Mathe für Nicht-Freaks

Grundlagen der Mathematik

Stephan Kulla

Wikibooks.org

13. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

I. Logik – die Sprache der Mathematik . . . 3
1. Einführung in die Logik und Erklärung des Begriffs „Aussage“ . . . 5
  1.1. Warum Logik für die Mathematik wichtig ist . . . 5
  1.2. Grundlegende Begriffe der Aussagenlogik . . . 6
2. Junktoren – Verknüpfungen zwischen Aussagen . . . 9
  2.1. Einführende Beispiele . . . 9
  2.2. Die Wahrheitstabelle – ein Hilfsmittel der Logik . . . 10
  2.3. Negation – die Verneinung einer Aussage . . . 12
  2.4. Konjunktion – die Und-Verknüpfung . . . 13
  2.5. Disjunktion – die Oder-Verknüpfung . . . 13
  2.6. Implikation – die Wenn-dann-Verknüpfung . . . 14
  2.7. Äquivalenz – die Genau-dann-wenn-Verknüpfung . . . 17
  2.8. Bindungsreihenfolge der Junktoren (Präzedenzregeln) . . . 18
  2.9. Wahrheitstabellen erstellen . . . 19
3. Quantoren – Existenz- und Allaussagen . . . 23
  3.1. Was sind Quantoren? . . . 23
  3.2. Quantoren . . . 24
  3.3. Freie, gebundene Variablen und Aussageformen . . . 26
4. Tautologien – was wahr ist, ist wahr . . . 29
  4.1. Tautologie . . . 29
  4.2. Übersicht zu Tautologien . . . 31
5. Anwendungen der Aussagenlogik . . . 35
  5.1. Übersetzung von Aussagen: natürliche Sprache <=> formale Sprache . . . 35
  5.2. Aussagen negieren . . . 38
  5.3. Substitution von Terme für Variable . . . 41
6. Zusammenfassung . . . 43
  6.1. Wahrheitstabellen der Junktoren . . . 45
  6.2. Tautologien . . . 45
  6.3. Vokabelliste . . . 47
  6.4. Umformungsregeln zur Negation . . . 48
II. Beweise führen . . . 49
7. Was sind Beweise? . . . 51
  7.1. Was sind Beweise? . . . 51
  7.2. Wenn Beweise vom Himmel fallen . . . 54
8. Beweisarten . . . 57
  8.1. Direkter Beweis . . . 57
  8.2. Widerspruchsbeweis . . . 58
9. Beweismethoden . . . 61
  9.1. Vollständige Fallunterscheidung . . . 61
  9.2. Beweis durch Kontraposition . . . 62

9.3. Vollständige Induktion 65
10. Zusammenfassung 67
10.1. Beweis 67
10.2. Beweisarten 67
10.3. Beweismethoden 67
III. Vollständige Induktion – Der Beweis mit dem Dominoeffekt 69
11. Definition und Erklärung 71
11.1. Eine Beispielaufgabe 72
11.2. Das Prinzip der vollständigen Induktion 77
12. Lösungshilfe und Beispielaufgaben 81
12.1. Schema zum Beweis mit vollständiger Induktion 81
12.2. Beispiel 1 : Beweis einer Summenformel 83
12.3. Beispiel 2: Beweis einer Ungleichung 86
12.4. Beispiel 3: Teilbarkeit 88
13. Häufige Fragen 91
IV. Mengenlehre 93
14. Mengenlehre 95
14.1. Definition der Menge 95
14.2. Schreibweisen 98
14.3. Begriffe der Mengenlehre 100
14.4. Grenzen der Mengenbildung 105
14.5. Einzelnachweise 105
15. Verknüpfungen zwischen Mengen 107
15.1. Einleitendes Beispiel 107
15.2. Die einzelnen Verknüpfungen 113
15.3. Gesetzmäßigkeiten 120
16. Paare, Tupel und das kartesische Produkt 123
16.1. Geordnetes Paar und Tupel 123
16.2. Kartesisches Produkt 127
17. Zusammenfassung 129
17.1. Verknüpfungen zwischen Mengen 131
17.2. Gesetzmäßigkeiten 132
V. Relationen 135
18. Relationen – Wie Beziehungen zwischen Objekten modelliert werden 137
18.1. Wie können Eigenschaften und Beziehungen modelliert werden? 137
18.2. Definition 143
19. Binäre Relationen 145
19.1. Binäre Relationen 145
19.2. Eigenschaften homogener Relationen 151
20. Äquivalenzrelationen 155
20.1. Einführendes Beispiel 155
20.2. Definitionen 158
20.3. Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und der Zerlegung einer Menge . 161
21. Ordnungsrelationen 165
21.1. Ordnungsrelation 165
21.2. Nachweis von Ordnungsrelationen 166
22. Zusammenfassung 169
22.1. Eigenschaften homogener, binärer Relationen 171

VI. Abbildungen . . . 173
23. Abbildungen . . . 175
23.1. Definition . . . 175
23.2. Definition durch Relationen . . . 180
23.3. Eigenschaften von Abbildungen . . . 180
23.4. Identität von Abbildungen . . . 183
23.5. Funktionskomposition . . . 184
24. Verknüpfungen . . . 187
24.1. Definition . . . 187
24.2. Eigenschaften binärer Verknüpfungen . . . 188
25. Zusammenfassung . . . 191
25.1. Eigenschaften von Abbildungen . . . 193
25.2. Eigenschaften binärer Verknüpfungen . . . 193
VII. Mächtigkeit von Mengen . . . 195
26. Mächtigkeit von Mengen . . . 197
26.1. Wann sind zwei Mengen gleich groß? . . . 198
26.2. Beispiele . . . 200
26.3. Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit . . . 205
26.4. Vertiefung zum Thema Mächtigkeit . . . 206
26.5. Einzelnachweise . . . 208
27. Zusammenfassung . . . 209
VIII. Grundlegendes . . . 211
28. Termumformungen . . . 213
28.1. Notwendige Termumformungen finden . . . 213
29. Gleichungsumformungen . . . 215
29.1. Umformungen . . . 215
29.2. Äquivalenzumformungen . . . 217
IX. Summe und Produkt . . . 219
30. Summe und Produkt . . . 221
30.1. Motivation . . . 221
30.2. Die Summenschreibweise . . . 221
30.3. Die Produktschreibweise . . . 224
30.4. Leere Summe / Leeres Produkt . . . 225
30.5. Doppelsumme und Doppelprodukt . . . 226
30.6. Rekursive Definition der Summe und des Produkts . . . 227
30.7. Alternative Summen-/Produktschreibweise . . . 229
30.8. Wichtige Summenformeln . . . 230
30.9. Eigenschaften der Summen- und Produktschreibweise . . . 231
31. Fakultät . . . 235
31.1. Definition . . . 235
31.2. Rekursive Definition . . . 235
31.3. Anwendungen der Fakultät . . . 236
32. Zusammenfassung . . . 239
32.1. Eigenschaften der Summen- und Produktschreibweise . . . 241
X. Binomialkoeffizient . . . 243
33. Binomialkoeffizient . . . 245
33.1. Herleitung und Definition . . . 245
33.2. Und was ist nun wahrscheinlicher: Blitzschlag oder Lottogewinn? . . . 247

34. Der binomische Lehrsatz . . . 249
34.1. Der Binomische Lehrsatz . . . 249
34.2. Folgerungen aus dem binomischen Lehrsatz . . . 251
35. Rechenregeln . . . 253
36. Zusammenfassung . . . 257
36.1. Rechenregeln . . . 259
37. Autoren . . . 261
Abbildungsverzeichnis . . . 263
38. Licenses . . . 275
38.1. GNU GENERAL PUBLIC LICENSE . . . 275
38.2. GNU Free Documentation License . . . 276
38.3. GNU Lesser General Public License . . . 276

Teil I.

Logik – die Sprache der Mathematik

1. Einführung in die Logik und Erklärung des Begriffs „Aussage“

1.1. Warum Logik für die Mathematik wichtig ist

Logik ist als Lehre des vernünftigen Schlussfolgerns die Sprache der Mathematik. In dieser Sprache werden mathematische Sätze formuliert und Beweise geführt. Sie genügt der Anforderung der Mathematik, dass alle in ihr formulierten Ausdrücke eine klare, scharf definierte Bedeutung haben. Dabei ist das richtige Schließen aus logischen Ausdrücken nicht immer so einfach, wie man zunächst glaubt. Oftmals verführt uns unsere Intuition zu Schlüssen, die sich beim genaueren Hinschauen als falsch herausstellen. Der richtige Umgang mit logischen Ausdrücken ist einer der Schlüssel, um Mathematik zu verstehen und zu beherrschen. Deswegen beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit logischen Ausdrücken und wie man mit ihnen umgeht.

1.1.1. Mehrdeutigkeit natürlicher Sprachen

Zunächst möchte ich dir an einigen Beispielen zeigen, warum die w:Deutsche Sprache[1] (oder andere natürliche Sprachen) nicht geeignet sind, um sich allein in ihr über mathematische Problemstellungen zu unterhalten.

Frage: Welche Bedeutung haben die folgenden Aussagen?

Aussage: Elisabeth hat 2 Kinder.

a) Elisabeth hat genau 2 Kinder.

b) Elisabeth hat mindestens 2 Kinder.

c) Elisabeth hat höchstens 2 Kinder.

Aussage: Ich trinke Wein oder gehe ins Kino.

a) Ich trinke Wein und/oder gehe ins Kino.

b) Ich trinke entweder Wein oder ich gehe ins Kino.

Aussage: Ich sehe auf dem Dach Robert mit dem Fernglas.

a) Ich bin auf dem Dach und sehe durch mein Fernglas Robert.

b) Ich bin auf dem Dach und sehe Robert, der ein Fernglas hat.

c) Ich sehe durch mein Fernglas Robert, der auf dem Dach ist.

---

1 `http://de.wikipedia.org/wiki/Deutsche%20Sprache`

d) Ich sehe Robert, der auf dem Dach ist und ein Fernglas hat.

Du siehst, dass viele Sätze unserer Alltagssprache (beabsichtigt oder unbeabsichtigt) mehrdeutig sind. Sicherlich kennst du noch weitere Beispiele für Sätze, die mehrdeutig sind. Überlege, wie oft es dir schon passiert ist, dass dich jemand missverstanden hat.

Wegen diesen Mehrdeutigkeiten kann eine natürlichen Sprache in der Mathematik zur Kommunikation nicht verwendet werden. Stell dir vor, Mathematiker würden eine unterschiedliche Auffassung über mathematische Objekte haben, weil die ihnen zugrunde liegende Definition auf unterschiedliche Weisen verstanden werden kann. Ein sinnvolles mathematisches Arbeiten ist dann schlicht nicht möglich! Deswegen ist es wichtig, einen Werkzeugsatz zu haben, mit dem ganz klar definierte Aussagen formuliert werden können und in welchem es klare Regeln gibt, wie man aus bestehenden Aussagen neue herleitet. Dieses System ist für die Mathematik die Logik, die ich dir in diesem Kapitel vorstellen werde.

> **!** **Hinweis**
>
> Es wurden bisher mehrere logische Systeme entwickelt. Das System, welches ich dir im Folgenden vorstelle, wird w:Klassische Logik[2] genannt.

1.2. Grundlegende Begriffe der Aussagenlogik

1.2.1. Der kleinste Baustein der Logik ist die Aussage

Der grundlegende Begriff der Aussagenlogik ist die **Aussage**. Eine Aussage ist ein aus Wörtern und/oder mathematischen Zeichen aufgebauter Ausdruck, bei dem es sinnvoll ist zu sagen, ob dieser Ausdruck wahr oder falsch ist. Aussagen sind damit Ausdrücke, denen man sinnvoll einen Wahrheitswert zuordnen kann. Man kann sie also für die Punkte im folgendem Satzfragment einsetzen:

Ist es wahr, dass gilt: ... ?

So ist der Ausdruck „5 ist eine Primzahl.“ eine Aussage, da die Frage „Ist es wahr, dass gilt: 5 ist eine Primzahl?“ sinnvoll gestellt und beantwortet werden kann. Demgegenüber ist die Frage „Ist 5 eine Primzahl?“ keine Aussage, da der Ausdruck „Ist es wahr, dass gilt: Ist 5 eine Primzahl? ?“ keine sinnvolle Frage ist (Beachte das doppelte Fragezeichen). Damit folgt, dass Fragen, Satzfragmente und Befehle keine Aussagen sind, da ihnen nicht sinnvoll ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann. Auch sprachliche Gebilde wie „$x \geq 5$“, die freie Variablen besitzen, sind keine Aussagen. Dies liegt daran, dass bei solchen Ausdrücken der Wahrheitswert von der Belegung der Variablen abhängt. So ist „$x \geq 5$“ für die Belegung $x = 42$ wahr und für $x = 1$ falsch und es kann deshalb nicht eindeutig entschieden werden, ob dieser Ausdruck wahr oder falsch ist. Auch Ausdrücke, die unabhängig von der Belegung ihrer Variablen immer denselben Wahrheitswert besitzen, werden in der Mathematik nicht als Aussagen angesehen.

Eine Aussage kann nur genau einen der sogenannten Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ besitzen (dies wird auch das „w:Prinzip der Zweiwertigkeit[3]“ genannt). Dabei nutzt man für die Wahrheitswerte „wahr“ oftmals die Symbole W oder 1 und für „falsch“ die Symbole F oder 0.

3 `http://de.wikipedia.org/wiki/Prinzip%20der%20Zweiwertigkeit`

Ausdruck	**Ist der Ausdruck eine Aussage?**	**Ist die Aussage wahr oder falsch?**
10 ist eine gerade Zahl.	Aussage	wahr
5 ist durch 3 teilbar.	Aussage	falsch
Es gibt unendlich viele w:Primzahlzwilling[4].	Aussage	Bis heute weiß man nicht, ob diese Aussage wahr ist oder falsch.
Schläfst du schon?	keine Aussage	-
Geh in die Schule!	keine Aussage	-
$5+4-7x$	keine Aussage	-
$x > 0$ oder $x = 0$ oder $x < 0$	keine Aussage	-
Boah, Alter, geil mann...	keine Aussage	-

Aussagen begegnen dir überall in der Mathematik. Alle Sätze, Hilfesätze und Axiome sind als wahre Aussagen formuliert. Wenn du dir einen Beweis anschaust, so ist dieser eine Folge von Aussagen, welche aufeinander aufbauen und in (logischen) Beziehungen zueinander stehen (zum Beispiel kann eine Aussage eine Schlussfolgerung aus einer anderen Aussage sein). Dementsprechend ist es für dich als Mathematikstudent oder -interessierten wichtig, dass du mit Aussagen richtig umgehen kannst, also zum Beispiel die innere Struktur einer Aussage erkennst und sie richtig negieren kannst sowie häufige Fehler im logischen Schlussfolgern vermeidest.

Verständnisfrage: Welche der folgenden Ausdrücke sind Aussagen?

1. *Alle Raben sind weiß.*
2. $5+7$
3. $5 \geq 7$
4. $5+7=6$
5. *Ist* $5+7=12$*?*

Antwort:

1. Aussage
2. keine Aussage
3. Aussage
4. Aussage
5. keine Aussage

1.2.2. Unentscheidbare Ausdrücke

Aber Vorsicht: Es gibt Ausdrücke, die auf dem ersten Blick wie eine Aussage aussehen, denen aber nicht sinnvoll ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann. Einer diese Ausdrücke ist „Dieser Satz ist falsch“. Du kannst zwar sinnvoll fragen, ob dieser Ausdruck wahr oder falsch ist - du kannst dies aber nicht *sinnvoll entscheiden*. Egal welchen Wahrheitswert du dieser Aussage zurechnest, du landest immer bei einem Widerspruch (*Probier es aus!*). Dementsprechend handelt es sich bei diesem Ausdruck um keine Aussage.

4 `http://de.wikipedia.org/wiki/Primzahlzwilling`

Unentscheidbare Ausdrücke können insbesondere dann auftreten, wenn diese einen Selbstbezug aufweisen. Dieser Selbstbezug ist bereits im obigen Beispiel „Dieser Satz ist falsch.“ vorhanden.

Ein weiteres Beispiel für einen unentscheidbaren Ausdruck ist: „Der nächste Satz ist wahr. Der vorherige Satz ist falsch.“

> *Frage: Warum ist der Ausdruck „Der nächste Satz ist wahr. Der vorherige Satz ist falsch.“ unentscheidbar?*
> Wenn der erste Satz wahr ist, so wäre der zweite Satz wahr und damit der erste falsch ↯. Wenn der erste Satz falsch ist, wäre der zweite Satz falsch und damit der erste Satz wahr ↯.

In den folgenden Kapiteln werden wir aber nicht auf solche unentscheidbaren Ausdrücke stoßen. Du solltest dir aber dieses Phänomens bewusst sein.

2. Junktoren – Verknüpfungen zwischen Aussagen

Junktoren sind bestimmte Symbole in der Aussagenlogik, die Aussagen miteinander verbinden oder in eine Beziehung stellen. Das Wort Junktor stammt vom lateinischen Wort *iungere* ab, was so viel wie „verknüpfen, verbinden“ bedeutet. Junktoren kann man deshalb gut mit w:Konjunktion (Wortart)[1] vergleichen, wie es sie in natürlichen Sprachen gibt (Beispiele für Bindewörter sind „und“, „oder“, „aber“). Während nämlich Junktoren in der Logik Aussagen miteinander verknüpfen, verbinden Bindewörter einzelne Satzteile in einer natürlichen Sprache. Dementsprechend gibt es (wie du noch sehen wirst) in der deutschen Sprache für Junktoren ein äquivalentes oder ähnliches Bindewort.

Es gibt aber einen entscheidenden Unterschied: Während nämlich die Bedeutung eines Junktors eindeutig definiert ist, besitzen Bindewörter oftmals eine unterschiedliche Bedeutung (je nach Kontext, in dem sie verwendet werden). So bedeutet „oder“ im Satz „Gehst du nun ins Kino oder ins Restaurant?“, dass die angesprochene Person die Entscheidung hat, entweder ins Kino oder ins Restaurant zu gehen (sie kann sich aber nicht für beides gleichzeitig entscheiden). Im Satz „Er freut sich wegen seines Lottogewinns oder seiner neuen Freundin“ besitzt „oder“ mehr die Bedeutung eines „und/oder“ (die Person kann sich auch über beide Ereignisse gleichzeitig freuen).

Einige Studienanfänger machen den Fehler, dass sie die Bedeutungen von Junktoren und ihren äquivalenten Bindewörtern vermischen. Dann besteht die Gefahr, dass sie falsche Schlüsse ziehen und so zu falschen Ergebnissen kommen. Deshalb ist es für dich wichtig, dass du die Definitionen und Eigenschaften der einzelnen Junktoren genau kennst (insbesondere diejenigen Eigenschaften, die scheinbar kontraintuitiv sind). Es ist auch wichtig, dass du klar zwischen Bindewörtern und Junktoren unterscheidest.

2.1. Einführende Beispiele

Nimm als Beispiel die folgenden zwei Aussagen:

Aussage A: „36 ist durch 2 teilbar.“

Aussage B: „5 ist gerade.“

Diese beiden Aussagen kannst du miteinander verknüpfen, indem du den Junktor „und“ verwendest. Du erhälst dadurch die Aussage: „36 ist durch 2 teilbar und 5 ist gerade.“ (Beachte, dass hier „und“ als Junktor verwendet wird.) Du kannst aber auch die beiden Aussagen auf eine ganz andere Art und Weise miteinander verknüpfen, nämlich: „Wenn 36 durch 2 teilbar ist, dann ist 5 gerade.“ Hier ist

1 `http://de.wikipedia.org/wiki/Konjunktion%20%28Wortart%29`

der Junktor der „Wenn - dann"-Junktor, der beide Aussagen miteinander verknüpft. Hier nochmal beide Beispiele zur Übersicht:

$$\text{Aussage „}A\text{ und }B\text{“: } \overbrace{\text{36 ist durch 2 teilbar}}^{\text{Teilaussage 1}}\ \overbrace{\text{und}}^{\text{Junktor}}\ \overbrace{\text{5 ist gerade}}^{\text{Teilaussage 2}}$$

$$\text{Aussage „Wenn }A\text{, dann }B\text{“: } \overbrace{\text{Wenn}}^{\text{Junk-}}\ \overbrace{\text{36 ist durch 2 teilbar}}^{\text{Teilaussage 1}}\ \overbrace{\text{dann}}^{\text{tor}}\ \overbrace{\text{5 ist gerade}}^{\text{Teilaussage 2}}$$

Für Junktoren werden Symbole verwendet. So ist für den Junktor „und" das Symbol und für den „Wenn-dann"-Junktor das Symbol $\Rightarrow$ gebräuchlich. Damit können obige beide Aussagen folgendermaßen dargestellt werden:

$$\text{Aussage „}A\text{ und }B\text{“: } \overbrace{\text{36 ist durch 2 teilbar}}^{\text{Teilaussage 1}}\ \overbrace{\qquad}^{\text{Junktor}}\ \overbrace{\text{5 ist gerade}}^{\text{Teilaussage 2}}$$

$$\text{Aussage „Wenn }A\text{, dann }B\text{“: } \overbrace{\text{36 ist durch 2 teilbar}}^{\text{Teilaussage 1}}\ \overbrace{\Rightarrow}^{\text{Junktor}}\ \overbrace{\text{5 ist gerade}}^{\text{Teilaussage 2}}$$

<u>Frage</u>: Überlege dir einige mathematische Aussagen. Welche Verknüpfungen sind in diesen Aussagen enthalten? Welche verknüpften Teilaussagen kannst du ausmachen?

<u>Verständnisfrage</u>: Nimm den Satz: „Wenn x eine natürliche Zahl ist und x gerade ist, dann ist x durch 2 teilbar." Wie kannst du diesen Satz in Teilaussagen und Junktoren zerlegen?

$$\overbrace{\left(\underbrace{x\text{ ist eine natürliche Zahl}}_{\text{Teilaussage}}\ \underbrace{\text{und}}_{\text{Junktor}}\ \underbrace{x\text{ ist gerade}}_{\text{Teilaussage}}\right)}^{\text{Teilaussage}}\quad \overbrace{\text{Wenn }\ldots\text{, dann }\ldots}^{\text{Junktor}}\quad \overbrace{x\text{ ist durch 2 teilbar}}^{\text{Teilaussage}}$$

Und mit Symbolen:

$$\overbrace{\left(\underbrace{x\text{ ist eine natürliche Zahl}}_{\text{Teilaussage}}\ \underbrace{\qquad}_{\text{Junktor}}\ \underbrace{x\text{ ist gerade}}_{\text{Teilaussage}}\right)}^{\text{Teilaussage}}\quad \overbrace{\Rightarrow}^{\text{Junktor}}\quad \overbrace{x\text{ ist durch 2 teilbar}}^{\text{Teilaussage}}$$

Im Folgenden stelle ich dir die für die Mathematik wichtigsten Junktoren vor. Um eine übersichtliche Notation zu erreichen, werde ich, wie es in der Mathematik üblich ist, als Platzhalter für Aussagen Großbuchstaben wie A, B und C verwenden. Beachte, dass diese Platzhalter auch für Aussagen stehen können, die selbst wieder eine Verknüpfung von mehreren Aussagen sind.

