und Zufallsforscher Chaitin hat 2 Beispiele genannt:

- Geordnete Reihe: 10101010101010101010
- Zufall = 0, oder fast Null
- Ungeordnete Reihe durch Münzwurf erzeugt: 01101100110111100010
- Zufall maximal = 20 Bit

Beide Reihen haben dieselbe Länge und denselben Speicherplatzbedarf an Bits. Trotzdem unterscheiden sie sich fundamental. Die Menge an Zufall einer Reihe lässt sich durch die Entropie bzw. den Informationsgehalt quantifizieren, bezüglicher der sich beide Reihen sehr stark unterscheiden. Dies ist Gegenstand der Informationstheorie, die erstmals von Claude Shannon formalisiert wurde. Die erste Reihe hat zum Beispiel eine Entropie von 0 oder nahe 0, die zweite Reihe hat eine Entropie von 20 bit.
Eine interessante Frage ist nun, wie hoch der Anteil der Zufallsfolgen an der Zahl der gesamten Möglichkeiten ist.
Eine weitere interessante Frage ist, ob man die Nichtzufälligkeit irgendwie quantifizieren kann, also ob man sagen kann: Je stärker eine nichtzufällige Reihe komprimierbar ist, desto größer ist ihre Ordnung. Die einfachste Form der Ordnung ist hier die Wiederholung von Teilstücken, man spricht auch von Redundanz.
Dann ergeben sich die allgemeinen Aussagen: Der Anteil der Zufallsfolgen wächst mit der Anzahl der Gesamtmöglichkeiten, oder anders ausgedrückt: Je länger eine binäre Sequenz ist, desto mehr Möglichkeiten für Zufallsfolgen stecken in ihr.
Je geordneter eine ganz bestimmte Binärfolge ist, desto weniger "Zufall" steckt in ihr. Vor allem in dem Begriff der Komprimierbarkeit, den man zur Definition der geordneten Folge heranzieht, stecken einige Tücken. Er ist mathematisch auf verschiedene Arten definierbar.
Bei kurzen binären Sequenzen ist die Unterscheidung zwischen Ordnung und Zufall willkürlich, je länger die Sequenzen werden, desto besser sind sie dem Bereich des Zufalls oder dem Bereich geordneter Folge zuzuordnen. Trotzdem bleiben auch bei längeren Folgen von Nullen und Einsen Überlappungen zwischen geordneten Folgen und Zufallsfolgen bestehen. Jede geordnete binäre Folge kann mittels eines guten Komprimierungsverfahrens in eine scheinbare Zufallsfolge überführt werden.
Das Ergebnis sieht dann zwar zufällig aus, in ihm steckt aber bedeutsame Information.
Umgekehrt kann man mittels komplizierter Rechenverfahren Zufallszahlen erzeugen, die ausschauen wie echte (z.B. gewürfelte) Zufallszahlen, die aber in Wirklichkeit das Ergebnis eines festgelegten Algorithmus sind ).

**Mathematische Definition von Ordnung**

Mit dem Begriff Ordnung verbinden sich ganz verschiedene Vorstellungen. Will man Ordnung ( wie es beispielsweise die Kristallchemie tut) als Gegensatz von Entropie ansehen , als Kehrwert zur Entropie, dann kann man folgende Formel aufstellen

```
O = 1/ H    Ordnung = 1 / Entropie     daraus folgt  Entropie = 1 / Ordnung
```

Mit dieser Definition gibt es ein Problem: Bei einer Entropie von 0 wird die Ordnung unendlich groß.
Als Beispiel wird betrachtet eine 40er Folge von 1 und 0

- reiner Zufall: Entropie = 40 Bit Ordnung = sehr niedrig
  - 1011011010101001110010110011100000011110
- reine Ordnung: Entropie = 0 Bit Ordnung = maximal
  - 1111111111111111111111111111111111111111
  - 0000000000000000000000000000000000000000

Wie soll man dann Ordnung definieren ?

```
O = 1 / H daraus folgt eine Spannweite der Ordnung von O = 1/40 bis O =
```

`Unendlich`

Wahrscheinlich ist folgende Lösung besser:

`O = 1 / (H + 1) daraus folgt eine Spannweite der Ordnung von O = 1/41 bis O = 1`

Abgeleitet davon kann man die Ordnung als Prozentwert angeben:

`O = 100 / ( H + 1) % daraus folgt eine Spannweite der Ordnung von O = 100 /41 % = 2,5 % Ordnung bis 100 % Ordnung`

**Zufall in der Philosophie**

Der **Zufall** bezeichnet in der Philosophie

- 1. etwas, das durch den Verlauf äußerer Umstände bedingt ist, im Unterschied zur Notwendigkeit, die durch die innere Natur der Dinge bedingt ist.
- 2. etwas, das sein, aber auch nicht sein kann, im Unterschied zur Notwendigkeit, die etwas ist, das obligatorisch vor sich gehen muss.

**Zum Zufall in der Beziehung zum Gesetz und den Zusammenhängen in der objektiven Realität**

Der Zufall existiert als objektive Beziehung zwischen verschiedenen Ereignissen, die ihren Grund nicht in den wesentlichen inneren Bedingungen der Ereignisse hat. Der Zufall muss in seiner dialektischen Beziehung zum Gesetz untersucht werden. Als objektive Beziehung ist er im objektiven Zusammenhang begründet.

Zu seiner Erklärung brauchen keine übernatürlichen Ursachen herangezogen werden. Der objektive Zusammenhang ist unendlich kompliziert. Es existieren jedoch objektiv allgemeine, notwendige und wesentliche Beziehungen, die von der Wissenschaft erkannt und in Theorien als Widerspiegelungen objektiver Gesetze enthalten sind. Zufälle unterscheiden sich gerade dadurch von anderen Formen des objektiven Zusammenhangs, dass sie nicht allgemein-notwendig, das heißt reproduzierbar sind.