2.2. Die Wahrheitstabelle – ein Hilfsmittel der Logik

Doch bevor wir uns mit den Junktoren beschäftigen, möchte ich dir ein wichtiges Hilfsmittel der Logik erklären, die Wahrheitswerttabelle, kurz **Wahrheitstabelle**. Stell dir dazu vor, du hast eine

Aussage, die eine Verknüpfung von mehreren Teilaussagen *A*, *B*, *C*... ist. Der Wahrheitswert dieser zusammengesetzten Aussage ist eindeutig aus den Wahrheitswerten der Teilaussagen *A*, *B*, *C*... bestimmbar (dies wird w:Extensionalitätsprinzip[2] genannt). Dementsprechend gibt es für diese zusammengesetzte Aussage eine eindeutig festgelegte Vorschrift, die bestimmt, wie der Wahrheitswert dieser verknüpften Aussage in Abhängigkeit zu dessen Teilaussagen ist. Da die Anzahl der Teilaussagen *A*, *B*, *C*... endlich ist, gibt es auch nur endlich viele Möglichkeiten der Belegung dieser Teilaussagen mit den Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch“. Somit können alle möglichen Belegungen der Aussagen *A*, *B*, *C*... und der dazugehörige resultierende Wahrheitswert der gesamten Aussage in einer Tabelle dargestellt werden. Eine solche Tabelle wird „Wahrheitstabelle“ genannt. In folgender Tabelle ist das Prinzip einer Wahrheitstabelle dargestellt:

Teilaussagen *A*, *B*, *C*...	**zusammengesetzte Aussage**
1. Belegung für die Teilaussagen *A*, *B*, *C*... mit „wahr“ bzw. „falsch“	resultierender Wahrheitswert
2. Belegung für die Teilaussagen *A*, *B*, *C*... mit „wahr“ bzw. „falsch“	resultierender Wahrheitswert
...	...
Letzte Belegung für die Teilaussagen *A*, *B*, *C*... mit „wahr“ bzw. „falsch“	resultierender Wahrheitswert

Ein Beispiel einer Wahrheitstabelle anhand der zusammengesetzten Aussage „*A* und *B*“ (Beachte, dass in dieser Aussage „und“ ein Junktor ist):

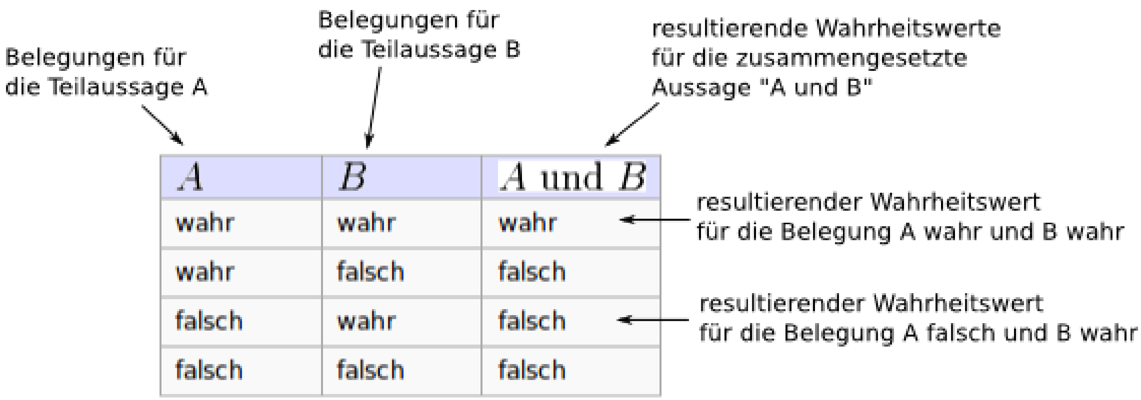


Abb. 1

Eine Wahrheitstabelle dient also dazu, den Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten seiner Teilaussagen darzustellen. Dabei kann die Anzahl der Zeilen schnell groß werden.

Frage: Wie viele Zeilen sind bei n Teilaussagen notwendig?
Es sind 2^n Zeilen notwendig, da für jede der n Teilaussagen die 2 Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ als Belegung möglich sind. So sind bei 2 Teilaussagen 4, bei 3 Teilaussagen 8 und bei 4 Teilaussagen 16 Zeilen notwendig.

2 http://de.wikipedia.org/wiki/Extensionalit%E4tsprinzip

2.3. Negation – die Verneinung einer Aussage

Wahrheitstabelle: Negation A	$\neg A$
F	W
W	F

Der erste Junktor, den ich dir vorstellen werde, ist die Verneinung einer Aussage, welche **Negation** genannt wird. Die Negation kehrt den Wahrheitswert einer Aussage um: Aus „wahr“ macht sie „falsch“ und aus „falsch“ macht sie „wahr“. Oder anders ausgedrückt: Eine negierte Aussage A ist genau dann wahr, wenn die Aussage A falsch ist. Dies siehst du auch rechts in der Wahrheitstabelle der Negation. Das Symbol der Negation ist $\neg$. Wenn du also die Verneinung einer Aussage A ausdrücken möchtest, so schreibst du $\neg A$ auf. Es gibt aber auch die Notation $\overline{A}$ beziehungsweise $\sim A$, um die Negation von A aufzuschreiben.

Abb. 2 Es muss nicht unbedingt die Sonne scheinen, wenn es nicht regnet.

Es ist wichtig, dass du lernst, wie man eine Aussage richtig negiert. So ist zum Beispiel die Negation der Aussage „Es regnet“ *nicht* die Aussage „Es scheint die Sonne“ *sondern* die Aussage „Es regnet nicht“. Es könnte ja zum Beispiel sein, dass es bewölkt ist, es aber nicht regnet. Um eine logische

Aussage zu negieren, gibt es einfache Umformungsregeln, die du beachten musst. Diese werde ich dir später im Kapitel Anwendungen der Aussagenlogik[3] erklären.

2.4. Konjunktion – die Und-Verknüpfung

Wahrheitstabelle: Konjunktion A	B	AB
F	F	F
F	W	F
W	F	F
W	W	W

Eine weitere wichtige Verknüpfung zwischen zwei Aussagen A und B ist die **Konjunktion**, die Und-Verknüpfung „A und B“. Das Symbol für „und“ ist (Stell dir dazu ein großes A vom Englischen „and“ für „und“ vor). Wenn du also notieren möchtest, dass sowohl die Aussage A, als auch die Aussage B wahr ist, schreibst du AB. Wie du aus der Wahrheitstabelle entnehmen kannst, ist eine Aussage AB dann und nur dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind. Wenn bereits eine der beiden Teilaussagen falsch ist, ist die gesamte Aussage falsch. Dies deckt sich mit dem alltäglichen Gebrauch des Bindewortes „und“.

2.5. Disjunktion – die Oder-Verknüpfung

Wahrheitstabelle: Disjunktion A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	W	W
W	F	W
W	W	W

Außerdem kann man Aussagen noch über eine Oder-Verknüpfung miteinander verbinden. Dazu gibt es in der Logik die **Disjunktion** mit dem Symbol $\vee$. Wenn du sagen möchtest, dass mindestens eine der beiden Aussagen A, B wahr ist, schreibst du $A \vee B$ („A oder B“ ausgesprochen).

Beachte: In der Umgangssprache besitzt „oder“ zwei verschiedene Bedeutungen: So benutzen wir „oder“ im Sinne von „und/oder“ („Dieses Angebot richtet sich an junge Leute oder Kunstinteressierte.“) und in der Bedeutung als „entweder - oder“ („Kommst du mit? Ja oder Nein?“). In der Logik wird stets das nicht-ausschließende Oder im Sinne von „und/oder“ verwendet („Der Bus hält, wenn jemand einsteigen oder jemand aussteigen will“)!

Es gibt auch einen Junktor im Sinne einer Entweder-Oder-Verknüpfung, die w:Kontravalenz[4]. Diese spielt für dieses Buch eine eher geringe Rolle, wird aber in der Informatik viel verwendet.

3 Kapitel 5.1.3 auf Seite 37
4 `http://de.wikipedia.org/wiki/Kontravalenz`

2.6. Implikation – die Wenn-dann-Verknüpfung

Wahrheitstabelle: Implikation A	B	$A \Rightarrow B$
F	F	W
F	W	W
W	F	F
W	W	W

Eine wichtige Verknüpfung in der Aussagenlogik ist die **Implikation**, welche als Wenn-dann-Verknüpfung aufgefasst werden kann. Ihr Symbol ist $\Rightarrow$. So bezeichnet $A \Rightarrow B$ die Aussage „Wenn A, dann B“. Weitere Sprechweisen für $A \Rightarrow B$ sind „Aus A folgt B“, „A impliziert B“, „A ist eine hinreichende Bedingung für B“ und „B ist eine notwendige Bedingung für A“. Dabei wird A *Prämisse* und B *Konklusion* genannt:

$$\overbrace{\underbrace{A}_{\text{Prämisse}} \Rightarrow \underbrace{B}_{\text{Konklusion}}}^{\text{Implikation}}$$

Abb. 3 Eine Straße kann nass sein, ohne dass es regnet.

Die Bedeutung von $A \Rightarrow B$ ist demnach, dass wenn bereits die Aussage A gilt, auch die Aussage B gelten muss. Dabei muss aber kein kausaler Zusammenhang zwischen A und B vorhanden sein (was du vielleicht durch die Formulierung „Wenn A, dann B“ vermuten könntest). So ist die Aussage $4 > 1 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$ („Aus $4 > 1$ folgt $\sqrt{9} = 3$“) eine wahre Aussage, auch wenn aus der Tatsache, dass $4 > 1$ ist, nicht kausal die Tatsache folgt, dass $\sqrt{9} = 3$ ist.

Leicht begeht man bei der Implikation $A \Rightarrow B$ den Fehler zu glauben, dass sie annehmen, dass dann auch $B \Rightarrow A$ gelten muss. So gehen einige davon aus, dass aus dem Satz „Wenn es regnet, ist die Straße nass.“ folgen muss, dass, wenn die Straße nass ist, es regnen muss. Dies ist aber nicht der Fall! So kann die Straße wegen einer Straßenreinigung nass sein oder es kann vor kurzem geregnet haben, ohne dass es momentan regnet.

⚠ Warnung

Viele mathematische Sätze sind als Implikationen definiert (aus gewissen Bedingungen A folgt eine Tatsache B). Deshalb ist es wichtig, dass du dir merkst, dass eine Implikation nicht umkehrbar ist (der Pfeil geht schließlich nur von A nach B und nicht umgekehrt). Sonst passiert es dir schnell, dass du Fehler in deinen Beweisen machst.

Frage: Überlege dir selbst mathematische Beispiele, mit denen du andere Leute überzeugen kannst, dass Implikationen im Allgemeinen nicht umkehrbar sind.
Ein Beispiel ist die Implikation $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$. Die Umkehrung wäre $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$. Diese Aussageform ist jedoch nicht allgemeingültig, da auch $(-2)^2 = 4$ ist. Ein weiteres Beispiel ist:

$f(x_0)$ ist in x_0 differenzierbar. $f(x_0)$ ist ein lokales Extremum. $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

Die Umkehrung wäre die Aussage:

Wenn die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 gleich null ist, dann ist f in x_0 differenzierbar und besitzt in x_0 ein lokales Extremum.

Ein Gegenbeispiel ist die Funktion $f(x) = x^3$. Bei dieser Funktion ist die erste Ableitung bei $x = 0$ null, da $f'(x) = 3x^2$ und $3 \cdot 0^2 = 0$ ist, aber diese Funktion besitzt keine lokale Extremstelle bei $x = 0$.

Beachte auch, dass nach der Wahrheitstabelle die Implikation bereits dann wahr ist, wenn die Prämisse A falsch ist. So ist die Aussage $2 + 3 = 11 \Rightarrow 7 + 5 = 4$ („Wenn $2 + 3 = 11$ ist, dann ist $7 + 5 = 4$“) eine wahre Aussage, auch wenn $7 + 5 \neq 4$ ist. Dieses Prinzip der Implikation wird w:Ex falso quodlibet[5] genannt oder zu Deutsch: „Aus Falschem folgt Beliebiges.“ Demnach ist eine Implikation nur dann und genau dann falsch, wenn die Prämisse A wahr ist und die Konklusion B falsch ist. Diese Tatsache kann zu recht kontraintuitiven Aussagen führen, die aber dennoch wahr sind. Betrachte dazu folgende Verständnisfrage:

Verständnisfrage: Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

1. *Wenn Berlin in England liegt, ist Schnee schwarz.*
2. *Wenn Berlin in England liegt, ist Schnee weiß.*

5 `http://de.wikipedia.org/wiki/Ex%20falso%20quodlibet`

3. *Wenn Berlin in Deutschland liegt, ist Schnee schwarz.*
4. *Wenn Berlin in Deutschland liegt, ist Schnee weiß.*
5. *Wenn der Mond aus grünem Käse besteht, ist heute Sonntag.\antwort= Antwort: Die Aussagen (1) und (2) sind wahr, weil bereits die Prämisse „Berlin liegt in England“ falsch ist. Auch Aussage (4) ist wahr, weil sowohl die Prämisse als auch die Konklusion wahr ist. Nur Aussage (3) ist falsch (Prämisse ist wahr und Konklusion falsch). Aussage (5) ist an jedem Tag wahr.*

2.6.1. Notwendige und hinreichende Bedingungen

In der Mathematik ist es wichtig, zwischen **hinreichenden** und **notwendigen** Bedingungen zu unterscheiden. Nehme an, wir haben einen Zusammenhang $A \Rightarrow B$ wie das typische Beispiel „Wenn es regnet, ist die Straße nass.“ gegeben. Hier ist die Prämisse A eine hinreichende Bedingung für die Konklusion B. Dies bedeutet, dass das Auftreten von A hinreichend dafür ist, dass auch B auftritt. So ist bei Regen die Straße nass (Regen ist hinreichend dafür, dass die Straße nass ist). Außerdem ist die Konklusion B eine notwendige Bedingung für die Prämisse A. Dies bedeutet, dass es für das Auftreten von A notwendig ist, dass B gilt. Damit es geregnet hat, muss auf jeden Fall die Straße nass sein (eine nasse Straße ist notwendig für Regen).

$$\overbrace{\underbrace{A}_{\text{hinreichende Bedingung für } B} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{B}_{\text{notwendige Bedingung für } A}}^{\text{Implikation}}$$

Die Unterscheidung zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingung ist für dich insbesondere in der Beweisführung wichtig. Wenn du zum Beispiel eine Aussage beweisen möchtest, kannst du schauen, ob du für diese Aussage eine hinreichende Bedingung kennst, die du beweisen kannst. Und wenn du beweisen möchtest, dass eine gewisse Aussage nicht gilt, kannst du versuchen zu beweisen, dass eine für diese Aussage notwendige Bedingung nicht gilt. Beachte hierbei, dass viele mathematische Sätze in der Form einer Implikation formuliert sind (zum Beispiel „Wenn die Funktion f an x_0 differenzierbar ist und dort ein Extremum besitzt, so hat f an x_0 die Ableitung 0“).

Verständnisfrage: Sei X eine notwendige Bedingung für Y. Ist dann Y auch eine notwendige Bedingung für X oder ist sie hinreichend für X oder kann man das nicht so genau sagen?
Wenn X eine notwendige Bedingung für Y ist, so gilt $Y \Rightarrow X$. Damit ist Y hinreichend für X. Y muss aber nicht notwendig für X sein, da sonst auch $Y \Leftarrow X$ gelten müsste, was aber nicht der Fall sein muss (die Implikation ist nicht immer umkehrbar).

Verständnisfrage: Betrachte folgende Implikationsaussagen. Was sind notwendige und was hinreichende Bedingungen dafür, dass eine Zahl durch 6 teilbar ist?

1. *Ist eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar, dann ist sie auch durch 6 teilbar.*
2. *Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.*
3. *Eine durch 36 teilbare Zahl ist durch 6 teilbar.\antwort= Antwort:*
4. *Die Bedingung „Die Zahl ist durch 2 und durch 3 teilbar“ ist notwendig und hinreichend für die Teilbarkeit durch 6.*

5. *Die Bedingung „Die Zahl ist durch 3 teilbar“ ist notwendig für die Teilbarkeit durch 6.*
6. *Die Bedingung „Die Zahl ist durch 36 teilbar“ ist hinreichend für die Teilbarkeit durch 6 (Die Aussage kann auch so formuliert werden: „Wenn eine Zahl durch 36 teilbar ist, dann ist sie auch durch 6 teilbar“).*

Verständnisfrage: Es folgen einige Sätze, die dir später in dieser Buchreihe begegnen werden (die folgenden Sätze werden dir sicherlich im ersten Semester der Analysis begegnen, und du wirst sie oft benutzen müssen). Finde notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass „eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert“ in Analogie zur obigen Verständnisaufgabe.

1. *Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*
2. *Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*
3. *Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ nicht konvergiert, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auch nicht.\antwort=*

Hinweis: Um eine Lösung zu finden, kannst du zunächst obige Aussagen in eine aussagenlogische Form bringen. Wenn zum Beispiel K dafür steht, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, und N dafür steht, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, so lautet die erste Aussage $K \Rightarrow N$. Nach dem, was du im obigen Abschnitt gelernt hast, ist N eine notwendige Bedingung für K, also dass „$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist“, ist eine notwendige Bedingung dafür, dass „$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert“.

a) *Die Bedingung „$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge“ ist notwendig.*
b) *Die Bedingung „$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent“ ist hinreichend.*
c) *Die Bedingung „$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ ist konvergent“, ist notwendig.*

2.7. Äquivalenz – die Genau-dann-wenn-Verknüpfung

Wahrheitstabelle: Äquivalenz A	B	$A \Leftrightarrow B$
F	F	W
F	W	F
W	F	F
W	W	W

Der letzte Junktor, den ich dir vorstellen möchte, ist die Äquivalenz. Die Äquivalenz wird mit dem Doppelpfeil $\Leftrightarrow$ dargestellt. Die Sprechweise von $A \Leftrightarrow B$ ist dabei „Genau dann A, wenn B“, „A ist gleichwertig mit B“ oder „A ist äquivalent zu B“. Eine Aussage $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann und nur dann wahr, wenn die beiden Aussagen A und B denselben Wahrheitswert besitzen. Ist eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch, ist $A \Leftrightarrow B$ falsch.

Die Bedeutung der Aussage $A \Leftrightarrow B$ ist dabei, dass aus der Aussage A die Aussage B folgt und dass aus der Aussage B die Aussage A folgt. Dies erkennst du auch am Doppelpfeil - während bei der Äquivalenz der Pfeil von A nach B geht und umgekehrt, geht der Pfeil in der Implikation nur in eine Richtung (und zwar von der Prämisse zur Konklusion). Die Äquivalenz drückt damit eine

Gleichwertigkeit zwischen zwei Aussagen aus, da zwei in Äquivalenz stehende Aussagen immer denselben Wahrheitswert besitzen (genau so ist die Äquivalenz definiert).

Verständnisfrage: Überlege dir Beispiele für eine Äquivalenzbeziehung.
Beispiele wären: „Genau dann wenn x durch 2 teilbar ist, ist x gerade." oder „Genau dann wenn Schaltjahr ist, hat der Februar 29 Tage."

Verständnisfrage: Sei $A \Leftrightarrow B$. Ist dann A notwendige oder hinreichende Bedingung von B und wie sieht es umgekehrt aus?
Weil bei $A \Leftrightarrow B$ aus A die Aussage B folgt und umgekehrt, ist A sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für B und umgekehrt.

2.8. Bindungsreihenfolge der Junktoren (Präzedenzregeln)

Aus der Arithmetik kennst du bereits das Phänomen, dass bestimmte Operatoren stärker binden als andere. So bindet die Multiplikation $\cdot$ stärker als die Addition $+$ („Punktrechnung geht vor Strichrechnung"). Also muss man $5+4\cdot 2$ als $5+(4\cdot 2)$ lesen. Jedoch ist diese Bindungsreihenfolge in der Logik nicht immer komplett und du musst Klammern einsetzen, um dem Leser die richtige Bindungsreihenfolge zu zeigen. Folgende Bindungsreihenfolge ist aber allgemein akzeptiert:

Negation bindet stärker als Konjunktion und Disjunktion bindet stärker als Implikation und Äquivalenz

Manchmal wird auch eine vollständige Bindungsreihenfolge definiert. Diese lautet dann meistens (der am stärksten bindende Junktor steht am Anfang):

1. Negation $\neg$
2. Konjunktion
3. Disjunktion $\vee$
4. Implikation $\Rightarrow$
5. Äquivalenz $\Leftrightarrow$

So muss man nach obiger Bindungsreihenfolge die Aussage $\neg AB \Rightarrow B \vee CA$ als $((\neg A)B) \Rightarrow (B \vee (CA))$ gelesen werden. Ich empfehle dir aber (und werde dies auch im Buch umsetzen), bei der Unterscheidung der Bindung zwischen Konjunktion und Disjunktion sowie zwischen Implikation und Äquivalenz Klammern einzusetzen.

Wenn mehrere Implikationen nacheinander ohne Klammerung verwendet werden, gilt in der Literatur meistens folgende Definition:

$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$ bedeutet $A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D))$.

Verständnisfrage: Wie musst du die Klammern in folgenden Ausdrücken richtig setzen (nach der vollständigen Liste zur Bindungsreihenfolge)?

1. $A\neg B \Rightarrow C$
2. $AB \Rightarrow \neg C \Leftrightarrow A$
3. $C \vee (C \Leftrightarrow B)A|antwort=$ *Antwort:*

4. $(A(\neg B)) \Rightarrow C$
5. $((AB) \Rightarrow (\neg C)) \Leftrightarrow A$
6. $C \vee ((C \Leftrightarrow B)A)$

2.9. Wahrheitstabellen erstellen

Stell dir vor, du hättest die Aufgabe eine Wahrheitstabelle für die zusammengesetzte Aussage $(A \Rightarrow B)(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ zu erstellen. In der folgenden Tabelle ist eine Wahrheitstabelle für diese Aussage dargestellt. Da die Aussage die 3 atomaren Teilaussagen A, B und C besitzt, sind $2^3 = 8$ Zeilen notwendig (eine atomare Aussage ist eine Aussage, die nicht weiter zerlegbar ist). In den ersten 3 Spalten sind alle möglichen Belegungen für die 3 Teilaussagen A, B und C mit Wahrheitswerten aufgelistet. Überlege dir hier selbst ein Schema, in welcher Reihenfolge du die einzelnen Belegungen aufschreibst (so dass du keine Belegung vergisst und keine Belegung doppelt vorkommt). In der 4. Spalte ist fett geschrieben der resultierende Wahrheitswert der gesamten Aussage notiert. Außerdem wurden in den Spalten unter den einzelnen Junktoren die resultierenden Wahrheitswerte der zu diesem Junktor zugehörigen Teilaussagen aufgeschrieben.

A	B	C	$((A \Rightarrow B)$		$(B \Rightarrow C))$	$\Rightarrow$	$(A \Rightarrow C)$
W	W	W	W	W	W	**W**	W
W	W	F	W	F	F	**W**	F
W	F	W	F	F	W	**W**	W
W	F	F	F	F	W	**W**	F
F	W	W	W	W	W	**W**	W
F	W	F	W	F	F	**W**	W
F	F	W	W	W	W	**W**	W
F	F	F	W	W	W	**W**	W

In der folgenden Animation wird nochmal das Prinzip zur Erstellung einer Wahrheitstabelle dargestellt. Beachte dass in dieser Wahrheitstabelle die Spalten anders benannt sind als in der obigen Tabelle.

A	**B**	$\neg$**A**	$(\neg$**A**$) \vee$ **B**
W	W		
W	F		
F	W		
F	F		

Abb. 4 zentriert

<u>Verständnisfrage</u>: Erstelle die Wahrheitstabelle für die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Diese Aussage muss nach dem Prinzip der Kontraposition immer wahr sein).

A	B	$(A \Rightarrow B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg B \Rightarrow \neg A)$
W	W	W	**W**	W
W	F	F	**W**	F
F	W	W	**W**	W
F	F	W	**W**	W

3. Quantoren – Existenz- und Allaussagen

3.1. Was sind Quantoren?

Neben den Junktoren[1] gibt es noch eine zweite wichtige Gruppe von Symbolen, die **Quantoren**, mit denen sich die Aussagenlogik zur sogenannten *Prädikatenlogik* erweitern lässt. Während Junktoren Aussagen miteinander verknüpfen, legen Quantoren fest, für welche Objekte x einer Grundmenge eine Aussageform $A(x)$ gilt. Eine Aussageform (auch *Prädikat* genannt) $A(x)$ ist dabei ein sprachlich sinnvoller Ausdruck, in der die Variable x vorkommt und die durch Belegung dieser Variablen mit einem konkreten Wert in eine Aussage übergeht. So sind die Ausdrücke „x ist eine gerade Zahl" und „x ist ein Mensch" Beispiele für solche Aussageformen $A(x)$, die von der Variablen x abhängen.

Ich möchte dir den Begriff der Quantoren an einem Beispiel erklären. Stell dir dazu vor, wir untersuchen gerade reelle Zahlen. Dies bedeutet, dass alle Variablen, die wir benutzen, nur mit reellen Zahlen belegt werden sollen. Betrachte nun folgende Aussage:

Für alle x gilt, dass $x^2 \leq 0$ ist.

In diesem Beispiel ist „für alle" ein Quantor, der Allquantor. Er behauptet, dass die Aussageform „$x^2 \leq 0$" für alle Belegungen der Variablen x gültig sein soll. Wir können also folgende Struktur der obigen Aussage erkennen:

$$\underbrace{\text{Für alle}}_{\text{Allquantor}} \quad \underbrace{x}_{\text{gebundene Variable}} \quad \text{gilt, dass} \quad \underbrace{x^2 \leq 0}_{\text{Aussageform } A(x)\text{, in Abh}}$$

a ngigkeit von x ist.

Wie auch bei Junktoren, werden für Quantoren bestimmte Symbole verwendet. Für den Allquantor ist das Symbol $\forall$ am geläufigsten. So kann die obige Aussage „Für alle x gilt, dass $x^2 \leq 0$ ist." auch so geschrieben werden:

$$\forall x : x^2 \leq 0$$

Wir können aber auch andere Quantoren zur Bindung der Variablen x in der Aussageform „$x^2 < 0$" verwenden. Anstatt auszudrücken, dass die Aussageform „$x^2 < 0$" *für alle* Belegungen von x gültig ist, können wir auch sagen, dass diese Aussageform *für mindestens eine* reelle Zahl x wahr ist. Dieser Quantor „es gibt mindestens ein" wird *Existenzquantor* genannt und hat das Symbol $\exists$. So besitzt die Aussage „Es gibt mindestens ein x mit $x^2 < 0$" folgende Struktur:

1 Kapitel 2 auf Seite 9

$$\underbrace{\text{Es gibt mindestens ein}}_{\text{Existenzquantor}} \quad \underbrace{x}_{\text{gebundene Variable}} \quad \text{mit} \quad \underbrace{x^2 < 0}_{\text{Aussageform } A(x)\text{, in Abh}\ddot{}}$$

a ngigkeit von x

In der formellen Schreibweise, die du später kennen lernen wirst, wird daraus:

$$\exists x : x^2 < 0$$

3.2. Quantoren

3.2.1. Allquantor $\forall$

Allquantor	
Symbol:	$\forall$
Bedeutung:	für alle
Schreibweise:	$\forall x : A(x)$

Im vorherigen Abschnitt hast du den *Allquantor* bereits kennen gelernt. Sein Symbol ist $\forall$ (ein umgedrehtes **A** – „für **A**lle“). Die Schreibweise des Allquantors ist $\forall x : A(x)$. Dies bedeutet „Für alle x gilt $A(x)$.“ oder „Für jedes x gilt $A(x)$.“. Dabei ist $A(x)$ eine beliebige Aussageform, in der die Variable x vorkommt. In der Literatur ist auch die Schreibweise $\bigwedge_x A(x)$ zu finden, die wir aber in diesem Buch nicht verwenden werden.

Die Menge der Objekte, auf die sich der Quantor bezieht, muss eindeutig bestimmt sein (und kann sich zum Beispiel aus dem Kontext ergeben). Wenn du gerade natürliche Zahlen behandelst, so behauptet eine Aussage „$\forall x : A(x)$“ , dass die Aussageform $A(x)$ für alle Belegungen von x aus den *natürlichen Zahlen* wahr ist. Untersuchst du reelle Zahlen, so behauptet „$\forall x : A(x)$“, dass die Aussageform $A(x)$ für alle *reellen Zahlen* x zu einer wahren Aussage wird.

Wenn du die Bezugsmenge des Allquantors explizit angeben möchtest oder musst, kannst du die deutlichere Schreibweise $\forall x \in M : A(x)$ verwenden. Diese bedeutet: „Für alle x aus der Menge[2] M gilt die Aussage $A(x)$.“

Aufgabe: Überlege dir einige (mathematische) Aussagen, in denen du den Allquantor verwenden kannst und schreib diese auf.
Folgende Beispiele können mit dem Allquantor aufgeschrieben werden:

1. Für jedes Auto gilt: Es fährt oder es steht.
2. Für alle reellen Zahlen x und alle natürlichen Zahlen y ist $x + y = x \cdot y$.
3. Alle Schwäne sind weiß.

2 Kapitel 14 auf Seite 95

Frage: Wie lauten die obigen Aussagen in Quantorenschreibweise?

a) $\forall x:$ x ist ein Auto $\Rightarrow$ (x fährt $\vee$ x steht)
b) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N} : x + y = y \cdot x$
c) $\forall x:$ x ist ein Schwan $\Rightarrow$ x ist weiβ

3.2.2. Existenzquantor $\exists$

Existenzquantor	
Symbol:	$\exists$
Bedeutung:	es existiert mindestens ein
Schreibweise:	$\exists x : A(x)$

Dieser Quantor wird für Aussagen folgender Form verwendet: „Es gibt mindestens ein x, so dass $A(x)$ gilt“. Dieser Quantor heißt *Existenzquantor*. Sein Symbol ist ein umgedrehtes **E**, welches für „es **E**xistiert mindestens ein“ steht. Analog zum Allquantor haben Existenzaussagen die Form $\exists x : A(x)$. Diese Schreibweise steht für „Es gibt mindestens ein x, so dass $A(x)$ gilt.“ oder „Es existiert mindestens ein x, für welches $A(x)$ gilt“. Auch hier ist x eine Variable und $A(x)$ eine Aussageform, die von x abhängt. In der Literatur kannst du auch die Schreibweise $\bigvee_x A(x)$ finden.

Wie auch beim Allquantor muss die Bezugsmenge M des Quantors klar sein (z. B. aus dem Kontext). Muss die Bezugsmenge explizit angegeben werden, so kannst du die Schreibweise $\exists x \in M : A(x)$ verwenden. Sie bedeutet: „Es gibt mindestens ein x aus der Menge M, für welches die Aussage $A(x)$ wahr ist“.

(!) Hinweis

In der Mathematik gibt es folgende Konvention: Eine Aussage der Form „Es gibt ein ...“ ist immer als Aussage der Form „Es gibt mindestens ein...“ zu verstehen.

Beispiele/Übungsaufgabe: Übersetze folgende Aussagen in die formelle Schreibweise mit dem Existenzquantor:

1. *Es gibt eine Zahl x, so dass $x \cdot 0 = 5$ ist.*
2. *Es gibt schöne Männer.*
3. *Jeder Mensch besitzt einen Seelenverwandten.\antwort=*
4. $\exists x : x \cdot 0 = 5$
5. $\exists x :$ *x ist ein Mann x ist scḧ*
   on$\forall x :$ (x *ist ein Mensch* $\Rightarrow \exists y :$ y *ist ein Seelenverwandter von* x)

3.2.3. Eindeutiger Existenzquantor $\exists!$

Eindeutiger Existenzquantor	
Symbol:	$\exists!$
Bedeutung:	es existiert genau ein
Schreibweise:	$\exists!x : A(x)$

Den letzten Quantor, den ich dir vorstellen möchte, ist der *eindeutige Existenzquantor* $\exists!$. Die Schreibweise zu diesem Quantor (der auch *Eindeutigkeitsquantor* genannt wird) ist $\exists!x : A(x)$. Dies bedeutet soviel wie „Es gibt genau ein x, so dass die Aussageform $A(x)$ für dieses x zu einer wahren Aussage ist.“. Beachte den Unterschied zwischen dem Existenzquantor und dem eindeutigen Existenzquantor: Während beim Existenzquantor die Aussageform $A(x)$ für *mindestens* eine Belegung von x gilt, gilt beim eindeutigen Existenzquantor die Aussageform $A(x)$ für *genau* eine Belegung von x aus der Grundmenge.

Auch bei diesem Quantor muss sich die Bezugsmenge durch den Kontext ergeben. Wenn du sie explizit angeben möchtest, kannst du die Schreibweise $\exists!x \in M : A(x)$ verwenden. Sie ist eine Kurzschreibweise für $\exists!x : x \in MA(x)$.

3.3. Freie, gebundene Variablen und Aussageformen

Du hast dich vielleicht schon darüber gewundert, dass ich manchmal den Begriff „Aussage“ und den Begriff „Aussageform“ benutze, die du streng auseinanderhalten solltest. Der Unterschied liegt darin, dass Aussageformen (auch Prädikate genannt) freie Variablen besitzen, während in Aussagen keine freien Variablen vorkommen. Doch was sind freie Variablen?

3.3.1. Freie und gebundene Variablen

Freie Variablen sind Leerstellen/ Platzhalter in einem sprachlichen Ausdruck, die durch Elemente der Grundmenge ersetzt werden können. Im Gegensatz dazu können *gebundene Variablen* nicht durch Elemente der Grundmenge ersetzt werden. Dies liegt daran, dass sie schon durch Quantoren *gebunden* sind. So ist die Variable x im Ausdruck „$x \geq 23$“ frei und im Ausdruck „$\forall x : x \geq 23$“ durch den Allquantor $\forall$ gebunden. Hier noch einige Beispiele:
Beweis 1. *freie und gebundene Variablen*

- 6 $\forall x : \underbrace{x}_{\text{gebunden}} + \underbrace{y}_{\text{frei}} = 42$
- $\underbrace{x}_{\text{frei}} = 4 \Rightarrow \exists x : \underbrace{x}_{\text{gebunden}} + 4 = 8$
- $\exists x (\underbrace{y}_{\text{frei}} + \underbrace{x}_{\text{gebunden}} = 5 \forall y : \underbrace{x}_{\text{gebunden}} \cdot \underbrace{y}_{\text{gebunden}} = 8)$

Verständnisfrage: Welche der Variablen in den folgenden Ausdrücken sind frei und welche sind gebunden?

1. $a+b+c=5$
2. $a=b \vee \exists b : a=b$
3. $\forall a,b : t=a+b$

4. *$\forall x : a = 9$|antwort= Antwort:*
   - $\underbrace{a}_{frei} + \underbrace{b}_{frei} + \underbrace{c}_{frei} = 5$
   - $\underbrace{a}_{frei} = \underbrace{b}_{frei} \vee \exists b : \underbrace{a}_{frei} = \underbrace{b}_{gebunden}$
   - $\forall a, b : \underbrace{t}_{frei} = \underbrace{a}_{gebunden} + \underbrace{b}_{gebunden}$
   - $\forall x : \underbrace{a}_{frei} = 9$

3.3.2. Aussageformen (Prädikate)

Nachdem du gelernt hast, was freie und gebundene Aussagen sind, kann ich dir nun erklären, was Aussageformen sind. *Aussageformen* sind sprachliche Ausdrücke mit freien Variablen, die durch Belegung dieser Variablen mit konkreten Werten aus einer Grundmenge jeweils in eine Aussage übergehen. Vereinfacht könnte man sagen: „Aussageformen sind Ausdrücke mit freien Variablen.“

Verständnisfrage: Welche der folgenden formalen Ausdrücke sind Aussagen und welche sind Aussageformen?

1. $x + y = y + x$
2. $\forall x : x + y = y + x$
3. $\forall x \forall y : x + y = y + x$
4. $x > 0 \Rightarrow \exists x : x^2 = 4$
5. $\forall x : (x < 4 \exists y : x + y = 23)$|*antwort= Antwort:*
6. *Aussageform (x und y kommen frei im Ausdruck vor)*
7. *Aussageform (y kommt frei im Ausdruck vor)*
8. *Aussage (keine freien Variablen)*
9. *Aussageform (x kommt frei im Ausdruck vor)*
10. *Aussage (keine freien Variablen)*
    Hinweis: Der Wahrheitsgehalt der Aussagen hängt jeweils von der gewählten oder vorgegebenen Grundmenge ab.

4. Tautologien – was wahr ist, ist wahr

4.1. Tautologie

Eine **Tautologie** ist eine allgemeingültige Aussage. Dies ist eine Aussage, die aus logischen Gründen stets wahr ist (unabhängig von dem Wahrheitsgehalt ihrer Teilaussagen). Ein Beispiel dafür ist die Aussage „Es regnet oder es regnet nicht“. Da es entweder regnet oder es nicht regnet, ist diese Aussage immer wahr (unabhängig davon, ob es nun tatsächlich regnet oder nicht; also unabhängig davon, ob die Teilaussagen „Es regnet.“ bzw. „Es regnet nicht.“ wahr sind oder nicht.)

Ein weiteres Beispiel für eine Tautologie ist die Aussage „Wenn $x > 0$ und $x < 0$ ist, ist $x = 4$“. Hier ist die Prämisse der Aussage für $x \in \mathbb{R}$ nicht erfüllbar und damit ist die Implikation[1] unabhängig, ob x gleich 4 ist oder nicht, stets wahr („Aus Falschem folgt beliebiges“).

Verständnisfrage: Welche der folgenden Aussagen ist eine Tautologie?

1. *Wenn x durch 2 teilbar ist, ist x gerade.*
2. *x ist gerade oder x ist durch 2 teilbar.*
3. *x ist gerade oder x ist nicht durch 2 teilbar.\antwort=* ***Antwort:***
4. *Tautologie (Entweder die Prämisse ist falsch und damit die gesamte Implikation wahr oder die Prämisse und damit die Konklusion ist wahr und damit die Implikation wieder wahr.)*
5. *keine Tautologie (Wenn x nicht gerade ist, ist sowohl die erste als auch die zweite Teilaussage der Disjunktion falsch und damit die gesamte Aussage falsch)*
6. *Tautologie (Entweder die erste oder die zweite Teilaussage ist wahr und damit ist die Disjunktion immer wahr)*

Eine Anwendung des Begriffs einer Tautologie findest unter anderem dann, wenn du überprüfen möchtest, ob 2 Aussagen äquivalent zueinander sind oder nicht (ob also $A \Leftrightarrow B$ gilt). Zwei Aussagen A und B sind nämlich dann genau äquivalent, wenn die zusammengesetzte Aussage $A \Leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

4.1.1. Überprüfung einer Tautologie

Ich werde dir jetzt einige Möglichkeiten vorstellen, wie du überprüfen kannst, ob eine Aussage eine Tautologie ist oder nicht. All diese Möglichkeiten sollen am Beispiel der Tautologie $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ demonstriert werden (Diese Tautologie ist als w:Kontraposition[2] bekannt).

1 Kapitel 2.7 auf Seite 17
2 `http://de.wikipedia.org/wiki/Kontraposition`

Wahrheitstabelle erstellen

Eine Methode ist es, eine Wahrheitstabelle[3] für die zu untersuchende Aussage aufzustellen. Wenn in der Wahrheitstabelle nur „wahr" als resultierender Wahrheitswert auftritt, ist die untersuchte Aussage eine Tautologie. Sobald ein resultierender Wahrheitswert „falsch" ist, ist die Aussage keine Tautologie.

Aufgabe: Stelle die Wahrheitstabelle für $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ auf (Wenn diese Aussage eine Tautologie sein soll, müsste der resultierende Wahrheitswert immer W *sein).*

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
F	F	W	W	**W**
F	W	W	W	**W**
W	F	F	F	**W**
W	W	W	W	**W**

Ergebnis: Die Aussage ist eine Tautologie.

Äquivalenzumformungen verwenden

Wenn du die Tautologie einer Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ beweisen musst, kannst du versuchen die Aussage A durch bereits bekannte Äquivalenzbeziehungen in die Aussage B umzuformen. Um auf die notwendigen Umformungen zu kommen, kannst du eine ähnliche Technik benutzen wie bei den Termumformungen[4]. Du kannst die beiden Aussagen nebeneinanderschreiben und versuchen diese schrittweise auf die gleiche Aussage umzuformen.

Da Äquivalenzbeziehungen erst später in diesem Kapitel behandelt werden, kannst du das folgende Beispiel überspringen und es dir später wieder anschauen. Für das Beispiel der Kontraposition lautet der Beweis dieser Tautologie:

$$\begin{aligned} & A \Rightarrow B \\ \Leftrightarrow\quad & \neg A \vee B \\ \Leftrightarrow\quad & B \vee \neg A \\ \Leftrightarrow\quad & \neg B \Rightarrow \neg A \end{aligned}$$

Baummethode

Diese Methode ist eine Art des w:Widerspruchsbeweis[5]. Du beweist hier, dass eine Aussage A eine Tautologie ist, indem du zeigst, dass diese Aussage nie falsch sein kann, weil sich sonst ein

3 Kapitel 2.7 auf Seite 17
4 Kapitel 28.1 auf Seite 213
5 `http://de.wikipedia.org/wiki/Widerspruchsbeweis`

Widerspruch ergibt. Dabei zerlegst du die zu untersuchende Aussage schrittweise in ihre Teilaussagen und schaust dir nur diejenigen Fälle an, die zu einer falschen Aussage führen würden.

Nehmen wir an, dass $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ falsch ist. Dann muss entweder $A \Rightarrow B$ falsch sein und $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr sein oder umgekehrt. Im ersten Fall muss $A = \mathrm{W}$ und $B = \mathrm{F}$ sein. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr ist (weil für $A = \mathrm{W}$ und $B = \mathrm{F}$ die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ falsch ist). Im zweiten Fall muss $B = \mathrm{F}$ und $A = \mathrm{W}$ sein, was auch ein Widerspruch zu $A \Rightarrow B = \mathrm{W}$ ist (weil für $B = \mathrm{F}$ und $A = \mathrm{W}$ die Aussage $A \Rightarrow B$ falsch ist). Schematisch könnte man dies in einem Baum darstellen (deswegen auch der Name). Dabei stellt jeder Ast einen zu betrachtenden Fall dar:

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) : F$	
$\downarrow$	$\downarrow$
$A \Rightarrow B : \mathrm{F}$	$\neg B \Rightarrow \neg A : \mathrm{F}$
$\neg B \Rightarrow \neg A : \mathrm{W}$	$A \Rightarrow B : \mathrm{W}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$A : \mathrm{W}$	$B : \mathrm{F}$
$B : \mathrm{F}$	$A : \mathrm{W}$
$\neg B \Rightarrow \neg A : \mathrm{W}$	$A \Rightarrow B : \mathrm{W}$
$\downarrow$	$\downarrow$
x (Widerspruch)	x (Widerspruch)

4.2. Übersicht zu Tautologien

In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Äquivalenzbeziehungen aufgelistet. Auf den Beweis aller dieser Tautologien verzichte ich erst einmal (hier kannst du als Übungsaufgabe einige für dich interessante Tautologien beweisen).