**Aristoteles und der Zufall**

Die erste zusammenhängende philosophische Abhandlung über den Zufall findet sich bei Aristoteles Im zweiten Buch seiner Physik geht es Aristoteles um die Ursachen der Dinge. Im Kapitel 4 und 5 erklärt er seine Ansichten zum Zufall. Siehe: http://www.madeasy.de/2/zufallo.htm#ari

Zitat: *Es wird auch der Zufall und das Ungefähr unter der Ursachen genannt und gesagt, daß vieles theils ist theils wird durch Zufall und von ungefähr. Auf welche Weise nun zu den Ursachen, von denen wir sprachen, der Zufall gehört und das Ungefähr, und ob das nämliche der Zufall ist und das Ungefähr, oder ein verschiedenes, und überhaupt was da ist der Zufall und das Ungefähr, ist zu untersuchen. Denn Einige zweifeln sogar, ob jene sind oder nicht. Nichts nämlich geschehe aus Zufall, sagen sie; sondern alles habe eine bestimmte Ursache, von dem wir sagen, es geschehe von ungefähr oder aus Zufall: so wenn jemand aus Zufall auf den Markt komme, und treffe den er wollte aber nicht zu treffen meinte, sei Ursache davon sein Wille zu kommen und Marktgeschäfte zu treiben. Auf gleiche Weise finde auch bei dem Uebrigen, was zufällig heißt, stets eine Ursache statt, die anzugeben sei, aber nicht Zufall.*

*Denn vieles wird und ist aus Zufall und von ungefähr von dem wir, wohl wissend, daß jedes Ding sich zurückführen läßt auf eine Ursache des Werdens, wie der alte Spruch sagt, der den Zufall läugnet, dennoch alle sagen, es sei aus Zufall, während wir bei anderem sagen, es sei nicht aus Zufall.*

*Unbestimmbar nun müssen die Ursachen sein, durch die das Zufällige geschehen mag. Daher scheint der Zufall zu dem Unbestimmten zu gehören und unklar dem Menschen;*

**Die Negation des Zufalls im Dogma des mittelalterlichen metaphysischen Determinismus**

Sie sind Erscheinungsformen der Gesetze (dazu Einzelheiten weiter unten). In der Auseinandersetzung mit Idealismus und Wunderglauben vertraten die Materialisten des Mittelalters meist einen metaphysischen Determinismus, der die materiellen Prozesse alle als notwendig erklärte, den Zufall aus der Betrachtung ausschloss und damit letztlich zum Fatalismus führte. Die antiken Atomisten waren ebenso wie später zum Beispiel B. Spinoza und P.H.D. Holbach Verfechter des metaphysischen Determinismus.

Während allerdings Demokrit die Notwendigkeit des Atomverhaltens betonte, schrieb Lukrez bei seiner Darstellung der Auffassung Epikurs in seinem Lehrgedicht "Über die Natur der Dinge", dass die Körper durch ihr Gewicht zu ungewisser Zeit an unbestimmtem Ort etwas von ihrer Bahn abwichen; nur dadurch könne Wechselwirkung entstehen(Atomistik).

**Zur Rolle des Zufalls bei Hegel und Engels**

Von den Dialektikern hat sich vor allem G.W.Hegel mit dem Verhältnis von Notwendigkeit und Zufall befasst. In der Auseinandersetzung mit dem Idealismus Hegels und dem metaphysischen Materialismus entwickelte Friedrich Engels den dialektischen Determinismus. Er zeigte die Objektivität des Zufalls, wies begründet den Indeterminismus zurück und fasste den Zufall als Erscheinungsform der Notwendigkeit.

Besondere Bedeutung für die Entwicklung der philosophischen Auffassungen vom Zufall hatte die dialektisch-materialistische Deutung der Ergebnisse der Quantenmechanik, die für die Physik die objektive Existenz des

Zufalls nachwiesen. Aus der philosophischen Analyse der statistischen Gesetzeskonzeption ergibt sich, dass der Zufall als zufällige Verwirklichung von Möglichkeiten eines aus dem Gesetz sich ergebenden Möglichkeitsfeldes auftreten kann; für diese Verwirklichung existiert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

**Zur Unterscheidung der Arten des Zufalls**
Damit hat die Dialektik von Notwendigkeit und Zufall auch für die Struktur des statistischen Gesetzes Bedeutung. Betrachtet man die Dialektik von Gesetz und Zufall, so kann man Arten des Zufalls unterscheiden:

- 1.) systeminnere und systemäußere Zufälle, die für das Verhalten des Systems entweder wesentlich oder unwesentlich sein können. Wesentlich sind solche Zufälle, die das System entscheidend verändern oder es in seiner Existenz gefährden. Unwesentlich sind die Zufälle, die in das Verhalten des Systems integriert werden können, ohne seine Makrostruktur und seine Funktion zu beeinflussen;
- 2.) systeminterne Zufälle sind wiederum zu differenzieren. Es gibt solche, die als zufällige Verwirklichungen von Möglichkeiten mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Gesetz enthalten sind, und solche, die als Erscheinungsformen der Gesetze in den zufälligen Beziehungen zwischen verschiedenen Ereignissen auftreten;
- 3.) es gibt erkannte und unerkannte Zufälle; die unerkannten müssen darauf analysiert werden, ob sie systeminnere oder systemäußere, wesentliche oder unwesentliche Zufälle sind, ob sie in der Struktur von Gesetzen enthalten oder konkrete Erscheinungsformen der Gesetze sind.