4.2.1. Assoziativgesetze

Tautologie	Bedeutung
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	Bei der Disjunktion[6] und bei der Konjunktion[7] ist es egal, in welcher Weise die einzelnen Teilaussagen verknüpft werden.
$(AB)C \Leftrightarrow A(BC)$	

4.2.2. Kommutativgesetze

Tautologie	Bedeutung
$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$	Bei der Disjunktion[8] und bei der Konjunktion[9] ist es egal, in welcher Reihenfolge die einzelnen Teilaussagen verknüpft werden. (Dies ist in der natürlichen Sprache nicht unbedingt der Fall. Betrachte dazu folgende 2 Aussagen, welche in der Bedeutung einen leichten Unterschied aufweisen: „Ralf ging in die Kirche und seine Tochter starb.“ und „Seine Tochter starb und Ralf ging in die Kirche.“)

6 Kapitel 2.7 auf Seite 17
7 Kapitel 2.7 auf Seite 17
8 Kapitel 2.7 auf Seite 17
9 Kapitel 2.7 auf Seite 17

Tautologie	Bedeutung
$(AB) \Leftrightarrow (BA)$	

4.2.3. Distributivgesetze

Tautologie	Bedeutung
$A \vee (BC) \Leftrightarrow (A \vee B)(A \vee C)$	Eine Disjunktion[10] kann in eine Konjunktion[11] reingezogen werden und umgekehrt.
$A(B \vee C) \Leftrightarrow (AB) \vee (AC)$	

4.2.4. Absorptionsgesetze

Tautologie	Bedeutung
$A(A \vee B) \Leftrightarrow A$	wichtige Gesetze zur Vereinfachung von Aussagen
$A \vee (AB) \Leftrightarrow A$	

4.2.5. Idempotenzgesetze

Tautologie	Bedeutung
$AA \Leftrightarrow A$	wichtige Gesetze zur Vereinfachung von Aussagen
$A \vee A \Leftrightarrow A$	

4.2.6. Gesetze von ausgeschlossenen Dritten

Tautologie	Bedeutung
$A \neg A \Leftrightarrow$ F	wichtige Gesetze zur Vereinfachung von Aussagen
$A \vee \neg A \Leftrightarrow$ W	

4.2.7. Darstellung von Implikation und Äquivalenz

Tautologie	Bedeutung
$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$	Mit Hilfe dieser Gesetze kann die Implikation[12] und die Äquivalenz[13] auf Aussagen mit anderen Junktoren zurückgeführt werden. So können bestimmte Aufgaben gelöst werden (wie: Finden sie die Negation der Implikation).
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)(B \Rightarrow A)$	
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)(A \vee \neg B)$	
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	Prinzip der Kontraposition (Diese Äquivalenz kann insbesondere für Beweise verwendet werden)

10 Kapitel 2.7 auf Seite 17
11 Kapitel 2.7 auf Seite 17
12 Kapitel 2.7 auf Seite 17
13 Kapitel 2.7 auf Seite 17

4.2.8. Gesetze zur Negation einer Aussage

De Morgansche Regeln

Tautologie	Bedeutung
$\neg(AB) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	Bei der Negation einer Und- bzw. Oder-Verknüpfung wird die Negation reingeklammert und die Klammer aufgelöst. Aus einem "Und" wird ein "Oder" und umgekehrt.
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \neg B$	

Negation von Implikation und Äquivalenz

Tautologie	Bedeutung
$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \neg B$	
$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow B)$	

Negation von quantizierten Aussagen

Tautologie	Bedeutung
$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$	
$\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$	
$\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$	
$\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$	

4.2.9. Gesetze mit W und F und zur doppelten Verneinung

Tautologie	Bedeutung
$A\mathrm{W} \Leftrightarrow A$	wichtige Gesetze zum Vereinfachen von Aussagen
$A \vee \mathrm{W} \Leftrightarrow \mathrm{W}$	
$A\mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$	
$A \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow A$	
$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	Doppelte Verneinung ist wieder die Ausgangsaussage.

4.2.10. Äquivalenzen über quantifizierte Aussagen

Tautologie	Bedeutung
$(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x : \neg A(x))$	Aussagen mit dem Allquantor[14] können durch den Existenzquantor[15] ausgedrückt werden und umgekehrt.
$(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \neg(\forall x : \neg A(x))$	
$\forall x : \forall y : A(x,y) \Leftrightarrow \forall y : \forall x : A(x,y)$	Allquantoren[16] sind untereinander vertauschbar.

14 Kapitel 3.1 auf Seite 23
15 Kapitel 3.1 auf Seite 23
16 Kapitel 3.1 auf Seite 23

Tautologie	Bedeutung
$\exists x : \exists y : A(x,y) \Leftrightarrow \exists y : \exists x : A(x,y)$	Existenzquantoren[17] sind untereinander vertauschbar.
$(\forall x : A(x))\,(\forall x : B(x)) \Leftrightarrow \forall x : (A(x) B(x))$	Allquantoren[18] können aus Konjunktionen[19] rausgezogen werden.
$(\exists x : A(x)) \vee (\exists x : B(x)) \Leftrightarrow \exists x : (A(x) \vee B(x))$	Existenzquantoren[20] können aus Disjunktionen[21] rausgezogen werden.

4.2.11. Implikationen über quantifizierte Aussagen

Tautologie	Bedeutung
$(\forall x : A(x)) \vee (\forall x : B(x)) \Rightarrow \forall x : (A(x) \vee B(x))$	
$\exists x : (A(x) B(x)) \Rightarrow (\exists x : A(x))\,(\exists x : B(x))$	
$\forall x : (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x : A(x) \Rightarrow \forall x : B(x))$	
$\forall x : (A(x) \Leftrightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x : A(x) \Leftrightarrow \forall x : B(x))$	
$\exists x : \forall y : A(x,y) \Rightarrow \forall y : \exists x : A(x,y)$	

Hinweis

In der obigen Tabelle sind die Implikationen nicht umkehrbar.

17 Kapitel 3.1 auf Seite 23
18 Kapitel 3.1 auf Seite 23
19 Kapitel 2.7 auf Seite 17
20 Kapitel 3.1 auf Seite 23
21 Kapitel 2.7 auf Seite 17

5. Anwendungen der Aussagenlogik

Nachdem ich dir in den letzten Kapiteln das Werkzeug der formalen Logik vorgestellt habe, möchte ich dir nun zeigen, wie du dieses Werkzeug auch in der Mathematik einsetzen kannst.

5.1. Übersetzung von Aussagen: natürliche Sprache <=> formale Sprache

Zunächst möchte ich dir zeigen, wie du in einer natürlichen Sprache formulierte Aussagen in die formale Schreibweise der Aussagenlogik übersetzen kannst und umgekehrt. Hierbei kannst du ähnlich vorgehen, wie du beim Lernen einer Fremdsprache deine Texte übersetzt: Die einzelnen Wörter und Satzfragmente deiner Aussage in natürlicher Sprache übersetzt du in die dazu äquivalente Form der Aussagenlogik und umgekehrt. Die folgende Vokabelliste hilft dir dabei.

5.1.1. Vokabelliste

<table>
<tr><th>natürliche Sprache</th><th>formale Schreibweise</th></tr>
<tr><td>nicht A</td><td>$\neg A$</td></tr>
<tr><td>A und B</td><td>AB</td></tr>
<tr><td>A oder B *</td><td>$A \vee B$</td></tr>
<tr><td>Wenn A, dann B</td><td rowspan="6">$A \Rightarrow B$</td></tr>
<tr><td>B dann, wenn A</td></tr>
<tr><td>Aus A folgt B</td></tr>
<tr><td>A impliziert B</td></tr>
<tr><td>A ist hinreichend für B</td></tr>
<tr><td>B ist notwendig für A</td></tr>
<tr><td>Genau dann A, wenn B</td><td rowspan="5">$A \Leftrightarrow B$</td></tr>
<tr><td>Dann und nur dann A, wenn B</td></tr>
<tr><td>A ist gleichwertig mit B</td></tr>
<tr><td>A ist äquivalent zu B</td></tr>
<tr><td>A ist notwendig und hinreichend für B</td></tr>
<tr><td>Für alle x ist $A(x)$</td><td rowspan="3">$\forall x : A(x)$</td></tr>
<tr><td>Jedes x erfüllt $A(x)$</td></tr>
<tr><td>Es ist $A(x)$ für alle x</td></tr>
<tr><td>Für alle x aus M ist $A(x)$</td><td rowspan="3">$\forall x \in M : A(x)$</td></tr>
<tr><td>Jedes x der Menge M erfüllt $A(x)$</td></tr>
<tr><td>Es ist $A(x)$ für alle $x \in M$</td></tr>
<tr><td>Es gibt ein x mit $A(x)$</td><td rowspan="2">$\exists x : A(x)$</td></tr>
<tr><td>Es existiert ein x, so dass $A(x)$ gilt</td></tr>
</table>

natürliche Sprache	**formale Schreibweise**
Für mindestens ein x gilt $A(x)$	$\exists x \in M : A(x)$
Es gibt ein x aus M mit $A(x)$	
Für mindestens ein $x \in M$ gilt $A(x)$	
Es gibt genau ein x mit $A(x)$	$\exists! x : A(x)$
Es existiert genau ein x, so dass $A(x)$ gilt	
Für genau ein x gilt $A(x)$	
Es gibt genau ein x aus M mit $A(x)$	$\exists! x \in M : A(x)$
Für genau ein $x \in M$ gilt $A(x)$	

* Hier ist „oder“ als „und/oder“ zu verstehen

5.1.2. Beispiele

Übersetzung von formaler in natürliche Sprache

Ich möchte dir an Beispielen zeigen, wie du die obige Vokabelliste verwenden kannst, um Aussagen aus der formalen in die natürliche Sprache zu übersetzen. Das erste Beispiel zeigt dies für die Aussage „$a < bb < c \Rightarrow a < c$“:

$$a < b \land b < c \Rightarrow a < c$$

Abb. 5

Das nächste Beispiel zeigt dir die schrittweise Übersetzung der Aussage „$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$“ in die Aussage „Für jede reelle Zahl x gibt es eine reelle Zahl y mit $x + y = 0$“:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$$

Abb. 6

Übersetzung von natürlicher in formale Sprache

Bei der Übersetzung einer Aussage aus natürlicher Sprache in die formale Schreibweise gehst du die umgekehrte Richtung der obigen beiden Beispiele. Auch kannst du deine Aussage mit Hilfe der Vokabelliste schrittweise übersetzen. Gegebenenfalls musst du deine Aussage umformulieren, damit du Regeln aus der Vokabelliste anwenden kannst. Das folgende Beispiel demonstriert dir eine solche Übersetzung:

Für jede differenzierbare Funktion f gilt: $f'(x) = 0$ ist ein notwendiges Kriterium dafür, dass $f(x)$ ein Extremum ist.

Abb. 7

5.1.3. Übungsaufgaben

<u>*Übungsaufgabe/Beispiele*</u>*: Übersetze folgende Aussagen der formalen Aussagenlogik in die natürliche Sprache*

- $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x + y = x$
- $a > 0 b > 0 \Rightarrow a + b > 0$
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$|*antwort=*

$$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x + y = x$$
$$\downarrow$$
Es gibt ein $y \in \mathbb{R}$, so dass $\forall x \in \mathbb{R} : x + y = x$.

- $$\downarrow$$

Es gibt ein $y \in \mathbb{R}$, so dass fur alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x + y = x$.
$$\downarrow$$
Es gibt eine reelle Zahl y, so dass fur alle reellen Zahlen x die Gleichung $x + y = x$ erfullt ist.

$$a > 0 b > 0 \Rightarrow a + b > 0$$
$$\downarrow$$

- *Wenn $a > 0 b > 0$ ist, dann ist $a + b > 0$.*

$$\downarrow$$
Wenn $a > 0$ und $b > 0$ ist, dann ist $a + b > 0$.

- $$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
$$\downarrow$$
Für alle $\varepsilon > 0$ *gilt:* $\exists \delta > 0 : \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$
$$\downarrow$$
Für alle $\varepsilon > 0$ *gilt: Es gibt ein* $\delta > 0$*, so dass* $\forall x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$
$$\downarrow$$
Für alle $\varepsilon > 0$ *gilt: Es gibt ein* $\delta > 0$*, so dass für alle* $x, y \in D$ *gilt:* $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$
$$\downarrow$$
Für alle $\varepsilon > 0$ *gilt: Es gibt ein* $\delta > 0$*, so dass für alle* $x, y \in D$ *gilt: Wenn* $|x - y| < \delta$ *ist, dann ist* $|f(x) - f(y)| <$
$$\downarrow$$
Für alle $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$*, so dass für alle* $x, y \in D$ *mit* $|x - y| < \delta$ *gilt* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Übungsaufgabe/Beispiel: Übersetze folgende Aussagen der natürlichen Sprache in die formale Schreibweise der Aussagenlogik

- *Für alle* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $n \geq N$ *die Ungleichung* $|a - a(n)| < \varepsilon$ *erfüllt ist.*
- *Für alle* $\varepsilon > 0$ *und* $x \in D$ *gibt es ein* $\delta > 0$*, so dass* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ *für alle* $y \in D$ *mit* $|x - y| < \delta$.
- *Für jeden Menschen gibt es einen anderen, der ihn liebt.\antwort=*
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a - a(n)| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in D : \exists \delta > 0 : \forall y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
- $\forall x :$ *x ist ein Mensch* $\Rightarrow \exists y :$ *y ist ein Mensch y liebt x*

5.1.4. Häufige Fehler beim Übersetzen

Aussage in natürliche Sprache	**falsche Übersetzung**	**richtige Übersetzung**	**Erklärung**
x und y sind reelle Zahlen	$xy \in \mathbb{R}$	$x, y \in \mathbb{R}$	Der Junktor kann *nur* Aussagen miteinander verbinden.

5.2. Aussagen negieren

Einen Vorteil der formalen Schreibweise möchte ich dir nun vorstellen. Die Negation von Aussagen ist nämlich in der formalen Schreibweise einfacher, als wenn eine in der natürlichen Sprache formulierte Aussage negiert werden soll. Dies liegt daran, dass Aussagen in der formalen Schreibweise durch einfache Umformungsregeln negiert werden können. Wenn jedoch eine Aussage in der natürlichen Sprache vorliegt, muss man seine Intuition verwenden, um sie zu negieren. Leider sind nicht alle Aussagen intuitiv einfach zu negieren. Vor allem dann nicht, wenn sie komplizierter sind. Versuche einmal folgende Aussagen zu negieren:

Frage: Negiere folgende Aussagen:

- *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|a - a(n)| < \varepsilon$ erfüllt ist.*
- *Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $x \in D$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$.*
- *Für jeden Menschen gibt es einen anderen, der ihn liebt.\antwort=Auflösung später.*

5.2.1. Umformungsregeln zum Negieren

Wie ich dir bereits gesagt habe, gibt es Regeln, wie man Aussagen in der formalen Schreibweise negieren kann. Diese Regeln sind in der nachfolgenden Tabelle dargestellt

zu bestimmende Negation	**umgeformte Aussage**
$\neg(\neg A)$	A
$\neg(AB)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A)(\neg B)$
$\neg(A \Rightarrow B)$	$A(\neg B)$
$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \Leftrightarrow (\neg B)$
$\neg(\forall x : A(x))$	$\exists x : \neg A(x)$
$\neg(\forall x \in M : A(x))$	$\exists x \in M : \neg A(x)$
$\neg(\exists x : A(x))$	$\forall x : \neg A(x)$
$\neg(\exists x \in M : A(x))$	$\forall x \in M : \neg A(x)$

Wieso sind so die Umformungsregeln definiert? Dies liegt daran, dass die Aussagen der linken Spalte äquivalent[1] zu den Aussagen der rechten Spalte sind. Dies bedeutet, dass die Aussagen der linken Spalte dann und genau dann wahr sind, wenn die dementsprechende Aussage der rechten Spalte wahr sind.

Um nun eine in natürlicher Sprache gegebene Aussage zu negieren, kannst du folgendermaßen vorgehen:

Negation einer Aussage in nat*u*rlicher ¨Sprache.
$\downarrow$ *U*bers¨etzung
Negation einer Aussage in formaler Sprache.
$\downarrow$ schrittweise Anwendung der Umformungsregeln
negierte Aussage in formaler Sprache.
$\downarrow$ *U*bers¨etzung
negierte Aussage in nat*u*rlicher ¨Sprache.

1 Kapitel 2.7 auf Seite 17

5.2.2. Beispiele

Betrachten wir die Aussage

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|a - a(n)| < \varepsilon$ erfüllt ist.

Diese Aussage solltest du bereits oben negieren. Zum Negieren der Aussage gehen wir schrittweise vor

Beispiel/Übungsaufgabe: Negiere folgende Aussagen

- *Für alle $\varepsilon > 0$ und $x \in D$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$.*
- *Für jeden Menschen gibt es einen anderen, der ihn liebt.*\antwort=
  Zur ersten Aussage:

Negation der Aussage: Für alle $\varepsilon > 0$ und $x \in D$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in D$ mit $|x$

$\downarrow$ *Übersetzung in formale Schreibweise*

$\neg\,(\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in D : \exists \delta > 0 : \forall y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

$\downarrow$ *Umformungsregel:* $\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$

$\exists \varepsilon > 0 : \neg\,(\forall x \in D : \exists \delta > 0 : \forall y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

$\downarrow$ *Umformungsregel:* $\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$

$\exists \varepsilon > 0 : \exists x \in D : \neg\,(\exists \delta > 0 : \forall y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

$\downarrow$ *Umformungsregel:* $\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$

$\exists \varepsilon > 0 : \exists x \in D : \forall \delta > 0 : \neg\,(\forall y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

$\downarrow$ *Umformungsregel:* $\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$

$\exists \varepsilon > 0 : \exists x \in D : \forall \delta > 0 : \exists y \in D : \neg\,(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

$\downarrow$ *Umformungsregel:* $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \neg B$

$\exists \varepsilon > 0 : \exists x \in D : \forall \delta > 0 : \exists y \in D : |x - y| < \delta \neg\,(|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

$\downarrow$ *Umformungsregel:* $\neg(|f(x) - f(y)| < \varepsilon) \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$

$\exists \varepsilon > 0 : \exists x \in D : \forall \delta > 0 : \exists y \in D : |x - y| < \delta |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$

$\downarrow$ *Übersetzung in natürliche Sprache*

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und ein $x \in D$, so dass für alle $\delta > 0$ es ein $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ gibt.

Zur zweiten Aussage:

Negation der Aussage: Fur jeden Menschen gibt es einen anderen, der ihn liebt.

$\downarrow$ *Ubersetzung in formale Schreibweise*

$\neg(\forall x : x \text{ ist ein Mensch } \Rightarrow \exists y : y \text{ ist ein Mensch } y \text{ liebt } x)$

$\downarrow$ *Umformungsregel:* $\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$

$\exists x : \neg(x \text{ ist ein Mensch } \Rightarrow \exists y : y \text{ ist ein Mensch } y \text{ liebt } x)$

$\downarrow$ *Umformungsregel:* $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \neg B$

$\exists x : x \text{ ist ein Mensch } \neg(\exists y : y \text{ ist ein Mensch } y \text{ liebt } x)$

$\downarrow$ *Umformungsregel:* $\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$

$\exists x : x \text{ ist ein Mensch } \forall y : \neg(y \text{ ist ein Mensch } y \text{ liebt } x)$

$\downarrow$ *Umformungsregel:* $\neg(AB) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\exists x : x \text{ ist ein Mensch } \forall y : \neg(y \text{ ist ein Mensch }) \vee \neg(y \text{ liebt } x)$

$\downarrow$ *Ubersetzung in naturliche Sprache*

Es gibt einen Menschen, den kein Mensch liebt.

5.3. Substitution von Terme für Variable

Ich möchte dir auch zeigen, wie du Variablen durch andere aussagenlogische Ausdrücke ersetzen kannst. Wichtig ist hier nur zu wissen, dass du dabei *nur und wirklich nur* freie Variablen durch den entsprechenden Term ersetzen darfst. Gebundene und quantifizierte Variablen muss du unangetastet lassen. Beispiel

$x + y = 7 \cdot x \exists x : x = 0$

|

Substitution: $x := y + 8$

$\downarrow$

$(y+8) + y = 7 \cdot (y+8) \exists x : x = 0$

Verständnisfrage: Wie lauten folgende Aussageformen bzw. Aussagen nach der Substitution?

1. $x + y = y + x$ *für die Substitution* $x := 6$
2. $\forall x, y : x + y = y + x$ *für die Substitution* $x := 6$
3. $x + x = y \cdot x$ *für die Substitution* $x := y$
4. $a = b + c$ *für die Substitution* $x := a + b$|antwort= *Antwort:*
5. $6 + y = y + 6$
6. $\forall x, y : x + y = y + x$
7. $y + y = y \cdot y$
8. $a = b + c$

Verständnisfrage: Wieso können sich Aussagen durch eine Substitution nicht ändern?
Weil Aussagen per Definition keine freie Variablen besitzen und nur freie Variable substituiert werden, bleiben Aussagen bei einer Substitution unverändert.

6. Zusammenfassung

__FORCETOC__

Mind Map

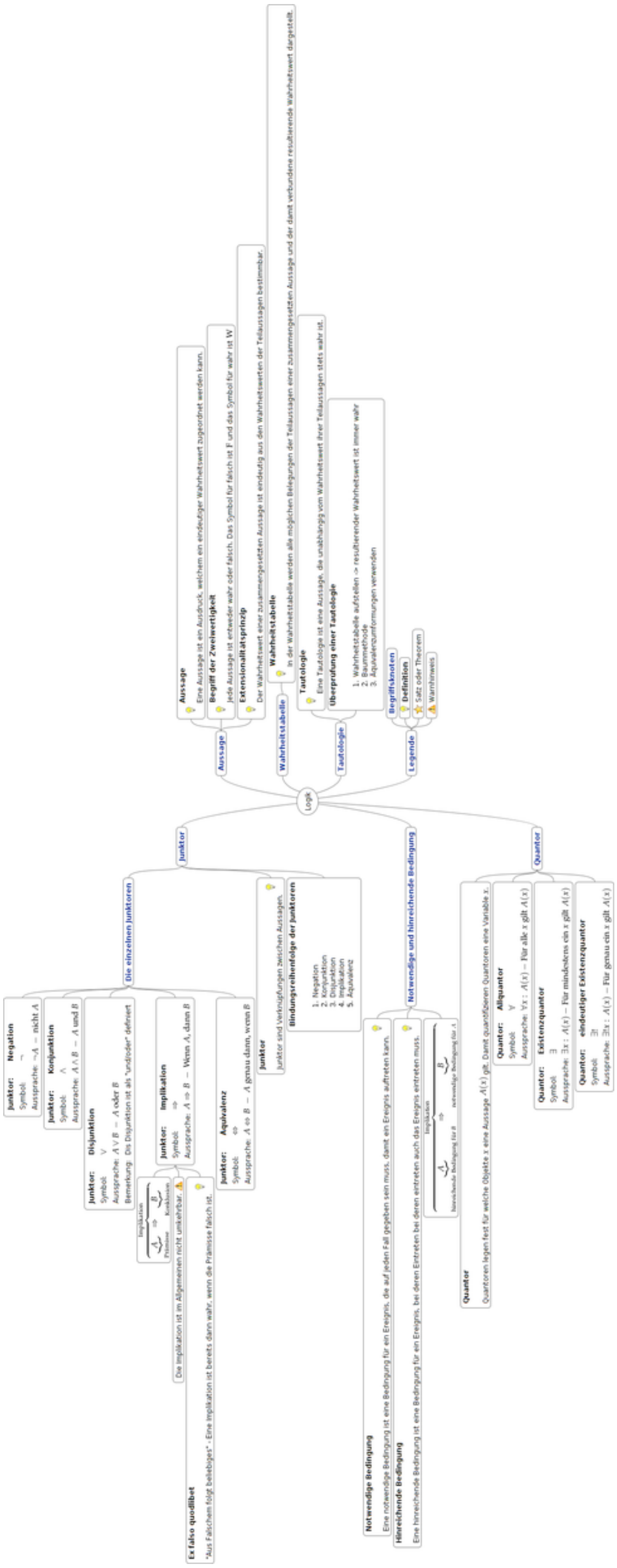

Logik
Junktor
Die einzelnen Junktoren
Junktor: Negation
Symbol: ¬
Aussprache: ¬A – nicht A
Junktor: Konjunktion
Symbol: ∧
Aussprache: A ∧ B – A und B
Junktor: Disjunktion
Symbol: ∨
Aussprache: A ∨ B – A oder B
Bemerkung: Die Disjunktion ist als "und/oder" definiert
Implikation
Prämisse
Konklusion
Die Implikation ist im Allgemeinen nicht umkehrbar.
Junktor: Implikation
Symbol: ⇒
Aussprache: A ⇒ B – Wenn A, dann B
Ex falso quodlibet
"Aus Falschem folgt beliebiges" - Eine Implikation ist bereits dann wahr, wenn die Prämisse falsch ist.
Junktor: Äquivalenz
Symbol: ⇔
Aussprache: A ⇔ B – A genau dann, wenn B
Junktor
Junktor sind Verknüpfungen zwischen Aussagen.
Bindungsreihenfolge der Junktoren
1. Negation
2. Konjunktion
3. Disjunktion
4. Implikation
5. Äquivalenz
Notwendige und hinreichende Bedingung
Notwendige Bedingung
Eine notwendige Bedingung ist eine Bedingung für ein Ereignis, die auf jeden Fall gegeben sein muss, damit ein Ereignis auftreten kann.
Hinreichende Bedingung
Eine hinreichende Bedingung ist eine Bedingung für ein Ereignis, bei deren Eintreten bei deren eintreten auch das Ereignis eintreten muss.
Implikation
hinreichende Bedingung für B
notwendige Bedingung für A
Quantor
Quantor
Quantoren legen fest für welche Objekte x eine Aussage A(x) gilt. Damit quantifizieren Quantoren eine Variable x.
Quantor: Allquantor
Symbol: ∀
Aussprache: ∀x : A(x) – Für alle x gilt A(x)
Quantor: Existenzquantor
Symbol: ∃
Aussprache: ∃x : A(x) – Für mindestens ein x gilt A(x)
Quantor: eindeutiger Existenzquantor
Symbol: ∃!
Aussprache: ∃!x : A(x) – Für genau ein x gilt A(x)
Aussage
Aussage
Eine Aussage ist ein Ausdruck, welchem ein eindeutiger Wahrheitswert zugeordnet werden kann.
Begriff der Zweiwertigkeit
Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch. Das Symbol für falsch ist F und das Symbol für wahr ist W
Extensionalitätsprinzip
Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage ist eindeutig aus den Wahrheitswerten der Teilaussagen bestimmbar.
Wahrheitstabelle
Wahrheitstabelle
In der Wahrheitstabelle werden alle möglichen Belegungen der Teilaussagen einer zusammengesetzten Aussage und der damit verbundene resultierende Wahrheitswert dargestellt.
Tautologie
Tautologie
Eine Tautologie ist eine Aussage, die unabhängig vom Wahrheitswert ihrer Teilaussagen stets wahr ist.
Überprüfung einer Tautologie
1. Wahrheitstabelle aufstellen -> resultierender Wahrheitswert ist immer wahr
2. Baummethode
3. Äquivalenzumformungen verwenden
Legende
Begriffsknoten
Definition
Satz oder Theorem
Warnhinweis

Abb. 10

6.1. Wahrheitstabellen der Junktoren

Wahrheitstabelle: Negation A	$\neg A$
F	W
W	F

Wahrheitstabelle: Konjunktion A	B	AB
F	F	F
F	W	F
W	F	F
W	W	W

Wahrheitstabelle: Disjunktion A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	W	W
W	F	W
W	W	W

Wahrheitstabelle: Implikation A	B	$A \Rightarrow B$
F	F	W
F	W	W
W	F	F
W	W	W

Wahrheitstabelle: Äquivalenz A	B	$A \Leftrightarrow B$
F	F	W
F	W	F
W	F	F
W	W	W

6.2. Tautologien

Name der Umformungsregeln	**Tautologie**	**Bedeutung**

Name der Umformungsregeln	Tautologie	Bedeutung
Assoziativgesetze	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ $(AB)C \Leftrightarrow A(BC)$	Bei der Disjunktion[1] und bei der Konjunktion[2] ist es egal, in welcher Weise die einzelnen Teilaussagen geklammert werden.
Kommutativgesetze	$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ $(AB) \Leftrightarrow (BA)$	Bei der Disjunktion[3] und bei der Konjunktion[4] ist es egal, in welcher Reihenfolge die einzelnen Teilaussagen verknüpft werden.
Distributivgesetze	$A \vee (BC) \Leftrightarrow (A \vee B)(A \vee C)$ $A(B \vee C) \Leftrightarrow (AB) \vee (AC)$	Eine Disjunktion[5] kann in eine Konjunktion[6] umgewandelt werden und umgekehrt.
Absorptionsgesetze	$A(A \vee B) \Leftrightarrow A$ $A \vee (AB) \Leftrightarrow A$	
Idempotenzgesetze	$AA \Leftrightarrow A$ $A \vee A \Leftrightarrow A$	
Gesetze vom ausgeschlossenen Dritten	$A \neg A \Leftrightarrow \mathrm{F}$ $A \vee \neg A \Leftrightarrow \mathrm{W}$	
Darstellung von Implikation und Äquivalenz	$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)(B \Rightarrow A)$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)(A \vee \neg B)$	Mit Hilfe dieser Gesetze kann die Implikation[7] und die Äquivalenz[8] auf Aussagen mit anderen Junktoren zurückgeführt werden. So können bestimmte Aufgaben gelöst werden (wie: Finden sie die Negation der Implikation).
	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	Prinzip der Kontraposition (Diese Äquivalenz kann insbesondere für Beweise verwendet werden)
Negation von zusammengesetzten Aussagen	$\neg(AB) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \neg B$ $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \neg B$ $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow B)$	Bei der Negation einer Und- bzw. Oder-Verknüpfung wird die Negation in die Klammer gesetzt und das entsprechende Symbol der Verknüpfung umgedreht.
Negation quantifizierter Aussagen	$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$ $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$ $\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$ $\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$	
Gesetze mit „wahr“ und „falsch“	$A\mathrm{W} \Leftrightarrow A$ $A \vee \mathrm{W} \Leftrightarrow \mathrm{W}$ $A\mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$ $A \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow A$	
Doppelte Verneinung	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	Doppelte Verneinung ist wieder die Ausgangsaussage.

1 Kapitel 2.7 auf Seite 17
2 Kapitel 2.7 auf Seite 17
3 Kapitel 2.7 auf Seite 17
4 Kapitel 2.7 auf Seite 17
5 Kapitel 2.7 auf Seite 17
6 Kapitel 2.7 auf Seite 17
7 Kapitel 2.7 auf Seite 17
8 Kapitel 2.7 auf Seite 17

Name der Umformungsregeln	Tautologie	Bedeutung
Äquivalenzen zu quantifizierte Aussagen	$(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x : \neg A(x))$	Aussagen mit dem Allquantor[9] können durch den Existenzquantor[10] ausgedrückt werden und umgekehrt.
	$(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \neg(\forall x : \neg A(x))$	
	$\forall x : \forall y : A(x,y) \Leftrightarrow \forall y : \forall x : A(x,y)$	Allquantoren[11] sind untereinander vertauschbar.
	$\exists x : \exists y : A(x,y) \Leftrightarrow \exists y : \exists x : A(x,y)$	Existenzquantoren[12] sind untereinander vertauschbar.
	$(\forall x : A(x))(\forall x : B(x)) \Leftrightarrow \forall x : (A(x)B(x))$	Allquantoren[13] können aus Konjunktionen[14] rausgezogen werden.
	$(\exists x : A(x)) \vee (\exists x : B(x)) \Leftrightarrow \exists x : (A(x) \vee B(x))$	Existenzquantoren[15] können aus Disjunktionen[16] rausgezogen werden.
Implikation zu quantifizierten Aussagen	$(\forall x : A(x)) \vee (\forall x : B(x)) \Rightarrow \forall x : (A(x) \vee B(x))$	Implikationen sind im Allgemeinen nicht umkehrbar
	$\exists x : (A(x)B(x)) \Rightarrow (\exists x : A(x))(\exists x : B(x))$	
	$\forall x : (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x : A(x) \Rightarrow \forall x : B(x))$	
	$\forall x : (A(x) \Leftrightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x : A(x) \Leftrightarrow \forall x : B(x))$	
	$\exists x : \forall y : A(x,y) \Rightarrow \forall y : \exists x : A(x,y)$	

6.3. Vokabelliste

natürliche Sprache	formale Schreibweise
nicht A	$\neg A$
A und B	AB
A oder B *	$A \vee B$
Wenn A, dann B	$A \Rightarrow B$
B dann, wenn A	
Aus A folgt B	
A impliziert B	
A ist hinreichend für B	
B ist notwendig für A	

9 Kapitel 3.1 auf Seite 23
10 Kapitel 3.1 auf Seite 23
11 Kapitel 3.1 auf Seite 23
12 Kapitel 3.1 auf Seite 23
13 Kapitel 3.1 auf Seite 23
14 Kapitel 2.7 auf Seite 17
15 Kapitel 3.1 auf Seite 23
16 Kapitel 2.7 auf Seite 17

natürliche Sprache	**formale Schreibweise**
Genau dann A, wenn B	
Dann und nur dann A, wenn B	
A ist gleichwertig mit B	$A \Leftrightarrow B$
A ist äquivalent zu B	
A ist notwendig und hinreichend für B	
Für alle x ist $A(x)$	
Jedes x erfüllt $A(x)$	$\forall x : A(x)$
Es ist A(x) für alle x	
Für alle x aus M ist $A(x)$	
Jedes x der Menge M erfüllt $A(x)$	$\forall x \in M : A(x)$
Es ist A(x) für alle $x \in M$	
Es gibt ein x mit $A(x)$	
Es existiert ein x, so dass $A(x)$ gilt	$\exists x : A(x)$
Für mindestens ein x gilt $A(x)$	
Es gibt ein x aus M mit $A(x)$	$\exists x \in M : A(x)$
Für mindestens ein $x \in M$ gilt $A(x)$	
Es gibt genau ein x mit $A(x)$	
Es existiert genau ein x, so dass $A(x)$ gilt	$\exists! x : A(x)$
Für genau ein x gilt $A(x)$	
Es gibt genau ein x aus M mit $A(x)$	$\exists! x \in M : A(x)$
Für genau ein $x \in M$ gilt $A(x)$	

* Hier ist „oder“ als „und/oder“ zu verstehen

6.4. Umformungsregeln zur Negation

zu bestimmende Negation	**umgeformte Aussage**
$\neg(\neg A)$	A
$\neg(AB)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A)(\neg B)$
$\neg(A \Rightarrow B)$	$A(\neg B)$
$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \Leftrightarrow (\neg B)$
$\neg(\forall x : A(x))$	$\exists x : \neg A(x)$
$\neg(\forall x \in M : A(x))$	$\exists x \in M : \neg A(x)$
$\neg(\exists x : A(x))$	$\forall x : \neg A(x)$
$\neg(\exists x \in M : A(x))$	$\forall x \in M : \neg A(x)$

Teil II.

Beweise führen

7. Was sind Beweise?

__FORCETOC__

7.1. Was sind Beweise?

Beweise sind fehlerfreie Herleitungen mathematischer Sätze aus Axiomen und bereits bewiesenen Aussagen. Sie bestehen aus endlich vielen Teilschritten, wobei bei jedem Teilschritt streng logisch eine neue Aussage aus den vorhergehenden Aussagen geschlossen wird. Beweise spielen damit eine sehr wichtige Rolle in der Mathematik, denn jeder neuer Satz einer Theorie muss durch einen Beweis begründet werden. Sätze zu beweisen ist damit eine der Hauptaufgaben (wenn nicht die Hauptaufgabe) eines Mathematikers.

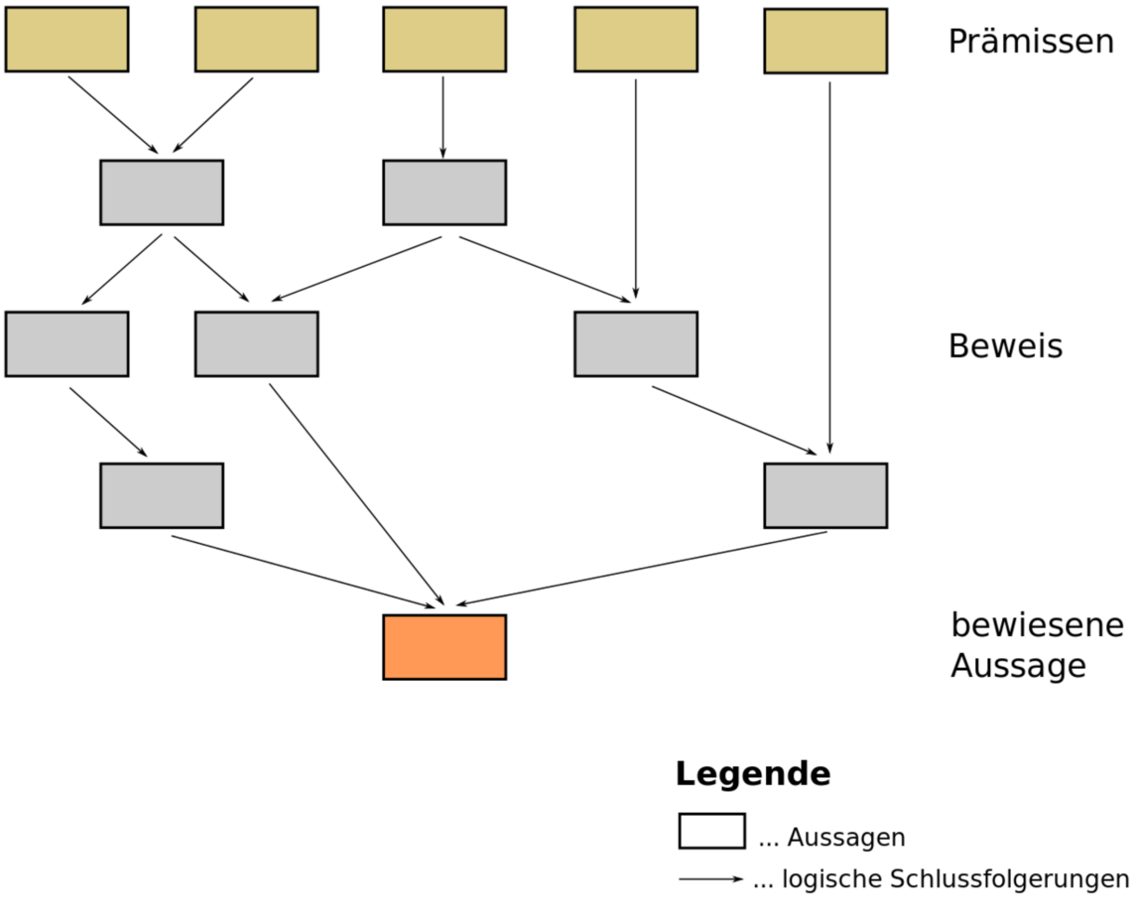


Abb. 11 Aufbau eines Beweises

Wie ist ein Beweis aufgebaut? Am Anfang eines Beweises stehen seine *Prämissen*. Dies sind Aussagen[1], die entweder Axiome der Theorie, bereits bewiesene Sätze oder Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes sind. Dabei kommt es auf die Art[2] des Satzes an, wie die einzelnen Voraussetzungen des Satzes konkret aussehen. Aus diesen Prämissen werden nun durch logische Schlussfolgerungen weitere Aussagen hergeleitet, aus denen wiederum durch logische Schlussfolgerungen neue Aussagen hergeleitet werden, usw. Am Ende dieser Herleitungen steht die zu beweisende Aussage. Durch einen solchen Beweis (der in der rechten Abbildung skizziert ist) hat man nun folgende Aussage bewiesen:

<Pr¨

amissen> $\Rightarrow$ <zu beweisende Aussage>

Wie können logische Schlussfolgerungen aussehen? Stell dir vor, du hast bereits die Implikation[3] „Wenn A, dann B“ als Satz in deiner Theorie bewiesen oder es ist ein Axiom deiner Theorie oder eine Tautologie[4]. Stell dir außerdem vor, du hast die Aussage A bereits hergeleitet oder sie ist eine Prämisse deines Beweises. Da nun sowohl die Aussage A als auch die Aussage „Wenn A, dann B“ gilt, kannst du dir aus beiden Aussagen die Aussage B logisch erschließen und deinem Beweis hinzufügen.

Neben Implikationen können auch Äquivalenzen[5] zur logischen Schlussfolgerung herangezogen werden. Denn wenn eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ gilt, so gilt sowohl die Implikation $A \Rightarrow B$ als auch die Implikation $B \Rightarrow A$, die für logische Schlussfolgerungen nach dem obigen Prinzip verwendet werden können.

Das Ende eines Beweises wird oft durch „qed“[6] gekrönt. Dies steht für *quod erat demonstrandum* und bedeutet soviel wie „was zu beweisen war“. Auch die Symbole $\square$ bzw. $\blacksquare$ sind als Marker für ein Beweisende verbreitet.

7.1.1. Beispiel

Stell dir vor, du möchtest folgenden Satz beweisen:

$$k = x + y \Rightarrow (\tfrac{k}{2})^2 \geq xy$$

Dabei sind k, x und y reelle Zahlen. Bei diesem Satz ist $k = x + y$ Prämisse und $(\frac{k}{2})^2 \geq xy$ die zu beweisende Aussage. Wenn der Satz direkt[7] bewiesen wird, so sieht der Beweis folgendermaßen aus (was ein *direkter Beweis* ist, ist im nächsten Kapitel beschrieben):

Prämisse: $k = x + y$

|

1 Kapitel 1.1 auf Seite 5
2 Kapitel 8 auf Seite 57
3 Kapitel 2.7 auf Seite 17
4 Kapitel 4 auf Seite 29
5 Kapitel 2.7 auf Seite 17
6 http://de.wikibooks.org/wiki/Mathe%20f%FCr%20Nicht-Freaks%3A%20W%F6rterbuch%23Anker%3Aqed
7 Kapitel 8.2 auf Seite 58

logische Schlussfolgerungen

$\downarrow$

zu beweisende Aussage: $(\frac{k}{2})^2 \geq xy$

Ein möglicher Beweis ist folgender:

Beweis: Es ist $(x - \frac{k}{2})^2 \geq 0$ (Quadratzahlen sind stets nicht negativ). Diese Gleichung lässt sich umformen:

$$\begin{aligned} & (x - \tfrac{k}{2})^2 \geq 0 \\ \Rightarrow\quad & x^2 - kx + (\tfrac{k}{2})^2 \geq 0 \\ \Rightarrow\quad & (\tfrac{k}{2})^2 \geq kx - x^2 \\ \Rightarrow\quad & (\tfrac{k}{2})^2 \geq x \cdot (k - x) \end{aligned}$$

Nun ist nach Voraussetzung $k = x + y$, also $y = k - x$. Wenn wir nun für $k - x$ die Variable y einsetzen, erhalten wir die Gleichung:

$(\frac{k}{2})^2 \geq xy$ qed.

Dieser Beweis lässt sich folgendermaßen in einem Diagramm skizzieren:

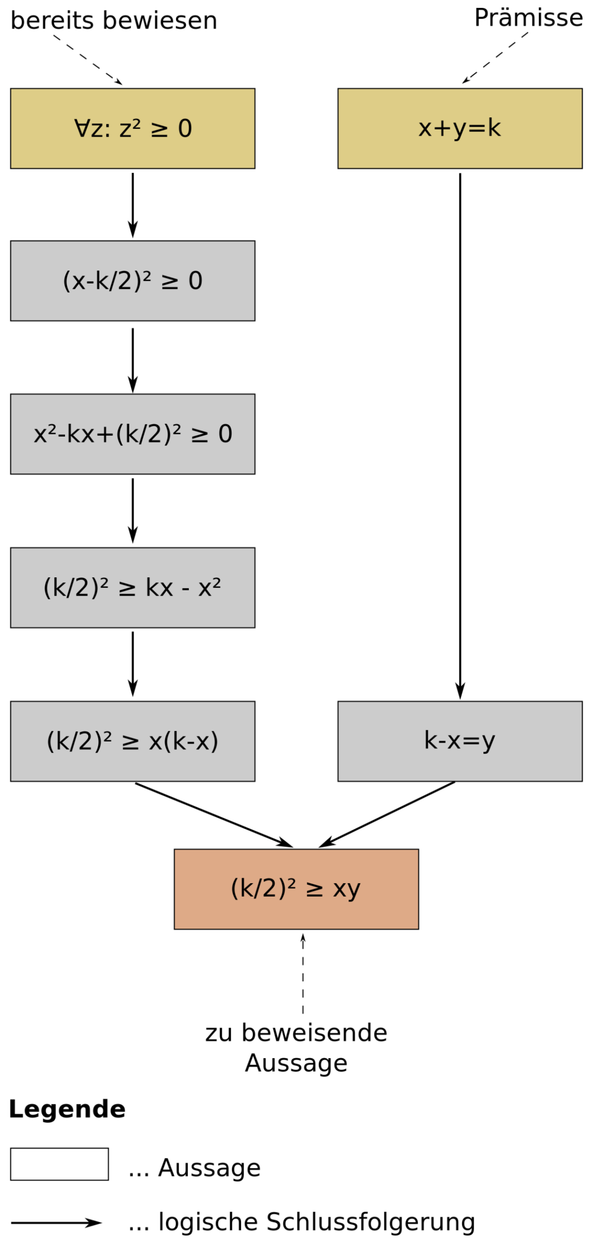


Abb. 12 zentriert

7.2. Wenn Beweise vom Himmel fallen

Vielleicht kennst du dieses Gefühl: Du lernst gerade einen neuen Beweis kennen und fragst dich, wie der Autor sich den Beweis „ausgedacht“ hat. Der Beweis scheint vom Himmel gefallen zu sein oder einem göttlichen Einfall entsprungen.