**Zur Interpretation des Zufalls als Schnittpunkt von Kausalketten**
Manchmal wird der Zufall noch als Schnittpunkt von Kausalketten oder von Notwendigkeiten betrachtet. Wenn damit nur die Objektivität des zufälligen Zusammenhangs betont und die Dialektik von Notwendigekit und Zufall berücksichtigt werden soll, ergeben sich keine Einwände gegen diese Interpretation.
Nur bringt sie ungenügend die Spezifik des Zufalls zum Ausdruck, als Beziehung zwischen Ereignissen nicht durch die wesentlichen inneren Beziehungen jedes Ereignisses begründet zu werden. Der Tod eines Menschen bei einem Verkehrsunfall ist tatsächlich das Zusammentreffen verschiedener Ereignisse und damit auch verschiedener Notwendigkeiten und Kausalketten.
Aber aus den inneren wesentlichen Bedingungen dieser Ereignisse, Notwendigkeiten und Kausalketten folgt nicht ihre zufällige objektive Beziehung, die im Tod eines bestimmten Menschen besteht. Man kennt zwar die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen des Unfalltods bei Unfällen, die Wahrscheinlichkeit von Todesursachen der verschiedensten Art, die Bedeutung von Verletzungen für das Funktionieren des menschlichen Organismus und so weiter, aber alles, was man an Gesetzen kennt, liefert keine unmittelbare Begründung für das bestimmte Zusammentreffen im Verkehrsunfall.

**Zur eigentlichen Spezifik des Zufalls innerhalb einer Systembetrachtung**
Der Zufall steht also nicht außerhalb des objektiven Zusammenhangs. Denn würde diese Schlussfolgerung nicht zutreffen, so müsste es einen absoluten Zufall im Sinne eines ursachelosen Ereignisses geben (was allgemein unter "Wunder" zu verstehen ist). Aber auch das Ereignis des Zufalls wird durch eine Ursache eingeleitet. Die Spezifik des Zufalls besteht darin, kein Gesetz, kein allgemein-notwendiger und wesentlicher Zusammenhang zu sein. Wesentlich kann er nur bezogen auf die Verhaltensweisen eines Systems sein, die er entscheidend verändert. Wesentlich ist er nicht in dem Sinne, aus den wesentlichen inneren Bedingungen eines Ereignisses begründet zu sein.

**Widerspricht ein Zufallsereignis dem Kausalitätsprinzip ?**
Dazu betrachte man folgendes praktisches Beispiel:
Man würfelt und erhält eine 3 .

- 1.Ursache : der Mensch der würfelt.
- 2.Ursache : Bewegungsenergie wird einem Körper mitgegeben der auf 6 verschiedene Arten wieder in ein stabiles Gleichgewicht kommen kann.
- 3.Ursache: Die Bewegungsenergie des Würfels wird durch Luftreibung und durch Kontakt zb mit einer Tischfläche in Reibungsenergie verwandelt.
- 4.Ursache: Der Würfel hat 6 gleichberechtigte Möglichkeiten zur Ruhe zu kommen.
- Wirkung : Er kommt zu Ruhe und nimmt eine dieser Möglichkeiten ein. Welche er einnimmt, war nicht voraussehbar , jedenfalls praktisch nicht berechenbar.

Die 3 oben ist die Wirkung . Der würfelnde Mensch ist die Ursache .
**Durch den Zufall ergibt sich keine Verletzung des Kausalitätsprinzips.**
Wenn man Probleme mit der physikalischen Berechenbarkeit des Würfelfluges hat , kann man auch das Urnenmodel heranziehen.
Da werden zb 6 mit den Nummern 1 - 6 versehene sonst gleiche Kugeln in eine undurchsichtige Urne gefüllt. Kräftig geschüttelt. Dann greift man in die Urne und zieht eine Kugel heraus. Da ist auch prinzipiell nichts mehr

berechenbar. Trotzdem bleibt das Kausalitätsprinzip erhalten.
**Eine Ursache kann mehrere gleichberechtigte Folgen haben.**
Das umgekehrte gilt natürlich auch :
**Viele verschiedene Ursachen können ein und diesselbe Wirkung haben.**
Beispiel: Eine Leberzirrhose kann durch eine Alkoholkrankheit, eine Hepatitis B, eine Hepatitis C oder auch durch eine Kupferspeicherkrankheit hervorgerufen werden.
Beispiel2: Es gibt viele verschiedene Todesursachen. Die Wirkung ist immer dieselbe: Ein Mensch ist gestorben.

**Zufall in der Theologie**

**Stichworte:**
Gott würfelt nicht ( Albert Einstein )
Wenn man sich Gott allwissend vorstellt, kann er dann zufälliges voraussehen.
Zufallsentscheidungen wurden in der Bibel und bis ins Mittelalter als Gottesentscheidungen angesehen. Nur Gott konnte den Zufall voraussehen.

**Zufall in der Geschichte**

**Die Geschichtsphilosophie**
Die Geschichtsphilosophie ist der Versuch, Geschehenes in einen systematischen Vermittlungszusammenhang zu stellen. Die geschichtlichen Daten selbst sind subjektiv und objektiv unvollständig und ergeben wie Puzzlestücke von selbst keinen sinnvollen Zusammenhang; der wird vielmehr erst in der philosophischen Schau oder Theorie hergestellt. Das Ergebnis sind die verschiedenen Geschichtsbilder.
Die Geschichtsphilosophie gibt Antwort auf folgende Fragen:

- Wer oder was spielt die Hauptrolle im historischen Prozess? Die so genannten welthistorischen Persönlichkeiten? Oder ein Kollektiv wie die Stadt oder der Staat? Die Kultur oder die ganze Menschheit?
- Welche Gestalt hat die Menschheitsgeschichte? Gibt es nachweisbare Entwicklungslinien? Zum Beispiel Beweise für Fortschritte? Oder für die ewige Wiederkehr des Immergleichen? Oder lässt sich nur ein sinnloses Durcheinander feststellen?
- Wenn eine bestimmte Richtung angenommen wird: Was treibt die Geschichte in diese Richtung?
- Welche Gesetzmäßigkeiten zeigen sich eventuell? Haben etwa vergleichbare Situationen aus vergleichbarer Notwendigkeit zu vergleichbaren Lösungen geführt?
- Welchen Einfluß hat der Zufall im historischen Geschehen ?

Vier bekannte Beispiele:
I. Condorcet
Bezeichnend für das Geschichtsbild der Aufklärer ist Condorcets "Entwurf einer historischen Darstellung der Fortschritte des menschlichen Geistes" (1795). Im Bewusstsein der unleugbaren Beschleunigung der Wissensmehrung in der damals überschaubaren Geschichte sind die Erwartungen an die Zukunft hoch. Die Grenzen des Menschenmöglichen erscheinen nicht absehbar. Das Vertrauen in die positiven Fähigkeiten des Menschen und in den auf Fortschritt programmierten historischen Prozess sind das Credo des Aufklärers.
II: Hegel
Der Berliner Staatsphilosoph wird oft zitiert mit dem Prinzip des dialektischen Geschichtsverlaufs. Inhaltlich bedeutet seine "Philosophie der Geschichte" (1837) eine Antithese zum Geist und Buchstaben der Aufklärung. Nicht der Mensch sei das Subjekt der Geschichte, heißt es da, sondern der "Weltgeist", der seine "Geschäftsführer" fernsteuere. Wes Geistes Kind Hegel ist, verrät er, wenn er konkret wird. Seine angeblichen "Geschäftsführer des Weltgeistes" heißen Alexander der Große, Cäsar und Napoleon. Er verherrlicht die Gewalt im Staat ("Der Staat ist die göttliche Idee, wie sie auf Erden vorhanden ist.") und im Krieg.
III: Marx
Aus dem "kommunistischen Manifest" (1848) ist der Satz geläufig: "Alle bisherige Geschichte ist eine Geschichte von Klassenkämpfen." Von der Sklavenhaltergesellschaft bis zum Kapitalismus tritt das Kollektiv geschichtsmächtig auf. Die Masse der Unterdrückten und Ausgebeuteten bestimmt danach den Gang der Geschichte maßgeblich. Vor dem Klassenkampf habe es den Kommunismus der Urgesellschaft gegeben. Der Sieg des Proletariats werde zum Kommunismus der klassenlosen Gesellschaft führen. Diese These wird deshalb kritisiert, weil sie benutzt wurde, um ein anderes System der Unterdrückung unter dem Namen "Diktatur des Proletariats" zu rechtfertigen.
IV: Spengler
Seine "Morphologie der Weltgeschichte" (1918) steht im Gegensatz zu allen drei genannten Ansätzen, weil sie keinen Fortschritt mehr kennt. Vielmehr wird die Geschichte vorgestellt als ein ländlicher Jahrmarkt mit acht Karussells als "Kulturen". Die Kulturkarussells drehen sich nicht gleichzeitig und mit gleichem Tempo, haben aber alle die gleiche Laufzeit von ungefähr 1000 Jahren. Grundlage von Spenglers Geschichtsbild ist die Vorstellung, dass es vergleichbare Phasen der Entwicklung in verschiedenen Regionen und Zeitaltern gibt. So war z. B. schon

lange vor Spengler die griechische Sophistik mit der westeuropäischen Aufklärung verglichen worden oder die Antike mit der deutschen Klassik. Das Durchbuchstabieren dieser Erkenntnis zum biologistischen Schema der Weltgeschichte und der Behauptung, Geschichte erstmalig vorhersagen zu können, begründet zum einen den gewaltigen Verkaufserfolg, zum anderen auch die Attraktivität, die Spenglers Vorstellung immer noch hat.

**Beispiele von geschichtlichem Zufall**
Der Einfluß von Naturkatastrophen auf die Geschichte

**Zufall in der Soziologie**

**Stichpunkte**
*Sinn der Soziologie ist es, nicht an den Zufall in der Gesellschaft zu glauben.* WOLF LEPENIES, Süddeutsche Zeitung, 25/01/02.
Was ist Soziologie? http://www.soziologie.uni-freiburg.de/fachschaft/wasistsoz.php
Zufall, Pech und die Grenzen des Sozialstaats Vortrag gehalten am Philosophischen Kolloquium Leipzig am 10.05.2000 http://www.phil-fak.uni-duesseldorf.de/sowi/lsi/vortraeg/sozialstaat.html
Die wissenschaftliche Zweckerfüllung und das Losverfahren
http://www.marcelmbaumann.de/Seiten/helgepeukert1.html
Zur Soziologie des Spiels http://www.uni-giessen.de/~g51039/vorlesungV.htm

**Zufall in der Psychologie**
Die meisten menschlichen Handlungen sind kein Zufall sondern teilweise unterbewußtes Abwägen von Alternativen und Auswahl der zum gegebenen Zeitpunkt anscheinend vorteilhaftesten. ( Ökonomie des Alltagslebens )
Es ist bis heute in der Psychologie und Neurophysiologie umstritten, ob es im menschlichen Gehirn einen Zufallsgenerator gibt oder nicht.
In Situationen in denen man sich ganz schnell zwischen zwei Alternativen entscheiden muß, wäre so ein Zufallsgenartor vielleicht hilfreich. Eine Situation, die in der Evolution sicher sehr häufig aufgetreten ist, war die Frage *Kampf oder Flucht*, wenn einem ein feindliches Tier plötzlich gegenüberstand.
Siehe zb http://www.jneurosci.org/cgi/content/abstract/13/1/334

**Der freie Wille**
Zwischen den Begriffen Zufall und freier Wille existiert ein enger Zusammenhang. Man kann argumentieren, dass eine freie Entscheidung eine Entscheidung ist, die zumindest teilweise nicht von anderen Einflüssen (innerer und äußerer Art) bestimmt wird. Sie ist also nicht determiniert. Dies kann aber gerade auch als Definition von Zufall angesehen werden. Nach dieser Auffassung kann es in einem Universum ohne Zufall keinen freien Willen geben, da jede Entscheidung bei Kenntnis aller Einflussgrößen vorhergesagt werden könnte.
Es ist nun eine Aufgabe der Philosophie, Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Begriffe genauer herauszuarbeiten. Der englische Begriff *random number* (wörtlich: freie Zahl) für Zufallszahl weist auf diesen Zusammenhang hin.