Bevor du dir das nächste Mal diese Frage stellst, solltest du dir folgendes vor Augen halten: *Der Beweis ist **kein** Lösungsweg; er ist nur das Ergebnis eines Lösungsweges*.

In den seltensten Fällen kann ein Mathematiker einen Beweis sofort führen (sofern er den Beweises des Satzes nicht bereits kennt). In der Regel muss er sich erst einmal auf einem Schmierblatt Gedanken über den Satz machen. Wenn er irgendwann, irgendwie (und dies kann durchaus sehr, sehr lange dauern) einen Beweis gefunden hat, schreibt er diesen als Endergebnis auf. Auch ist oft der Weg, wie der Beweis geführt wird, ein ganz anderer, wie der Mathematiker im Lösungsweg auf den Beweis gekommen ist. Einem Außenstehenden, der nur den Beweis aber nie den eigentlichen Lösungsweg zu Gesicht bekommen hat, stellt sich da natürlich die Frage, wie „man auf den Beweis kommt“.

Betrachten wir das obige Beispiel[8]: der Beweis des Satzes $k = x + y \Rightarrow (\frac{k}{2})^2 \geq xy$. Ich habe den Beweis mit der wahren Aussage $(x - \frac{k}{2})^2 \geq 0$ begonnen. Ein Leser kann sich hier durchaus fragen, wie auf ich diese Gleichung gekommen bin. Diese Frage löst sich auf, wenn ich dir zeige, was auf meinem Schmierblatt stand (wie mein Lösungsweg aussah):

Mein Schmierblatt (ordentlich aufgeschrieben):

$$
\begin{aligned}
&(\tfrac{k}{2})^2 \geq xy \\
&\qquad \downarrow k = x + y \Rightarrow y = k - x \\
&(\tfrac{k}{2})^2 \geq x \cdot (k - x) \\
&\qquad \downarrow \\
&(\tfrac{k}{2})^2 \geq xk - x^2 \\
&\qquad \downarrow \\
&x^2 - kx + (\tfrac{k}{2})^2 \geq 0 \\
&\qquad \downarrow \text{quadratische Erg}\mathit{a}\text{nzüng} \\
&(x - \tfrac{k}{2})^2 - (\tfrac{k}{2})^2 + (\tfrac{k}{2})^2 \geq 0 \\
&\qquad \downarrow \\
&(x - \tfrac{k}{2})^2 \geq 0 \qquad \textit{wahre Aussage} \ ;)
\end{aligned}
$$

Es fällt einiges auf: Zum einen siehst du, dass mein Lösungsweg auf dem Schmierblatt nicht perfekt ist. So musste ich erst quadratisch ergänzen, bevor ich erkannt habe, dass $x^2 - kx + (\frac{k}{2})^2 = (x - \frac{k}{2})^2$ ist. Einem findigem Mathematiker würde dies sofort auffallen. Zum anderen ist mein Lösungsweg nicht für einen Beweis geeignet: Ich beginne nicht mit der Prämisse des Satzes, sondern mit dem, was ich beweisen möchte. Dies ist problematisch, denn ich kann meinen Beweis schlecht mit dem beginnen, was ich eigentlich zeigen möchte. Am Ende erhalte ich zwar eine wahre Aussage, aber sie ist nicht die Aussage, die ich beweisen möchte. Da ich nicht deutlich gemacht habe bzw. mir überlegt habe, dass meine Termumformungen umkehrbar sind (meine Pfeile zeigen nur „nach unten“), kann ich mit Hilfe des Schmierblattes nicht begründen, dass ich von der unteren wahren Aussage meine zu beweisende Aussage $(\frac{k}{2})^2 \geq xy$ herleiten kann.

Du siehst: Das, was ich auf dem Schmierblatt geschrieben habe, ist für einen Beweis ungeeignet. Deswegen musste ich den Beweis (mit Hilfe dessen, was auf mein Schmierblatt stand) anders formulieren. Ich habe mit der wahren Aussage $(x - \frac{k}{2})^2 \geq 0$ begonnen und aus dieser schrittweise meine Zielaussage $(\frac{k}{2})^2 \geq xy$ hergeleitet.

8 Kapitel 7.1.1 auf Seite 52

Mein Schmierblatt erklärt nun, wieso ich mit $(x-\frac{k}{2})^2 \geq 0$ angefangen habe und wie ich auf diese Ungleichung gekommen bin. Leider werden in den seltensten Fällen neben den Beweisen eines Satzes auch deren Lösungsweg dargestellt oder die Idee dahinter genannt. Oftmals muss der Leser selbst herausfinden, wie man auf einen bestimmten Beweis selber kommen kann, was sehr schwer sein kann. Ich werde mich in diesem Buch darum bemühen, Beweise so zu formulieren, dass aus ihnen auch die Idee dahinter leicht herausgelesen werden kann. Sollte dir etwas an Erklärung im Beweis fehlen, so kannst du über die Diskussionsseiten[9] Kontakt mit mir aufnehmen.

9 http://de.wikibooks.org/wiki/Hilfe%3ADiskussionsseiten%20benutzen

8. Beweisarten

Es gibt zwei wichtige Arten von Beweise: *direkte* Beweise und *indirekte Beweise* (auch *Widerspruchsbeweise* genannt)

8.1. Direkter Beweis

Beim *direktem* Beweis wird der zu beweisende Satz S direkt bewiesen. Dies bedeutet, dass man mit den Voraussetzungen von S beginnt und aus diesen die zu beweisende Aussage direkt durch logische Schlussfolgerungen herleitet. Ein direkter Beweis nimmt also folgende Form an:

Prämissen und Voraussetzungen von S

|

logische Schlussfolgerungen

↓

Konklusion von S

8.1.1. Beispiel

Betrachten wir ein Beispiel. Stell dir vor, wir müssen den Satz

„Die Summe 3er aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar."

beweisen. Dieser Satz lässt sich folgendermaßen als Implikation[1] formulieren:

„Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist $n+(n+1)+(n+2)$ durch 3 teilbar."

In dieser Implikation ist „n ist eine natürliche Zahl" die Prämisse und „$n+(n+1)+(n+2)$ ist durch 3 teilbar" die Konklusion. Ein direkter Beweis hätte also folgende Form:

n ist eine natürliche Zahl.

|

logische Schlussfolgerungen

↓

$n+(n+1)+(n+2)$ ist durch 3 teilbar.

1 Kapitel 2.7 auf Seite 17

Ein solcher Beweis könnte so aussehen (Implikationen der logischen Schlussfolgerungen sind orange):

n ist eine natürliche Zahl.

|

Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist auch $n+1$ eine natürliche Zahl.

↓

$n+1$ ist eine natürliche Zahl.

|

Ist k eine natürliche Zahl, dann ist $3 \cdot k$ durch 3 teilbar.

↓

$3 \cdot (n+1)$ ist durch 3 teilbar.

|

$3 \cdot (n+1) = 3 \cdot n + 3$

↓

$3 \cdot n + 3$ ist durch 3 teilbar.

|

$3 \cdot n + 3 = n + n + n + 1 + 2 = n + (n+1) + (n+2)$

↓

$n + (n+1) + (n+2)$ ist durch 3 teilbar.

Anstatt deinen Beweis so wie obigen zu strukturieren , kannst du ihn auch als Fließtext schreiben (dies ist meistens kompakter):

> „Sei n eine natürliche Zahl. Damit ist auch $n+1$ eine natürliche Zahl und somit $3 \cdot (n+1)$ durch 3 teilbar. Da $n + (n+1) + (n+2) = 3 \cdot n + 3$ ist, ist $n + (n+1) + (n+2)$ durch 3 teilbar.“

8.2. Widerspruchsbeweis

Neben dem direkten Beweis gibt es eine zweite Art des Beweises, den *Widerspruchsbeweis* oder *indirekten Beweis*. Wenn du einen mathematischen Satz S indirekt beweisen möchtest, so führst du seine Negation $\neg S$ durch logische Schlussfolgerungen zu einem Widerspruch. Dabei nenne ich im Folgendem $\neg S$ *Widerspruchsannahme*. Ein Widerspruchsbeweis hat also folgende Form:

Widerspruchsannahme $\neg S$

|

logische Schlussfolgerungen

↓

Widerspruch

Um einen Widerspruchsbeweis erfolgreich durchzuführen, musst du zunächst den zu beweisenden Satz S richtig negieren. Wie du dies machen kannst, kannst du im Abschnitt „Aussagen negieren“[2] nachlesen.

Doch wie haben wir den Satz S bewiesen, wenn wir die Widerspruchsannahme $\neg S$ zu einen Widerspruch geführt haben? Wenn du die Widerspruchsannahme $\neg S$ zu einem Widerspruch geführt hast, so weißt du dass $\neg S$ falsch sein muss, also $\neg S = \mathrm{F}$ ist. Damit ist die doppelte Verneinung $\neg\neg S$ von S wahr ($\neg\neg S = \neg \mathrm{F} = W$). Nun ist $\neg\neg S \Leftrightarrow S$ eine Tautologie[3], was du an folgender Wahrheitstabelle[4] erkennst:

S	$\neg S$	$\neg\neg S$	$\neg\neg S \Leftrightarrow S$
W	F	W	W
F	W	F	W

Da $\neg\neg S \Leftrightarrow S$ eine Tautologie ist, ist $\neg\neg S$ dann und nur dann wahr, wenn S wahr ist (siehe Definition der Äquivalenz[5]). Wir haben durch den Widerspruchsbeweis bewiesen, dass $\neg\neg S$ wahr ist (da $\neg S$ falsch ist). Damit muss aber wegen obiger Tautologie S wahr sein. Genau dies ist zu zeigen, wenn wir den Satz S beweisen wollen.

8.2.1. Beispiel

Stell dir vor wir wollen den Satz

„Die Summe 3er aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.“

durch einen Widerspruchsbeweis beweisen (diesen haben wir bereits oben direkt bewiesen). Diesen Satz können wir als Implikation definieren:

„Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist $n+(n+1)+(n+2)$ durch 3 teilbar.“

Um diese Implikation indirekt zu beweisen, müssen wir zunächst die Widerspruchsannahme formulieren, also die obige Implikation negieren[6]. Wir erhalten:

Widerspruchsannahme: „n ist eine natürliche Zahl und $n+(n+1)+(n+2)$ ist nicht durch 3 teilbar.“

Diese Annahme müssen wir nun durch logische Schlussfolgerungen zu einen Widerspruch führen. Eine solche Herleitung könnte so aussehen:

Widerspruchsannahme: n ist eine natürliche Zahl und $n+(n+1)+(n+2)$ ist nicht durch 3 teilbar.

|

Ist AB wahr, so ist A wahr.

$\downarrow$

2 Kapitel 5.1.3 auf Seite 37
3 Kapitel 4 auf Seite 29
4 Kapitel 2.7 auf Seite 17
5 Kapitel 2.7 auf Seite 17
6 Kapitel 2.7 auf Seite 17

$n+(n+1)+(n+2)$ ist nicht durch 3 teilbar.

$|$

$n+(n+1)+(n+2)=3\cdot n+3$

$\downarrow$

$3\cdot n+3$ ist nicht durch 3 teilbar.

$|$

$3\cdot n+3=3\cdot(n+1)$

$\downarrow$

$3\cdot(n+1)$ ist nicht durch 3 teilbar.

$|$

Ist $3\cdot k$ nicht durch 3 teilbar, so ist k keine natürliche Zahl.

$\downarrow$

$n+1$ ist keine natürliche Zahl.

$|$

Ist k keine natürliche Zahl, so ist $k-1$ keine natürliche Zahl.

$\downarrow$

$(n+1)-1$ ist keine natürliche Zahl.

$|$

$(n+1)-1=n$

$\downarrow$

n ist keine natürliche Zahl.

$\downarrow$

Widerspruch ↯ (n ist nach Widerspruchsannahme eine natürliche Zahl)

Auch diesen Beweis kannst du in einem Fließtext schreiben:

> *Widerspruchsannahme*: Sei n eine natürliche Zahl und $n+(n+1)+(n+2)$ nicht durch 3 teilbar. Wegen $n+(n+1)+(n+2)=3\cdot n+3=3\cdot(n+1)$ ist $3\cdot(n+1)$ nicht durch 3 teilbar. Damit ist $n+1$ keine natürliche Zahl, da, wenn $n+1$ eine natürliche Zahl wäre, so wäre $3\cdot(n+1)$ durch 3 teilbar. Wenn $n+1$ keine natürliche Zahl ist, ist auch n keine natürliche Zahl. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass n nach Widerspruchsannahme eine natürliche Zahl ist ↯.

9. Beweismethoden

Neben den verschiedenen Arten[1] mathematischer Beweise gibt es einige Methoden, die du in Beweisen verwenden kannst: die *vollständige Fallunterscheidung*, der *Beweis durch Kontraposition* und die *vollständige Induktion*. Diese Liste ist nicht vollständig und es gibt gewiss vielfältige Wege einen Beweis zu führen. Dennoch kann dir der nachfolgende Abschnitt als Inspriationsquelle für eigene Beweise dienen.

9.1. Vollständige Fallunterscheidung

Bei *vollständiger Fallunterscheidung* wird der Beweis in eine endliche Anzahl von Fällen $\mathrm{F}_1,\ \mathrm{F}_2,\ \ldots \mathrm{F}_n$ aufgeteilt. In jeden der Fälle wird die zu beweisende Aussage unter zusätzlicher Annahme der Fallbedingung F_k bewiesen. Ein Beweis durch vollständige Fallunterscheidung hat damit folgende Form:

Prämissen

Fall F_1:	Fall F_2:	…	Fall F_n:
|	|		|
logische Schlussfolgerungen	logische Schlussfolgerungen		logische Schlussfolgerungen
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
zu beweisende Aussage	zu beweisende Aussage		zu beweisende Aussage

Dabei muss sichergestellt sein, dass unter den Prämissen des Satzes mindestens einer der Fälle $\mathrm{F}_1,\ \mathrm{F}_2,\ \ldots \mathrm{F}_n$ auftritt (Deswegen das Wort „vollständig“ im Namen).

9.1.1. Beispiel

Als Beispiel beweisen wir folgenden Satz mit Hilfe vollständiger Fallunterscheidung (Quelle: w:Beweis (Mathematik)#Vollständige Fallunterscheidung[2]):

1 Kapitel 8 auf Seite 57
2 `http://de.wikipedia.org/wiki/Beweis%20%28Mathematik%29%23Vollst%E4ndige%20Fallunterscheidung`

„Ist p eine w:Primzahl[3] ungleich 2, dann gibt eine natürliche Zahl k mit $p = 4 \cdot k + 1$ oder $p = 4 \cdot k + 3$.“

Wir werden folgende vier Fälle unterscheiden:

1. $p = 4k$
2. $p = 4k + 1$
3. $p = 4k + 2$
4. $p = 4k + 3$

Da p eine natürliche Zahl ist (nur natürliche Zahlen können per Definition Primzahlen sein), muss einer der obigen vier Fälle auftreten. Unsere Fallunterscheidung ist damit vollständig. Betrachten wir nun die vier Fälle:

Fall 1: $p = 4k$

p ist durch 4 teilbar und damit keine Primzahl. Somit ist die Prämisse der zu beweisenden Implikation[4] falsch und damit die gesamte Implikation wahr.

Fall 2: $p = 4k + 1$

Die Konklusion der zu beweisenden Implikation und damit die gesamte Implikation ist wahr.

Fall 3: $p = 4k + 2$

Es ist $p = 4k + 2 = 2(2k + 1)$. Damit ist p durch 2 teilbar. Da nach Voraussetzung der zu beweisenden Implikation $p \neq 2$ ist, kann p keine Primzahl sein. Somit ist die Prämisse der zu beweisenden Implikation falsch und damit die gesamte Implikation wahr.

Fall 4: $p = 4k + 3$

Die Konklusion der zu beweisenden Implikation und damit die gesamte Implikation ist wahr.

In jeden der Fälle konnten wir beweisen, dass unter der Bedingung der jeweiligen Fallunterscheidung die zu beweisende Implikation wahr ist. Da unsere Fallunterscheidung vollständig ist, ist die zu beweisende Implikation unabhängig von jeweiligen Fall wahr.

9.2. Beweis durch Kontraposition

Beweis durch Kontraposition ist eine Beweismethode, die für Beweise von Implikationen[5] der Form $A \Rightarrow B$ verwendet werden können. Diese Beweismethode basiert auf der Tautologie[6] $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Verständnisfrage: Zeige, dass die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ eine Tautologie ist.
Um zu zeigen, dass $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ eine Tautologie ist, können wir die Wahrheitstabelle[7] dieser Aussage aufstellen und uns überzeugen, dass der resultierende Wahrheitswert immer wahr ist:

A	B	$(A \Rightarrow B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg B \Rightarrow \neg A)$
W	W	W	**W**	W
W	F	F	**W**	F
F	W	W	**W**	W

3 http://de.wikipedia.org/wiki/Primzahl
4 Kapitel 2.7 auf Seite 17
5 Kapitel 2.7 auf Seite 17
6 Kapitel 4 auf Seite 29

F	F	W	**W**	W

Die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ ist also eine Tautologie und damit immer wahr. Dies bedeutet, dass $A \Rightarrow B$ dann und nur dann wahr ist, wenn $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr ist. Wenn wir also einen Satz der Form $A \Rightarrow B$ beweisen wollen, können wir alternativ auch die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ beweisen. Beim Beweis durch Kontraposition macht man genau dies: Anstatt einen Satz der Form $A \Rightarrow B$ direkt zu beweisen, wird die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ bewiesen.

Um also Kontraposition erfolgreich anwenden zu können, musst du wissen, wie man Aussagen richtig negiert. Dies kannst du im Abschnitt „Aussagen negieren“[8] nachlesen.

9.2.1. Beispiel

Als Beispiel wollen wir folgenden Satz mit Hilfe der Kontraposition beweisen:

„Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade und $\sqrt{n}$ eine natürliche Zahl, dann ist $\sqrt{n}$ gerade.“

Dieser Satz hat die Form einer Implikation $A \Rightarrow B$ mit:

$$\underbrace{n \in N \text{ ist gerade und } \sqrt{n} \text{ ist eine natürliche Zahl}}_{=A} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{n} \text{ ist gerade}}_{=B}$$

Um diesen Satz durch Kontraposition beweisen zu können, müssen wir erst einmal die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$, also die Negation der Aussagen A und B bestimmen:

$$\begin{aligned}\neg A &= \neg\left(n \in N \text{ ist gerade und } \sqrt{n} \text{ ist eine natürliche Zahl}\right) = \neg\left(n \in N \text{ ist gerade}\right) \text{ oder } \neg\left(\sqrt{n} \text{ ist eine natürliche Zahl}\right) \\ &= n \in N \text{ ist ungerade oder } \sqrt{n} \text{ ist keine natürliche Zahl}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg B &= \neg\left(\sqrt{n} \text{ ist gerade}\right) \\ &= \sqrt{n} \text{ ist ungerade}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $\neg B \Rightarrow \neg A$:

8 Kapitel 5.2 auf Seite 38

$$\left(\sqrt{n} \text{ ist ungerade}\right) \Rightarrow \left(n \in N \text{ ist ungerade oder } \sqrt{n} \text{ ist keine nat}\right.$$

urliche Zahl

Diesen Satz werden wir direkt[9] beweisen. Wir suchen also einen Beweis der Form

$\sqrt{n}$ ist ungerade

|

logische Schlussfolgerungen

↓

$n \in \mathbb{N}$ ist ungerade oder $\sqrt{n}$ ist keine natürliche Zahl

Hier wenden wir eine volländige Fallunterscheidung[10] in die Fälle „$\sqrt{n}$ ist eine natürliche Zahl" und „$\sqrt{n}$ ist keine natürliche Zahl" an (so siehst du an diesem Beispiel auch, dass die verschiedenen Methoden Beweise zu führen, kombiniert werden können).

Fall 1: $\sqrt{n}$ ist keine natürliche Zahl

Da die Aussage „$\sqrt{n}$ ist keine natürliche Zahl" wahr ist, ist insbesondere auch die Aussage „$n \in \mathbb{N}$ ist ungerade oder $\sqrt{n}$ ist keine natürliche Zahl" wahr. Dies ist aber die Konklusion der zu beweisenden Implikation. Somit ist die gesamte Implikation wahr (da eine Implikation[11] bereits dann wahr ist, wenn ihre Konklusion wahr ist).

Alternativ kannst du argumentieren, dass die Prämisse der zu beweisenden Implikation „$\sqrt{n}$ ist ungerade" bereits impliziert, dass $\sqrt{n}$ eine natürliche Zahl ist (nur natürliche Zahlen können ungerade sein). Damit kann der Fall „$\sqrt{n}$ ist keine natürliche Zahl" nie unter der Voraussetzung „$\sqrt{n}$ ist ungerade" auftreten.

Fall 2: $\sqrt{n}$ ist eine natürliche Zahl

Sei $\sqrt{n}$ eine natürliche Zahl und ungerade. Wir müssen nun zeigen, dass n ungerade ist. Da $\sqrt{n}$ ungerade ist, gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 0$ mit $\sqrt{n} = 2 \cdot k + 1$. Damit ist

$$\begin{aligned} n &= \left(\sqrt{n}\right)^2 \\ &= (2 \cdot k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2 \cdot \underbrace{\left(2k^2 + 2k\right)}_{=:\, m} + 1 \\ &= 2 \cdot m + 1 \end{aligned}$$

Also ist n eine ungerade Zahl. qed.

9 Kapitel 8.2 auf Seite 58
10 Kapitel 10 auf Seite 67
11 Kapitel 2.7 auf Seite 17

9.3. Vollständige Induktion

Die *Vollständige Induktion* wird im nächsten Abschnitt[12] dieses Buches ausführlich vorgestellt. Zur Vollständigkeit nenne ich hier nur das Prinzip dieser Beweismethode:
Definition 1. Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussageform in der freien Variablen $n \in \mathbb{N}$. Sei $A(1)$ (oder $A(0)$) eine wahre Aussage (Induktionsanfang) und die Implikation $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt (Induktionsschritt), dann ist die Aussageform allgemeingültig in $\mathbb{N}$.

12 Kapitel 11 auf Seite 71

10. Zusammenfassung

10.1. Beweis

Definition: Ein Beweis ist eine fehlerfreie Herleitung eines mathematischen Satzes S aus Axiomen und bereits bewiesenen Aussagen.