**Zufall im Leben jedes einzelnen**
Es ist Zufall ob man männlich oder weiblich geboren wird. ( In Indien und anderswo versucht man dies zu manipulieren )
Es ist Zufall in welche Familie man hinein geboren wird.
Es ist Zufall in welchem Land und in welcher Zeit man auf die Welt kommt.
Vieles was man als Schicksal bezeichnet, kann man auch als Einfluß des Zufalls ansehen.

**Zufall in der Literatur und Kunst**
*Der beste Romanschreiber aller Zeiten ist der Zufall. Um fruchtbar zu sein muss man ihn studieren.* Honoré de Balzac

**Zufall in den Naturwissenschaften**

**Zufall in der Physik**

**Stichworte**
- radioaktiver Zerfall
- Brownsche Molekularbewegung
- Fehlerrechnung
- Verschränkung in der Quantenoptik

- Unschärferelation
- Thermodynamik

**Einleitung**
Die Naturwissenschaften versuchen herauszufinden, ob unsere Welt im innersten deterministisch oder zufällig ist. Man will wissen, ob ein Ereignis zufällig ist, weil der Beobachter nicht genügend Daten hatte, um eine exakte Vorhersage zu machen, oder ob das beobachtete System in sich zufällig ist. Beide Arten von Systemen lassen sich mathematisch modellieren.
Die erste Art von Systemen sind solche, in denen angenommen wird, dass das Ergebnis eines Experiments bei festen Bedingungen immer gleich sein muss, und dass die auftretenden Variationen des Ergebnisses auftreten, weil der Beobachter das System nicht genau genug kontrolliert hat. Solche Systeme werden als deterministisch angesehen.
Es ist heute bekannt, dass (theoretisch exakt) deterministische Systeme unvorhersagbares Verhalten zeigen können. Solche Systeme werden in der Chaostheorie untersucht.
Die Quantenphysik hat eine neue Diskussion darüber ausgelöst, ob die Welt fundamental deterministischen oder fundamental zufälligen Prinzipien gehorcht. Die akzeptierte Interpretation der Quantentheorie sagt, dass identische Experimente unterschiedliche Ergebnisse haben können.

**Radioaktiver Zerfall**
Siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Radioaktivität
Das beste Beispiel hierfür ist der radioaktive Zerfall. Es ist keine Möglichkeit bekannt, den Zerfallszeitpunkt eines instabilen Atomkernes vorherzusagen. Über eine große Anzahl von Atomkernen dagegen lassen sich statistische Vorhersagen treffen.
Es gibt Wissenschaftler, die Alternativen (etwa verborgene Variablen) vorschlagen, um doch noch eine deterministische Welt zu beschreiben.
Daneben gibt es die Möglichkeit, aus mikroskopischen Theorien, die zufällig erscheinen, makroskopische Theorien aufzubauen, die (quasi)deterministisch sind.
Ein promineneter Physiker, der sich immer gegen den Einfluß des Zufalls in der Physik gewehrt hat, war Albert Einstein. Von ihm stammt der Satz: *Gott würfelt nicht !.*

**subjektiver und objektiver Zufall**
Zitat : *Einstein .. wollte .. nicht akzeptieren, dass das quantenmechanische Einzelereignis rein zufällig ist. Er hat dies in dem berühmten Satz: «Gott würfelt nicht!» ausgedrückt. Der quantenmechanische Zufall ist von anderer Natur als der Zufall im täglichen Leben. Wenn wir einen Würfel zur Hand nehmen, so wird die erhaltene Zahlenfolge rein zufällig sein, wenn wir fair würfeln. Wir erhalten die 1 im Durchschnitt gleich oft wie die 6 und wissen im vorhinein bei einem Wurf nicht, was die nächste Zahl sein wird. Wir können uns aber vorstellen, dass es im Prinzip für jeden einzelnen Wurf eine genaue Erklärung gäbe, wenn wir nur alle Details genau genug kennen würden, wenn wir also wüssten, in welcher Weise sich die Hand beim Wurf bewegt, wie gross der Luftwiderstand für den Würfel ist oder wie die Oberfläche des Tisches genau beschaffen ist. In der Praxis gelingt eine solche Vorhersage jedoch nicht, da wir im allgemeinen nicht alle das Experiment beeinflussenden Parameter genau genug kennen. Man spricht hier von einem subjektiven Zufall, da es nur subjektiv unbekannt ist, was genau abläuft. Objektiv gesehen gibt es jedoch für das Ergebnis eines jeden Wurfes einen Grund, auch wenn wir diesen nicht kennen. Anders in der Quantenphysik. Stellen wir uns etwa ein einziges radioaktives Atom vor. Von diesem Atom wissen wir, dass es irgendwann zerfallen wird, und wir können die Wahrscheinlichkeit angeben, mit der es beispielsweise innerhalb der nächsten zehn Minuten zerfällt. Der konkrete Zerfall wird jedoch zu einem bestimmten Zeitpunkt auftreten, und wir haben keinerlei Möglichkeit, diesen Zerfall vorauszusagen. Die Quantenphysik sagt, dass es für den Zeitpunkt des einzelnen Zerfalls keinerlei Grund gibt, nicht einmal einen verborgenen. Man spricht hier von objektivem Zufall. Der Zufall tritt nicht nur deshalb auf, weil wir nicht genug wissen, sondern weil kein objektiver Grund vorhanden ist. Dieser objektive Zufall ist wahrscheinlich eine der profundesten Entdeckungen der Naturwissenschaften in unserem Jahrhundert.* Anton Zeilinger , Quantenphysiker , Neue Züricher Zeitung 30.6.1999

**Laplacescher Dämon**
Der Laplacesche Dämon ist eine Metapher für das deterministische Weltbild, wie es zum Teil aus der Klassischen Mechanik abgeleitet wurde.
Pierre Simon Laplace beschreibt im Vorwort seines Essai philosophique sur les probabilités von 1814 ein intelligentes, rechnendes Wesen - der besagte Dämon - dem zu einem beliebigen Zeitpunkt alle im Kosmos wirkenden Kräfte sowie die Lage aller Teile zueinander (heute würde man sagen: deren Anfangszustand) bekannt sind. Dann wäre es nach den Gesetzen der Mechanik für diesen möglich, die Entwicklung des Weltalls sowohl in die Zukunft voraus - als auch in die Vergangenheit zurückzuberechnen.
In einer Welt, in der ein solches Wesen existiern kann, wäre weder Platz für das Wirken eines Gottes noch für menschliche Willensfreiheit, die Geschichte wäre vollständig determiniert und berechenbar.