10.2. Beweisarten

10.2.1. Direkter Beweis

Prämissen und Voraussetzungen von S

|

logische Schlussfolgerungen

↓

Konklusion von S

10.2.2. Widerspruchsbeweis

Widerspruchsannahme $\neg S$

|

logische Schlussfolgerungen

↓

Widerspruch

10.3. Beweismethoden

10.3.1. Vollständige Fallunterscheidung

Prämissen von S

Fall F_1:	Fall F_2:	…	Fall F_n:
|	|		|
logische Schlussfolgerungen	logische Schlussfolgerungen		logische Schlussfolgerungen
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
zu beweisende Aussage	zu beweisende Aussage		zu beweisende Aussage

10.3.2. Beweis durch Kontraposition

Anstatt eine Implikation $A \Rightarrow B$ zu beweisen, kann man alternativ auch die Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ beweisen.

10.3.3. Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussageform in der freien Variablen $n \in \mathbb{N}$. Sei $A(1)$ (oder $A(0)$) eine wahre Aussage (Induktionsanfang) und die Implikation $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt (Induktionsschritt), dann ist die Aussageform allgemeingültig in $\mathbb{N}$.

Teil III.

Vollständige Induktion – Der Beweis mit dem Dominoeffekt

11. Definition und Erklärung

Die *vollständige Induktion* ist eine wichtige Beweismethode in der Mathematik, die dir in deinem Studium noch häufig begegnen wird. Dabei kann man die Wirkungsweise der vollständigen Induktion gut mit dem Dominoeffekt vergleichen. Doch wie kann ein solcher *Beweis mit dem Dominoeffekt* in der Mathematik angewandt werden? Betrachten wir dazu eine Beispielaufgabe, die man mit Hilfe der vollständigen Induktion lösen kann.

11.1. Eine Beispielaufgabe

Abb. 13 Carl Friedrich Gauß

Unsere Beispielaufgabe ist die *Gaußsche Summenformel*, auch *kleiner Gauß* genannt. Sie heißt so, weil der *kleine* 9 jährige Carl Friedrich Gauß diese Summenformel in einer Mathestunde gefunden hat (*Gauß ist der geniale Mathematiker, dessen Gesicht später den 10-Mark-Schein in Deutschland zieren sollte*). Laut w:Gaußsche Summenformel#Herkunft der Bezeichnung[1] konnte der kleine Gauß

1 http://de.wikipedia.org/wiki/Gau%DFsche%20Summenformel%23Herkunft%20der%20Bezeichnung

die ersten 100 natürlichen Zahlen sofort und ohne größere Probleme aufsummieren. Wenn man seinen „Trick“ verallgemeinert, kommt man auf folgende Formel:
Beweis 2. *Der kleine Gauß*

Beweise, dass für alle natürlichen Zahlen n die Summe $1+2+3+\cdots+n$ gleich $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ist.

Ok, wir könnten nun anfangen, diese Behauptung für einzelne natürliche Zahlen n zu beweisen:

- Für $n = 1$:
  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, stimmt
- Für $n = 2$:
  $1+2 = 3 = \frac{2(2+1)}{2}$, stimmt
- und so weiter …

Doch dies ist keine Möglichkeit, einen Beweis zu führen, da es unendlich viele natürlichen Zahlen gibt und es immer mühseliger wird und unmöglich ist, alle Summen auszurechnen (*Denk an die armen Mitschüler von Gauß, wie sie versucht haben, die einzelnen Zahlen nacheinander aufzusummieren*). Wir brauchen also eine andere Lösungsmethode. Ich habe dir gesagt, dass die vollständige Induktion ein *Beweis mit dem Dominoeffekt* ist und sich auch diese Aufgabe durch vollständige Induktion lösen lässt. Doch wie lässt sich ein Dominoeffekt in dieser Aufgabe ausnutzen (*Hast du schon eine Idee?*). Analysieren wir dazu die Aufgabe.

Wenn du dir die Aufgabe durchliest, kannst du feststellen, dass es in der Aufgabenstellung eine freie Variable gibt (die natürliche Zahl n). Wenn du für diese freie Variable einen bestimmten Wert einsetzt, entsteht eine konkrete Aussage[2]. Durch Nachrechnen kannst du feststellen, ob diese Aussage wahr oder falsch ist. Wenn du z. B. für n die Zahl 42 einsetzt, entsteht die (wahre) Aussage:

Die Summe $1+2+3+\cdots+42$ ist gleich $\frac{42\cdot(42+1)}{2}$.

Ein solcher Ausdruck, der eine (oder auch mehrere) *freie Variable* enthält und die durch Belegung dieser Variablen mit Werten in eine Aussage übergeht, wird *Aussageform* genannt und mit $A(n)$ bezeichnet. $A(n)$ heißt soviel wie: eine Aussageform mit dem Namen A und der freien Variablen n, also A in Abhängigkeit von n. Die obige Aussage wäre demnach $A(42)$. Hier einige weitere Beispiele:

$A(1)$ lautet: Die Summe 1 ist gleich $\frac{1\cdot(1+1)}{2}$.

$A(4)$ lautet: Die Summe $1+2+3+4$ ist gleich $\frac{4\cdot(4+1)}{2}$.

Unsere Aufgabe ist es, zu zeigen, dass die Aussageform für alle natürlichen Zahlen n wahr ist. Wir müssen also beweisen, dass wenn wir für n irgendeine beliebige natürliche Zahl einsetzen, die daraus entstehende Aussage wahr ist. Eine solche Aussageform, die für alle natürlichen Zahlen wahr ist, nennt man *allgemeingültig in* $\mathbb{N}$.

2 Kapitel 1.1 auf Seite 5

Abb. 14 Unsere Aufgabe ist eine Dominoreihe

Doch wie kann man jetzt den Dominoeffekt ins Spiel bringen? Dazu werden wir eine Analogie zwischen der Aussageform und einer Dominoreihe finden. Stell dir dazu eine unendlich lange Dominoreihe vor, die irgendwo im Raum anfängt. Diese Dominoreihe ist durchnummeriert (der erste Dominostein ist die 1, der Zweite die 2 und so weiter). Nun führen wir eine Beziehung zwischen der Dominoreihe und der zu beweisenden Aussageform $A(n)$ ein. Wir sagen, dass der erste Dominostein für die Aussage $A(1)$ steht, der zweite Dominostein für die Aussage $A(2)$ steht und so weiter. Gehen wir nun davon aus, dass wenn ein Dominostein umfällt, die Wahrheit der zu diesem Dominostein zugewiesenen Aussage bewiesen ist. Wenn also Dominostein Nummer 7 umfällt, die Aussage $A(7)$ wahr ist und beim Fall von Dominostein Nummer 23, ist die Aussage $A(23)$ wahr.

Abb. 15 Der Dominoeffekt

Wir haben nun das Problem der Aufgabe auf das von uns in der Kindheit bekannte Problem zurückgeführt, dass wir eine Dominoreihe zum Umfallen bringen wollen.

<ins>Frage</ins>: *Doch was musst du machen, damit alle Dominosteine umfallen? Wie muss dazu die Dominoreihe aufgebaut sein?*
Wenn du darüber nachdenkst, kommst du auf 2 Schritte, die du einhalten musst, damit alle Dominosteine umfallen.

Schritt 1: Du musst den ersten Dominostein umstoßen.

Schritt 2: Die Dominoreihe muss so aufgebaut sein, dass wenn ein Dominostein umfällt auch sein Nachfolger umfällt.

Wenn beide Schritte eingehalten werden, fallen alle Steine in der Dominoreihe nacheinander um (*Dominoeffekt*). Du musst also dafür Sorge tragen, dass beide Schritte erfüllt sind.

<ins>Frage</ins>: *Wie lauten nun die beiden Lösungsschritte, wenn wir die obigen beiden Schritte durch unsere Analogie in das Ausgangsproblem zurückübersetzen?*

Lösungsschritt 1: Die Aussageform ist für $n = 1$ wahr.

Lösungsschritt 2: Wenn die Aussageform für ein beliebiges $n = k$ wahr ist, muss die Aussageform auch für den Nachfolger $n = k + 1$ wahr sein.

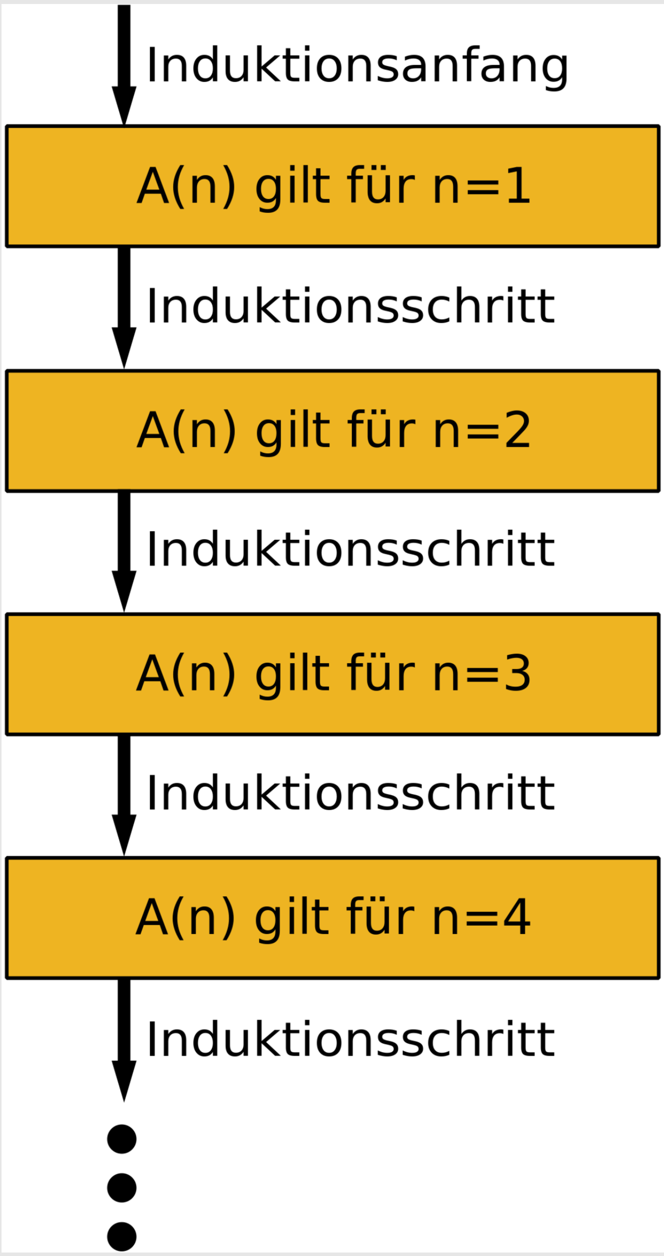


Abb. 16 Veranschaulichung der vollständigen Induktion

Dass durch den Beweis dieser beiden Lösungsschritte die Aufgabe gelöst ist, kannst du folgendermaßen erkennen (*beachte den dabei eintretenden Dominoeffekt!*). Zunächst wird im ersten Lösungsschritt gezeigt, dass die Behauptung für $n = 1$ wahr ist. Wenn wir nun Lösungsschritt 2 auf dieses Wissen anwenden (wenn also $n = k = 1$ ist), folgt, dass die Behauptung auch für $n = k+1 = 1+1 = 2$ wahr sein muss. Wenn wir nochmal Lösungsschritt 2 anwenden, folgt die Wahrheit für $n = 2+1 = 3$ und bei nochmaliger Anwendung für $n = 3+1 = 4$ und so weiter...

Damit müssen wir nur die obigen beide Lösungsschritte beweisen, um die Aufgabe zu lösen. Hier der Beweis zu den beiden Lösungsschritten:

Lösungsschritt 1:

Für $n = 1$ lautet die zu beweisende Aussage $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$. Durch Nachrechnen der rechten Seite, zeigt man, dass diese Aussage wahr ist.

Lösungsschritt 2:

Gehen wir davon aus, dass die Aussage für $n = k$ bereits bewiesen ist. Gehen wir also davon aus, dass gilt:

$1+2+3+\cdots+k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$ (**Anfangsgleichung:** Das haben wir gegeben)

Wir müssen nun die Summenformel für $k+1$ beweisen. Wir müssen also beweisen, dass gilt:

$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2}$ (**Zielgleichung:** Das wollen wir beweisen)

Fangen wir auf der linken Seite dieser zu beweisenden Aussage an:

$$
\begin{aligned}
\overbrace{1+2+3+\cdots+k+(k+1)}^{\text{linke Seite der Zielgleichung}} &= (1+2+3+\cdots+k)+(k+1) \\
&\quad \downarrow \text{ Anfangsgleichung einsetzen} \\
&= \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) \\
&\quad \downarrow \text{ Summe in Bruch zusammenfassen} \\
&= \frac{k \cdot (k+1) + 2(k+1)}{2} \\
&\quad \downarrow \ (k+1) \text{ ausklammern} \\
&= \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} \\
&\quad \downarrow \ k+2 = (k+1)+1 \\
&= \underbrace{\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2}}_{\text{rechte Seite der Zielgleichung}}
\end{aligned}
$$

Wir haben so eine kurze und elegante Lösung der Aufgabe gefunden (*Gauß' Lehrer wäre sicherlich stolz auf uns* ^^).

11.2. Das Prinzip der vollständigen Induktion

Doch was ist nun das Prinzip der vollständigen Induktion? Schauen wir uns dazu die obige Beispielaufgabe an und versuchen das dabei verwendete Beweisprinzip zu abstrahieren. (*Kannst du dieses Prinzip schon jetzt erklären?*)

! **Hinweis**

> Im Folgenden wird die vollständige Induktion so beschrieben, wie sie in vielen Lehrbüchern definiert wird. Das Prinzip kann aber auch allgemeiner formuliert werden (siehe späterer Abschnitt). Dementsprechend kann es dir bei einigen Aufgaben passieren, dass du die vollständige Induktion (ein wenig) anders anwendest, als sie hier beschrieben wird.

Zunächst stellen wir fest, dass es sich um eine *Aussageform* handelt, deren eine freie Variable eine natürliche Zahl ist. Die Aufgabe besteht nun darin, zu beweisen, dass die Aussageform für alle natürlichen Zahlen wahr ist, dass also die Aussageform allgemeingültig in $\mathbb{N}$ ist.

Nun haben wir im ersten Schritt bewiesen, dass die Aussageform für die kleinste natürliche Zahl wahr ist (in unserem obigen Beispiel war diese kleinste natürliche Zahl die 1; in bestimmten Fällen kann sie aber auch die 0 sein, je nachdem wie die zu beweisende Aufgabe lautet). Dieser Schritt wird **Induktionsanfang** genannt und entspricht in unserer obigen Analogie dem Umstoßen des ersten Dominosteins.

Im zweiten Schritt haben wir bewiesen, dass wenn die Aussageform für eine beliebige natürliche Zahl k wahr ist, sie auch für $k+1$ wahr sein muss. Dieser Schritt wird **Induktionsschritt** genannt und entspricht in unserer obigen Analogie der Tatsache, dass die Dominoreihe so aufgebaut sein muss, dass wenn ein Dominostein umfällt, auch der nächste Dominostein umfallen muss. Die dabei getroffene Annahme, dass die Aussageform für ein beliebiges k wahr ist, nennt man **Induktionsvoraussetzung** (das war unsere obige *Anfangsgleichung*). Die unter Annahme der Induktionsvoraussetzung zu beweisende Aussage $A(k+1)$ wird **Induktionsbehauptung** genannt (das war unsere obige *Zielgleichung*).

$$\overbrace{\underbrace{A(k)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} \Rightarrow \underbrace{A(k+1)}_{\text{Induktionsbehauptung}}}^{\text{Induktionsschluss}}$$

Fassen wir zusammen: Die vollständige Induktion lässt sich beim Beweis der Allgemeingültigkeit von Aussageformen $A(n)$ anwenden, deren eine freie Variable n eine natürliche Zahl ist. Zum Beweis durch vollständige Induktion musst du folgendes leisten:

1. **Induktionsanfang**: Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist.

2. **Induktionsschritt**: Beweise, dass wenn $A(n=k)$ wahr ist, auch $A(n=k+1)$ wahr sein muss. Dabei können folgende Teilschritte identifiziert werden:

   2a. **Induktionsvoraussetzung**: Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein bestimmtes $k \in \mathbb{N}$.

   2b. **Induktionsbehauptung**: Die Aussage $A(k+1)$ ist wahr.

   2c. **Beweis des Induktionsschritts**: Beweise, dass unter Annahme der Induktionsvoraussetzung die Induktionsbehauptung folgt.

Schritt 2 hat dementsprechend folgende Form:

2a Induktionsvoraussetzung (Anfang des Beweises; ist gegeben)

$\vdots$

(2c Der Beweis)

$\vdots$

2b Induktionsbehauptung (Ziel des Beweises; soll bewiesen werden)

Oftmals (insbesondere bei einfachen Aufgaben) werden Schritt (2a) und (2b) weggelassen, wenn sie dem Autor zu trivial erscheinen, um aufgeschrieben zu werden. Dies kann möglicherweise auch auf den Induktionsanfang bzw. den Induktionsschritt zutreffen, wenn der Autor z. B. sie für zu einfach hält. Manchmal gibt der Autor eines Buches auch nur den Hinweis, dass eine bestimmte Aufgabe durch vollständige Induktion bewiesen werden kann und überlässt dem Leser diesen Beweis. In diesem Kapitel werden aber alle Teilschritte aufgeführt.

Wenn wir nun die obige Beweismethode in mathematischer Sprache formulieren, erhalten wir die Definition der vollständigen Induktion.

Definition 2. Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussageform in der freien Variablen $n \in \mathbb{N}$. Sei $A(1)$ (oder $A(0)$) eine wahre Aussage (Induktionsanfang) und die Implikation $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt (Induktionsschritt), dann ist die Aussageform allgemeingültig in $\mathbb{N}$.

Hier noch eine Grafik, welche das Prinzip der vollständigen Induktion gut veranschaulicht:

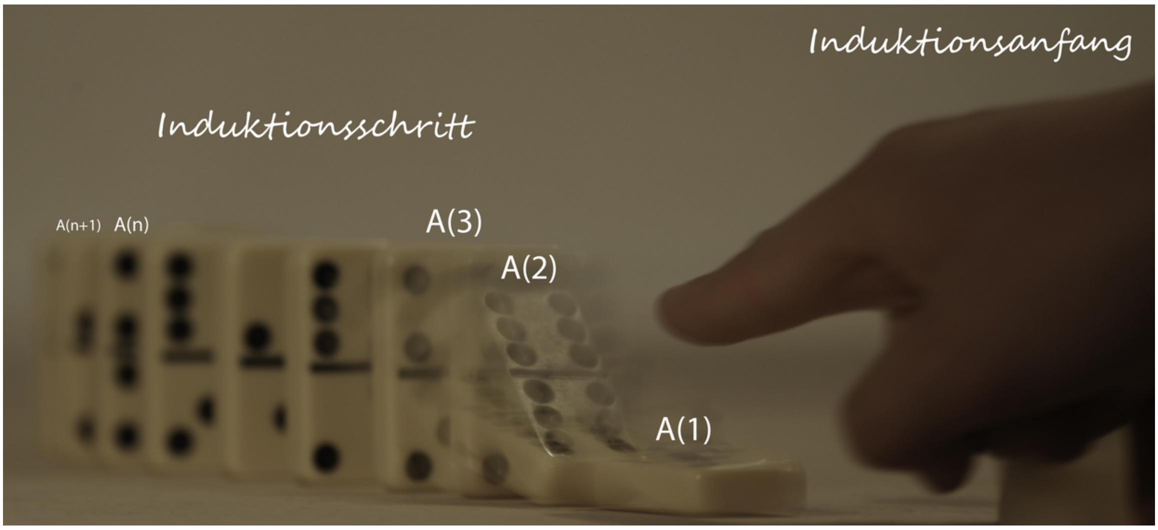


Abb. 17

12. Lösungshilfe und Beispielaufgaben

12.1. Schema zum Beweis mit vollständiger Induktion

Die folgende Übersicht hilft dir einen Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion zu führen. Das hier vorgestellte Lösungsschema sollst du aber nicht als absolutes Beweisschema verstehen! Zwar kannst du viele Induktionsbeweise nach diesem Schema lösen, es gibt aber auch Ausnahmen! Siehe dieses Schema deshalb nur als *Hilfe* an. Dieses Lösungsschema bezieht sich außerdem nur auf das Induktionsprinzip, wie es im Abschnitt „Prinzip der vollständigen Induktion“[1] definiert wurde.

12.1.1. Beweis finden

Keine Beweise fallen vom Himmel - so auch keine Induktionsbeweise. Bevor du den gesuchten Beweis aufschreiben kannst, musst du diesen erstmal finden (*klingt logisch, oder? ^^*). Das folgende Schema gibt dir einen guten Weg vor, wie du allgemein einen Induktionsbeweis findest. Die einzelnen Fragen bzw. Schritte, kannst du auf ein Schmierpapier oder im Kopf beantworten bzw. durchführen. In den nächsten Abschnitten wird dieses Schema an typischen Aufgabenstellungen angewandt, wo auch für die jeweilige Aufgabenstellung typische Lösungsmethoden vorgestellt werden.

Vorüberlegungen **Fragen/Schritt**	**Anmerkungen**
Über welche Variable wird die Induktion geführt?	Oftmals ist diese Variable *n* (hat sich so etabliert). Dies muss aber nicht sein und ist aufgabenabhängig.
Wie lautet die Aussageform, deren Allgemeingültigkeit zu beweisen ist?	Mach dir klar, wie die Aussageform aussieht, deren Allgemeingültigkeit du beweisen möchtest/musst.

Induktionsanfang **Fragen/Schritt**	**Anmerkungen**
Welchen Wert hast du für die Induktionsvariable im Induktionsanfang? Welches ist die kleinste natürliche Zahl für den Induktionsanfang?	Meistens geht aus der Aufgabenstellung hervor, wie dein Induktionsanfang lautet. Manchmal ist dies aber nicht der Fall und du musst den Induktionsanfang selber herausfinden (insbesondere bei einigen Aufgaben zu Ungleichungen). Hier kann es helfen, den Induktionsanfang durch Probieren herauszufinden (siehe Beispiel zu Ungleichungen).
Wie lautet die zu beweisende Aussage für den Induktionsanfang	Setze in die Aussageform die oben gefundene Zahl für den Induktionsanfang ein.