Es ist dabei nebensächlich, ob ein solches Wesen tatsächlich existiert, oder je existieren wird, denn schon seine potentielle Existenz führt ja zu dem Schluss, das alles vorherbestimmt ist/war.
Was den Laplaceschen Dämon aber auch auf dieser Ebene unmöglich macht, ist die Tatsache, das es nicht nur aus subjektivem, technischem Unvermögen heraus nicht möglich ist, unendlich genau zu messen, sondern auch ganz objektiv, also grundsätzlich, jedem und zu jeder Zeit. Dieses Phänomen beschreibt die Unschärferelation.
Es gibt also in der Welt der Quanten eine Unschärfe, Unbestimmtheit, also sozusagen ein absolutes Fehlen von Information. Weder das Teilchen selbst, noch Gott (oder der Laplacesche Dämon, oder ein anderes, über uns stehende Wesen) weiß (kann wissen), wie es um den Impuls eines Teilchens steht, wenn sein Ort bekannt ist, oder wie es um seinen Ort steht, wenn der Impuls bekannt ist. Der so entstehende absolute Zufall schließt einen Laplaceschen Dämon aus.

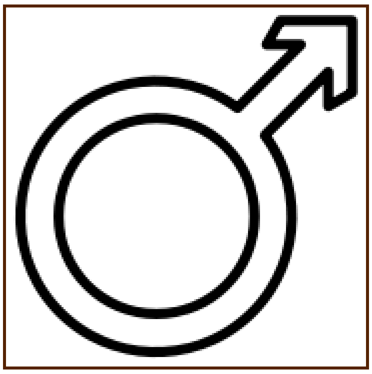
**Unschärferelation (Physik)**

**Die Entropie als Maß für den Zufall in der Physik**

**Zufall in der Biologie**

**Stichworte**
- Entstehung des Lebens ein Zufall ?
- Mutationen
- Rekombination
- Geschlechtswahl

oder



**Die Evolution als Mischprozess von Zufall und Ordnung.**
Über die Evolution wird sehr heftig gestritten, da manche meinen es wäre ein reiner Zufallsprozess. Das stimmt nicht. Ein schönes, immer noch sehr lesenswertes Büchlein hat dazu Jaques Monod geschrieben: Zufall und Notwendigkeit.
- Monod, Jacques
    - Zufall und Notwendigkeit
    - Philosophische Fragen der modernen Biologie
    - dtv Tb 1069

**Literatur**
- Random Walks in Biology

- by Howard C. Berg
- http://books.bankhacker.com/Random+Walks+in+Biology/

**Fragen zum Thema Zufall**
Gibt es ein quantitatives Maß für die Zufälligkeit einer 01 Folge ? Siehe dazu:
http://www.madeasy.de/2/prg01st.htm
Wie zufällig sind die Nachkommastellen der Zahl PI 3,14... ?
Wie zufällig sind die Nachkommastellen der Zahl e ?
Wie zufällig ist der genetische Code ?

**Quellen**

**Zitate**
*Zufällig im reinen Sinne der Kategorie ist das, dessen kontradiktorisches Gegenteil möglich ist.*Immanuel Kant (Kritik der reinen Vernunft, B 487)
*Der Zufall im statistischen Sinne ist die zusammengefasste Wirkung aller Faktoren, welche ständig tätig, nicht klar erkennbar, nicht zuschreibbar und nicht kontrollierbar sind, und deren Effekte wir im Einzelfall nicht vorhersagen können.* Herbert Immich
*Der Zufall ist allgegenwärtig.* Herbert Immich
*Although randomness can be precisely defined and can even be measured, a given number cannot be proved to be random. This enigma establishes a limit to what is possible in mathematics.* Gregory J. Chaitin
*Zufall: Das seit der mittelhochdeutschen Zeit bezeugte Wort ist eine Bildung zum Verb zufallen "zuteil werden" (mittelhochdeutsch. zuovallen).* Duden
*Est autem fortuna; rerum igitur fortuitarum nulla praesensio est. Es gibt aber einen Zufall , und deshalb kann man die kommenden Dinge nicht vorauswissen.* Cicero
*Und was / Ist Zufall anders als der rohe Stein, / Der Leben annimmt unter Bildners Hand? / Den Zufall gibt die Vorsehung - Zum Zwecke / Muss ihn der Mensch gestalten.* - Friedrich Schiller (Don Carlos)
*Zufall ist das unberechenbare Geschehen, das sich unserer Vernunft und Absicht entzieht.* - Gebrüder Grimm (Deutsches Wörterbuch)
*Zufall ist vielleicht das Pseudonym Gottes, wenn er nicht selbst unterschreiben will.* - Anatole France
*Der liebe Gott würfelt nicht !* Albert Einstein
*Das, wobei unsere Berechnungen versagen, nennen wir Zufall.* Albert Einstein
*Also der Zufall auch, der scheinbar zügelbefreite, treu und gehorsam stets feste Gesetze befolgt!* Boethius: Die Tröstungen der Philosophie
*Nun noch zu einem weiteren Kennzeichen der Biologie, dem Zufall. In den physikalischen Wissenschaften führen die Naturgesetze normalerweise zu stark deterministischen Ergebnissen. Weder die natürliche noch die geschlechtliche Selektion gewährleisten einen solchen Determinismus. Tatsächlich ist das Ergebnis eines evolutionären Prozesses gewöhnlich die Folge von Wechselwirkungen zahlreicher Zufallsfaktoren. Blinder Zufall produziert auch die Variation. Er herrscht sowohl beim crossing-over wie bei der Verteilung, der Chromosomen in der Reduktionsteilung. Gerade wegen dieses Zufallsaspektes wurde die Theorie der natürlichen Selektion am häufigsten kritisiert. Doch ist es gerade diese Unabhängigkeit vom Determinismus, die der natürlichen Selektion ihre große Flexibilität gibt. Es ist keineswegs wahr, wie von Darwins Zeitgenossen, zum Beispiel dem Geologen Sedgwick behauptet wurde, dass es unwissenschaftlich sei, sich auf den Zufall zu berufen, Es ist gerade die Zufälligkeit der Variation, die so charakteristisch für die Darwin'sche Evolution ist. Dennoch ist die relative Bedeutung des Zufalls im Evolutionsprozess auch heute noch sehr umstritten. Natürlich hat die eigentliche Selektion immer das letzte Wort.* - Ernst Mayr
*Stochastik ist die Lehre der Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Sie ist ein sehr junger Teilbereich der Mathematik, zu dem im weiteren Sinne auch die Kombinatorik, die Wahrscheinlichkeitstheorie sowie die beurteilende Statistik gehören.* deutsche Wikipedia 10/2004
*Zufall ist ein Wort ohne Sinn, nichts kann ohne Ursache existieren.* - Voltaire
*Die Welt, in der wir leben, lässt sich als das Ergebnis von Wirrwarr und Zufall verstehen; wenn sie jedoch das Ergebnis einer Absicht ist, muss es die Absicht eines Teufels gewesen sein. Ich halte den Zufall für eine weniger peinliche und zugleich plausiblere Erklärung.* - Bertrand Russell
*Die zwei größten Tyrannen der Erde: der Zufall und die Zeit.* Johann Gottfried von Herder
*Der Zufall ist ein Rätsel, welches das Schicksal dem Menschen aufgibt.* Friedrich Hebbel
*Der Zufall ist die in Schleier gehüllte Notwendigkeit.* Marie von Ebner-Eschenbach
*Spielen ist Experimentieren mit dem Zufall.* Novalis
*Der Zufall lehrt uns Achtsamkeit. Hierin liegt der größte Gewinn, das er uns beschert. Überraschungen machen uns empfänglich für die Gegenwart - und ist das Jetzt nicht alles, was wir haben? Sich dem Zufall öffnen heißt lebendig sein.* Stefan Klein , http://www.alles-zufall.de/
*No risk, no fun* Autor unbekannt
*Je älter man wird, desto mehr überzeugt man sich davon, daß Seine geheiligte Majestät der Zufall drei Viertel aller*

*Geschäfte dieses armseligen Universums besorgt.* Friedrich der Große
*Eine zufällige Zahl ist definiert als eine Zahl, die nicht durch einen Algorithmus definiert werden kann, der erheblich kleiner ist als die Zahl selbst.*

**Literatur**

- Alles Zufall Die Kraft, die unser Leben bestimmt

Stefan Klein EUR 19,90 ROWOHLT, REINBEK Erscheinungstermin: 07.2004 Seiten: 376 ISBN: 3-498-03519-3

- Wie der Zufall will? : Vom Wesen der Wahrscheinlichkeit

von Tarassow, Lew W. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg | 1998 | ISBN 3827404746 gutes Buch , leicht verständlich

- Das Reich des Zufalls:

Wissen zwischen Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeiten und Unschärfen. Von Gerd Gigerenzer, Zeno Swijtink, Theodore Porter u. a.. 1999. 374 S. 24 cm. Gebunden. 826gr. ISBN: 3-8274-0101-1, KNO-NR: 07 01 43 67 -SPEKTRUM AKADEMISCHER VERLAG- Sehr interessantes Buch über die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sehr lesenswert.

- Bd.410 Eigen, Manfred; Winkler, Ruthild: Das Spiel.

Serie Piper: -PIPER-Naturgesetze steuern den Zufall. Mit 68 meist farb. Abb.. Kartoniert. 466gr. ISBN: 3-492-20410-4, KNO-NR: 02 60 09 02 29.90 DM Zusatztext: Die Grundelemente des Spiels - Zufall und Gesetz - bestimmen jegliches Geschehen im Universum. So lassen sich Naturgesetze in Form von Spielregeln abstrahieren. Auf dem Spielfeld bilden sich Muster, Information entsteht, die Gesetze von Selektion und Entwicklung treten klar hervor. Dies ist die Quintessenz dieses weltweit erfolgreichen Buches. Sehr gutes Buch. sehr lesenswert .

- Statistik für Nichtstatistiker. Zufall oder Wahrscheinlichkeit.

Karl Bosch Gebundene Ausgabe - 3., bearb. Aufl. (1998) Oldenbourg, Mchn.; ISBN: 3486247506 frank.gaeth@t-online.de aus Berlin , 13. Dezember 2000 Gute Einführung Didaktisch sehr gute Einführung vom Nullniveau aus mit mathematischem Schwerpunkt. Ursprünglich wohl ein Schulbuch, ähnliches Buch im Klett-Verlag erschienen. Dieses Buch ist wirklich zu empfehlen. --Dieser Text bezieht sich auf die Taschenbuch-Ausgabe des Titels

**Alte Bücher zum Thema**

- Aristoteles Physika

Im Zweiten Buch , Kapitel 4 und 5 , findet sich eine der ersten längeren Abhandlungen über den Zufall. Sie ist auch heute noch sehr lesenswert. Viele Jahrhunderte nach Aristoteles hat es gebraucht den Zufall als Ursache mancher Ereignisse anzuerkennen.

- Die Analyse des Zufalls

von Timerding, Heinrich Emil
http://cdl.library.cornell.edu/Hunter/hunter.pl?handle=cornell.library.math/00660001&id=5 1.Kap: Der Begriff des Zufalls S1 2.Kap: Die statistische Methode S13 3.Kap: Stationäre Zahlenreihen S21 4.Kap: Das Gesetz der großen Zahl S35 5.Kap: Die Theorie der Glücksspiele S50 6.Kap: Die Mathematische Analyse stationärer Reihen S69 7.Kap: Das Urnenschema S91 8.Kap: Näherungsformeln S105 9.Kap: Die statistische Theorie des Zufalls S134 10.Kap: Die genetische Theorie des Zufalls S154 Namensverzeichnis

- Windelband, Die Lehren vom Zufall. (Berl. 1870);
- Cantor, Das Gesetz im Zufall. (das. 1877).
- Wahrscheinlichkeitsrechnung Ars conjectandi

Reihe Ostwalds Klassiker, Bd. 107: Autor Jakob Bernoulli Ausgangspunkt für die Auseinandersetzung Jakob Bernoullis mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Problemen waren die Studien von Christian Huygens über Glücksspiele aus dem Jahre 1657. Er baute sie zu einer umfassenden Theorie aus, der "Ars conjectandi", in der er versucht, dieses Gebiet über die bislang üblichen Anwendungen auf Glückspiele hinaus auf "bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse" auszuweiten. Das Werk enthält Gedanken über Gewißheit, Notwendigkeit, Zufall, moralische und rechnerische Erwartung, Gewinnaussichten sowie die Auswertung von Potenzsummen mittels Bernoullischer Zahlen. Bibliographie 2. Auflage 1999, 328 Seiten, 1 Abbildungen, kartoniert, Euro 24,80 ISBN 3-8171-3107-0 22.01.2002 © Verlag Harri Deutsch, Gräfstraße 47, D-60486 Frankfurt am Main,

- Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit

Reihe Ostwalds Klassiker, Bd. 233: Autor : Pierre Simon de Laplace
Wer hat sich nicht im Mathematikunterricht mit den Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln oder Werfen einer Münze amüsiert? In seinem Werk "Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit" legt Laplace die Grundlagen für die Berechnung dieser Ereignisse dar. Ferner zeigt er auf, wie leicht sich Menschen aus ihren Alltagserfahrungen heraus von falschen Wahrscheinlichkeiten leiten lassen und dehnt seine Berechnungen auf die ethischen Wissenschaften aus. Der "Essai" enthält die berühmte klassische, mehr als 100 Jahre lang benutzte Definition der Wahrscheinlichkeit. Ferner umfasst er die exakte Formulierung des klassischen mechanischen Determinismus. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf naturwissenschaftliche Fragestellungen erwies sich als fruchtbar, während ihre Anwendung auf Zeugenaussagen und Gerichtsurteile erfolglos bleiben musste. Bibliographie 2. Auflage 1996, 211 Seiten, 1 Abbildungen, kartoniert, 16,80 ISBN 3-8171-3233-6

**Links**

- http://de.wikipedia.org/wiki/Zufall
- http://www.alles-zufall.de/
- http://www.eduvinet.de/gebhardt/stochastik/zufallsg.html
- http://home.wtal.de/schwebin/lsys/zufall.htm
- http://www.geocities.com/hoefig_de/Verschiedenes/Zufall_Mathematik.htm
- http://www.madeasy.de/2/zufallo.htm Orginaltexte zum Thema Zufall
- http://www.random.org/ liefert echte Zufallszahlen
- http://webnz.com/robert/true_rng.html
    - Seiten über echte Hardware Zufallszahlengeneratoren
- http://www-math.uni-paderborn.de/~aggathen/vorl/2001ss/sem/
- http://www.uni-koblenz.de/~hasan/zufall/zufall.html
    - Universität Koblenz-Landau, Abt. Koblenz Fachbereich Informatik
    - Proseminar im WS 97/98 von Sasa Hasan
- http://www.uni-ulm.de/~cschmid/v2000s/webprob/sb1/sb1_2.htm
    - Schöne Seite über Zufallsgeneratoren mit vielen Bildern
- http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/chance/sueddeutsche.htm
    - Würfelt Gott? Und wenn ja, wann? Noch immer streiten Physiker über den Zufall in der Quantenmechanik, der schon Albert Einstein missfiel
- http://random.mat.sbg.ac.at/
- http://www.fh-weingarten.de/iaf/projekte/is/zufall.htm
- http://www.romankoch.ch/capslock/zufall.htm
- http://www.uni-klu.ac.at/stochastik.schule/
- http://www.dartmouth.edu/~chance/index.html
    - Sehr schöner Kurs zum Thema Zufall in Englisch
- http://www.philosophiebuch.de/lassonzu.htm
- http://cdl.library.cornell.edu/Hunter/hunter.pl?handle=cornell.library.math/00660001&id=5
    - Die Analyse des Zufalls by Timerding, Heinrich Emil
- Einsteins Verhältnis zum Zufall

**Internetseiten zum Thema Stochastik**

- http://de.wikibooks.org/wiki/Mathematik:_Statistik
- http://www.mathematik.uni-kassel.de/didaktik/biehler/StatistikOnline/index.html
    - Gute Übersicht zu weiteren Links

Von "http://de.wikibooks.org/wiki/Zufall"

Seitenkategorien: Diverse | Wikibooks:Wikibookseiten zur Überarbeitung | Wikibooks:Vorlagen zur Bewertung | Buch

**Views**

- Kapitel
- Diskussion
- Bearbeiten
- Versionen/Autoren

**Persönliche Werkzeuge**

- Anmelden

**Navigation**

- Hauptseite

- Zufälliger Artikel
- Aktuelles
- Alle Bücher
- Liste der Bücherregale
- Administratoren
- Logbücher

**Mitmachen**

- Wikibooks-Portal
- Letzte Änderungen
- Hilfe
- Spenden

**Suche**

Los Suche

**Werkzeuge**

- Was zeigt hierhin
- Verlinkte Seiten
- Hochladen
- Spezialseiten
- Druckversion
- Permanentlink

---

---

---


- Impressum | Diese Seite wurde zuletzt geändert um 16:39, 4. Jun 2006.
- Inhalt ist verfügbar unter der GNU Free Documentation License.
- Privacy policy
- Über Wikibooks
- Lizenzbestimmungen