1 Kapitel 12 auf Seite 81

Induktionsanfang **Fragen/Schritt**	**Anmerkungen**
Finde einen Beweis für den Induktionsanfang	Hier musst du den Beweis für die oben gefundene Aussage finden. Bei Gleichungen bzw. Ungleichungen gelingt dir dies zum Beispiel dadurch, dass du beide Seiten dieser Gleichungen/Ungleichung ausrechnest und die dadurch entstanden Werte vergleichst.

Induktionsschluss **Fragen/Schritt**	**Anmerkungen**
Wie lautet die Induktionsvoraussetzung?	-
Wie lautet die Induktionsbehauptung?	Achte darauf, dass du die Induktionsbehauptung richtig formulierst (Klammern setzen). Wenn du zum Beispiel die zu bearbeitende Aussageform lautet $A(n) : 2n+1$ ist ungerade lautet die Induktionsbehauptung $A(n = k+1)$ *nicht* $2k+2$ ist ungerade *sondern* $2(k+1)+1 = 2k+3$ ist ungerade.
Finde den Beweis für den Induktionsschritt	Finde den Beweis dafür, dass unter Annahme der Induktionsvoraussetzung die Induktionsbehauptung gilt. Hier ist Kreativität gefragt, denn es gibt kein Beweisschema-F. Aber meistens kannst du Aufgaben des gleichen oder ähnlichen Typus auf ähnliche Weise lösen (*nicht immer, natürlich*). Das heißt, wenn du schon einige Induktionsbeweise gesehen oder gelöst hast, wird es dir leichter fallen, ähnliche Aufgaben zur vollständigen Induktion zu lösen (deswegen werde ich 3 typische Beispielaufgaben zur vollständigen Induktion vorstellen). Es heißt mal wieder: Übung macht den Meister!

12.1.2. Beweis aufschreiben

Nachdem du dir den Beweis im Kopf oder auf ein Schmierpapier überlegt hast, geht es nun darum, einen sauberen und formal richtigen Beweis aufzuschreiben. Das folgende Schema gibt dir eine mögliche Struktur vor, wie du dies machen könntest (Vergleiche das folgende Schema auch mit dem Abschnitt „Das Prinzip der vollständigen Induktion“[2]):

Zu beweisende Aufgabe:

<zu beweisende Aussageform aufschreiben>

1. Induktionsanfang:

<gefundenen Beweis für den Induktionsanfang aufschreiben>

2 Kapitel 12 auf Seite 81

2a. Induktionsvoraussetzung: <Induktionsvoraussetzung formulieren>

2b. Induktionsbehauptung: <Induktionsbehauptung formulieren>

2c. Beweis des Induktionsschrittes:

<gefundenen Beweis für den Induktionsschritt aufschreiben>

Bedenke, dass das obige Beweisschema nur eine Möglichkeit ist, einen Beweis für vollständige Induktion aufzuschreiben, an dem du dich aber gut orientieren kannst. Sollte mal in einer Klausur, Test oder ähnlichem dir ein Paar Punkte der vollständigen Induktion fehlen, schreibe die restlichen trotzdem auf. Oft geben sie auch schon Punkte.

12.2. Beispiel 1 : Beweis einer Summenformel

12.2.1. Aufgabe

Beweise durch vollständige Induktion, dass $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist.

12.2.2. Beweis finden

Summenformeln zu beweisen ist ein typisches Anwendungsgebiet der vollständigen Induktion, wie du bereits in der ersten Beispielaufgabe gesehen hast. Du kannst aber auch Produktgleichungen auf ähnliche Art und Weise lösen, musst aber dabei beachten, dass die Verknüpfung im Produkt die Multiplikation und nicht die Addition ist.

Vorüberlegungen

Frage: Über welche Variable wird die Induktion geführt?

$$n$$

Frage: Wie lautet die zu beweisende Aussageform?

$A(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$ (Der Doppelpunkt steht dabei für „$A(n)$ ist definiert durch ...“)

Induktionsanfang

Frage: Was ist die kleinste sinnvoll einsetzbare natürliche Zahl für n?
Nach der Aufgabenstellung ist $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, also $n \in \{1,2,3,\ldots\}$. Die kleinste, sinnvoll einsetzbare natürliche Zahl ist damit die 1 und stellt demnach unseren Induktionsanfang dar.

Frage: Wie lautet die zu beweisende Aussage für den Induktionsanfang?
Nach dem Einsetzen der 1 für n in der Aussageform erhalten wir die Aussage:

$$A(1) : \sum_{k=1}^{1} (2k-1)^2 = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{3}$$

Aufgabe: Finde einen Beweis für den Induktionsanfang.
Bei Summenformeln musst du die im Induktionsanfang zu entstandene Gleichung verifizieren. Dies erreichst du durch Nachrechnen der beiden Seiten der Gleichung, welche identisch sein müssen. Bei unserer Aufgabe erhalten wir für den linken Term der Gleichung:

$\sum_{k=1}^{1} (2k-1)^2 = (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1^2 = 1$

Für den rechten Term der Gleichung erhalten wir:

$\frac{1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3} = \frac{3}{3} = 1$

Damit stimmen beide Seiten der obigen Gleichung überein, so dass $A(1)$ wahr ist.

Induktionsschritt

Frage: Wie lautet die Induktionsvoraussetzung?
Die Induktionsvoraussetzung $A(n = l)$ lautet $\sum_{k=1}^{l} (2k-1)^2 = \frac{l \cdot (2l-1) \cdot (2l+1)}{3}$ (wir benutzen hier den Variablennamen l, weil der Name k bereits als Index in der Summe vorkommt).

Frage: Wie lautet die Induktionsbehauptung?
Die Induktionsbehauptung $A(n = l + 1)$ lautet $\sum_{k=1}^{l+1} (2k-1)^2 = \frac{(l+1) \cdot (2 \cdot (l+1) - 1) \cdot (2 \cdot (l+1) + 1)}{3}$.

Aufgabe: Finde den Beweis für den Induktionsschritt.
Wir müssen nun beweisen, dass unter Annahme der Induktionsvoraussetzung die Induktionsbehauptung gilt. Bei Summenformeln können meistens folgende Schritte identifiziert werden:

1. Zerlege die Summe der Induktionsbehauptung so, dass du die Induktionsvoraussetzung anwenden kannst.

Dazu musst du von der Summe so viele Summanden extra schreiben (oder in einer eigenen Summe zusammenfassen), dass die restliche Summe der Summe in der Induktionsvoraussetzung entspricht:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{l+1} (2k-1)^2}_{\text{linke Seite der Induktionsbehauptung}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{l} (2k-1)^2}_{\text{hier lässt sich die Induktionsvorraussetzung einsetzen}} + \underbrace{(2 \cdot (l+1) - 1)^2}_{\text{restlicher Summand}}$$

2. Induktionsvoraussetzung anwenden.

Nun kann die Induktionsvoraussetzung verwendet werden:

$$\sum_{k=1}^{l+1}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{l}(2k-1)^2 + (2\cdot(l+1)-1)^2$$

$$\downarrow \text{Induktionsvorraussetzung verwenden}$$

$$= \frac{l\cdot(2l-1)\cdot(2l+1)}{3} + (2\cdot(l+1)-1)^2$$

Somit müssen wir jetzt die Gleicheit folgender beider Terme beweisen:

$\frac{l\cdot(2l-1)\cdot(2l+1)}{3} + (2\cdot(l+1)-1)^2 = \frac{(l+1)\cdot(2\cdot(l+1)-1)\cdot(2\cdot(l+1)+1)}{3}$

3. Termumformungen finden, um die eine Seite der Gleichung in die andere zu überführen.

Wie du auf die notwendigen Termumformungen kommst wird im Abschnitt „Terme - Notwendige Termumformungen finden“[3] beschrieben.

<u>*Aufgabe*</u>*: Versuche obige Gleichung durch Termumformumgen zu beweisen*

$$\begin{array}{rcl}
\frac{l\cdot(2l-1)\cdot(2l+1)}{3} + (2\cdot(l+1)-1)^2 & & \frac{(l+1)\cdot(2\cdot(l+1)-1)\cdot(2\cdot(l+1)+1)}{3} \\
\frac{l\cdot(2l-1)\cdot(2l+1)+3\cdot(2l+1)^2}{3} & & \frac{(l+1)\cdot(2l+1)\cdot(2l+3)}{3} \\
\frac{(2l+1)\cdot(l\cdot(2l-1)+3\cdot(2l+1))}{3} & & \frac{(l+1)\cdot(2l+1)\cdot(2l+3)}{3} \\
\frac{(2l+1)\cdot(2l^2-l+6l+3)}{3} & & \frac{(2l+1)\cdot(2l^2+3l+2l+3)}{3} \\
\frac{(2l+1)\cdot(2l^2+5l+3)}{3} & = & \frac{(2l+1)\cdot(2l^2+5l+3)}{3}
\end{array}$$

12.2.3. Beweis aufschreiben

Nun kann der Beweis nach dem obigen Schema aufgeschrieben werden.

<u>*Aufgabe*</u>*: Schreibe den obigen Beweis nach dem obigen Schema auf.*
Zu beweisende Aussageform:

$A(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$

1. Induktionsanfang: Für $n=1$ gilt:

$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^2 = (2\cdot 1-1)^2 = 1^2 = 1 = \frac{3}{3} = \frac{1\cdot(2\cdot 1-1)\cdot(2\cdot 1+1)}{3}$

Damit ist $A(1)$ wahr.

2a. Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{l}(2k-1)^2 = \frac{l\cdot(2l-1)\cdot(2l+1)}{3}$.

2b. Induktionsbehauptung: $\sum_{k=1}^{l+1}(2k-1)^2 = \frac{(l+1)\cdot(2\cdot(l+1)-1)\cdot(2\cdot(l+1)+1)}{3}$.

2c. Beweis der Induktionsbehauptung: Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{l+1}(2k-1)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{l}(2k-1)^2\right) + (2\cdot(l+1)-1)^2 && (12.1)\\
&\downarrow \text{Induktionsvoraussetzung verwenden} && (12.2)\\
&= \frac{l\cdot(2l-1)\cdot(2l+1)}{3} + (2\cdot(l+1)-1)^2 && (12.3)\\
&= \frac{l\cdot(2l-1)\cdot(2l+1)+3\cdot(2l+1)^2}{3} && (12.4)\\
&= \frac{(2l+1)\cdot(l\cdot(2l-1)+3\cdot(2l+1))}{3} && (12.5)\\
&= \frac{(2l+1)\cdot(2l^2-l+6l+3)}{3} && (12.6)\\
&= \frac{(2l+1)\cdot(2l^2+2l+3l+3)}{3} && (12.7)\\
&= \frac{(2l+1)\cdot(2l\cdot(l+1)+3\cdot(l+1))}{3} && (12.8)\\
&= \frac{(l+1)\cdot(2l+1)\cdot(2l+3)}{3} && (12.9)\\
& && (12.10)
\end{aligned}
$$

Damit ist der Induktionsschritt bewiesen.

12.3. Beispiel 2: Beweis einer Ungleichung

12.3.1. Aufgabe

Beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Ungleichung $\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$ gilt.

12.3.2. Lösungsweg

Ungleichungen zu beweisen, ist ein weiteres Problem, bei der die vollständige Induktion oftmals eingesetzt wird. Hier sind die notwendigen Termumformungen oftmals raffinierter als beim Beweis von Summenformeln und man muss geschickte Abschätzungen für Terme finden.

Diese Beispielaufgabe beschreibt eine wichtige Abschätzung der harmonischen Reihe, die noch später im Buch relevant wird (die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ nennt man *harmonische Folge*, die Summe über diese Folge wird dementsprechend *harmonische Reihe* genannt). Die zu beweisende Aussageform lautet:

$$A(n) : \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$$

Frage: Wie lautet der Induktionsanfang?
Fangen wir wie im obigen Beispiel mit dem Induktionsanfang an. Wie oben ist die kleinste sinnvoll einsetzbare Zahl für n die 1. Die Aussage für A(1), die wir beweisen müssen, lautet:

$A(1) : \sum_{k=1}^{2^1-1} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$

Nun Rechnen wir die linke Seite der Ungleichung aus und erhalten:

$\sum_{k=1}^{2^1-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1$

Da 1 größer ist als $\frac{1}{2}$, ist damit die Ungleichung für $n = 1$ und somit der Induktionsanfang bewiesen.

Nun geht es mit dem Induktionsschritt weiter. Nach Induktionsvorausetzung nehmen wir an, dass $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$. Unsere Aufgabe ist es, zu beweisen, dass unter dieser Annahme $\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{(n+1)}{2}$ sein muss (*Beachte, dass wir für die Induktionsbehauptung überall wo n stand,* $n+1$ *eingesetzt haben*). Da wir in der vollständigen Induktion irgendwie die Induktionsvorrausetzung verwenden müssen, sollten wir die Summe so zerlegen, dass die Summe der Induktionsvorrausetzung auftritt (*Mal schauen, ob uns das weiterhilft*). Es ist $\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = (\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k}) + (\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k})$.

Die rechte Seite der Ungleichung lässt sich auch in eine Summe schreiben (dadurch können wir beide Seiten besser miteinander vergleichen). Es ist $\frac{n+1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ und somit lautet unsere zu beweisende Ungleichung:

$$(\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k}) + (\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k}) \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$$

Wir wissen nach der Induktionsvoraussetzung bereits, dass $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$ ist. Wenn wir nun beweisen könnten, dass $\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$ wäre, wäre unsere Induktionsbehautung bewiesen. Hier brauchen wir eine geschickte Abschätzung der Summe. Wir wissen, dass die Summanden $\frac{1}{k}$ der Summe mit wachsenden k immer kleiner werden. Da wir die Summe nach unten abschätzen müssen, könnten wir alle Summanden mit dem kleinsten in der Summe vorkommenden Summanden abschätzen. Dies gibt uns die Möglichkeit die Summe zu vereinfachen und daraus möglicherweise eine Abschätzung zu bekommen. Der kleinste Summand wäre $\frac{1}{2^{n+1}-1}$. Da sich mit $\frac{1}{2^{n+1}}$ wahrscheinlich besser die Summe zusammenfassen lässt und $\frac{1}{2^{n+1}-1} > \frac{1}{2^{n+1}}$ ist, versuchen wir mal die Abschätzung mit $\frac{1}{2^{n+1}}$. Wir erhalten:

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} 1$$

Frage: Wie viele Summanden hat nun die Summe $\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}$*?*
Die Summe hat $2^{n+1}-1-2^n+1 = 2^n\cdot(2-1) = 2^n$ Summanden.

Damit ergibt sich die Ungleichung:

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}1 = \frac{1}{2^{n+1}}\cdot 2^n = \frac{1}{2}$$

Somit haben wir den Beweis für die Induktionsbehauptung gefunden.

12.3.3. Beweis

Die zu beweisende Aussageform lautet:

$$A(n): \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$$

1. Induktionsanfang: Für $n=1$ ist

$$\sum_{k=1}^{2^1-1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1 \geq \frac{1}{2}$$

2a. Induktionsvoraussetzung: Sei $\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$.

2b. Induktionsbehauptung: Wenn $\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$ ist, dann ist $\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} \geq \frac{n+1}{2}$.

2c. Beweis der Induktionsbehauptung: Zunächst gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}1 = \frac{1}{2^{n+1}}\cdot 2^n = \frac{1}{2}$$

Damit ist wegen der Induktionsvoraussetzung
$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} = (\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k}) + (\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}) \geq \frac{n}{2}+\frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$. qed.

12.4. Beispiel 3: Teilbarkeit

12.4.1. Aufgabe

Beweise, dass alle Zahlen der Form $a_m = m^3+5m$ mit $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ durch 6 teilbar sind.

12.4.2. Lösungsweg

Als letztes Beispiel betrachten wir eine Aufgabe zur Teilbarkeit.

Frage: Über welche Variable ist die Induktion zu führen?
Die Induktionsvariable ist m.

Frage: Wie lautet die zu beweisende Aussageform?
$A(m) : a_m = m^3 + 5m$ ist durch 6 teilbar.

Im Induktionsanfang musst du wie bei den obigen Beispielen meist die kleinste sinnvoll einsetzbare Zahl einsetzen und die ausgerechnete Zahl auf die gewünschte Teilbarkeit überprüfen (Beachte dabei, dass jede ganze Zahl die Teiler von 0 ist).

Frage: Wie lautet der Induktionsanfang?
Der Induktionsanfang ist laut Aufgabenstellung für $m = 0$ zu führen. Wir erhalten $a_0 = 0^3 + 5 \cdot 0 = 0$, was durch 6 teilbar ist.

Frage: Wie lautet die Induktionsvoraussetzung?
Die Zahl $a_m = m^3 + 5m$ ist durch 6 teilbar.

Frage: Wie lautet die Induktionsbehauptung?
Die Zahl $a_{m+1} = (m+1)^3 + 5(m+1)$ ist durch 6 teilbar.

Im Beweis des Induktionsschritts hilft es meist, den erhaltenen Term, den du auf Teilbarkeit überprüfen sollst, durch Termumformungen auf eine Summe zu bringen, bei der du weißt, dass jeder seiner Summanden durch die gewünschte Zahl teilbar ist. Versuche dabei die Summe in so eine Struktur zu bringen, dass du die Induktionsvoraussetzung verwenden kannst.

Frage: Wie lautet der Beweis für den Induktionsschritt?
Wir erhalten nach obiger Vorgehensweise:

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= (m+1)^3 + 5(m+1) \\ &= m^3 + 3m^2 + 3m + 1 + 5m + 5 \\ &= (m^3 + 5m) + 6 + (3m^2 + 3m) \\ &= (m^3 + 5m) + 6 + 3 \cdot m \cdot (m+1) \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass $m^3 + 5m$ durch 6 teilbar ist. Der Summand 6 ist auch durch 6 teilbar. Und wie sieht es mit $3 \cdot m \cdot (m+1)$ aus? Da entweder m oder $m+1$ gerade ist, ist entweder m oder $m+1$ durch 2 teilbar. Damit muss auch $3 \cdot m \cdot (m+1)$ durch 6 teilbar sein.

12.4.3. Beweis

Aufgabe: Schreibe den Beweis auf.
Zu beweisende Aussageform:

$A(m): \ a_m = m^3 + 5m$ ist durch 6 teilbar.

1. Induktionsanfang: Für $m = 0$ ist $a_0 = 0^3 + 5 \cdot 0 = 0$ durch 6 teilbar.

2a. Induktionsvoraussetzung: Es ist $m^3 + 5m$ durch 6 teilbar.

2b. Induktionsbehauptung: $(m+1)^3 + 5(m+1)$ ist durch 6 teilbar.

2c. Beweis der Induktionsbehauptung: Es ist $a_{m+1} = (m+1)^3 + 5(m+1) = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 + 5m + 5 = (m^3 + 5m) + 6 + 3m(m+1)$. Da der Summand 6, der Summand $m^3 + 5m$ nach Induktionsvorraussetzung und $3m(m+1)$ durch 6 teilbar sind (es ist entweder m oder $m+1$ durch 2 teilbar), ist auch a_{m+1} durch 6 teilbar. Nice.

13. Häufige Fragen

Muss man zum Beweis mit vollständiger Induktion immer den Induktionsanfang und den Induktionsschritt durchführen oder kann man sich auch mal einen der beiden Schritten sparen?

Zur vollständigen Induktion gehört *immer* der Induktionsanfang und der Induktionsschritt. Wenn du einen der beiden Schritten weglassen würdest, wäre deine Lösung unvollständig und würde dann *keine* Beweiskraft besitzen. Die Antwort auf diese Frage kannst du dir auch über die Analogie zur Dominoreihe überlegen: Wenn du den Induktionsanfang weglassen würdest, entspricht dies der Tatsache, dass du den ersten Dominostein *nicht* umstoßen würdest, was zur Folge hätte, dass kein Dominosteinstein umfallen würde. Wenn du den Induktionsschritt weglassen würdest, könntest du nach der Analogie nicht gewährleisten, dass ein Dominostein beim Umfallen auch seinen Nachfolger mitreisst. Damit könntest du nicht gewährleisten, dass alle Dominosteine umfallen (2 Dominosteine könnten viel zu weit voneinander entfernt stehen). Deine Lösung hätte dann keine Beweiskraft.

Da die Dominoreihe unendlich ist, benötigt sie auch unendlich lange zum Umfallen. Dies würde bedeuten, dass ein Beweis mit vollständiger Induktion nie vollständig wäre (da zu keiner Zeit alle Steine umgefallen sind). Heißt das nicht, dass man die vollständige Induktion nie zu Ende führen könnte?

Diese Frage zeigt eine der Grenzen der Dominoanalogie. Die Zeit, die ein Dominostein benötigt, um umzufallen und den nächsten Stein anzustoßen, ist in der Mathematik nicht relevant. Was zählt ist, dass man jeden Stein in endlich vielen Schritten erreichen kann.

Mit der Formulierung, die Aussageform sei für alle natürlichen Zahlen gültig, ist also eigentlich gemeint, dass man für die freie Variable n in der Aussageform A(n) irgendeinen, beliebigen Wert einsetzen kann und die daraus resultierende Aussage wahr sein muss. Dementsprechend lautet unser Problem, dass wir eine konkrete (aber völlig beliebige) natürliche Zahl N haben und beweisen müssen, dass die Aussage A(N) wahr ist. Dies können wir aber in endlich vielen Schritten erreichen, indem wir einen Beweis aus dem Induktionsanfang und N Induktionsschritten zusammenbauen.

Teil IV.

Mengenlehre

14. Mengenlehre

14.1. Definition der Menge

Was ist eine Menge? Als Definition der Menge möchte ich die originale Definition von w:Georg Cantor[1], dem Begründer der Mengenlehre, verwenden:
Definition 3. Cantorsche Definition der Menge

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.[2]

Dabei müssen die Objekte, die gedanklich zu einer Menge zusammengefasst werden, keine gemeinsamen Eigenschaften besitzen. Sie können sehr unterschiedlich sein.

Zur Bezeichnung von Mengen werden in der Regel Großbuchstaben verwendet. Um aufzuschreiben, dass ein Objekt x Element einer Menge M ist, schreibt man $x \in M$ („x ist ein Element von M“). Die Schreibweise, um deutlich zu machen, dass ein Objekt y kein Element der Menge M ist, ist $y \notin M$ („y ist kein Element von M“).

14.1.1. Beispiele

Stell dir folgende Ansammlung von Objekten vor:

1 `http://de.wikipedia.org/wiki/Georg%20Cantor`
2 Georg Cantor: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. In: w:Mathematische Annalen ^{`http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematische%20Annalen`} 46 (1895), S. 31.

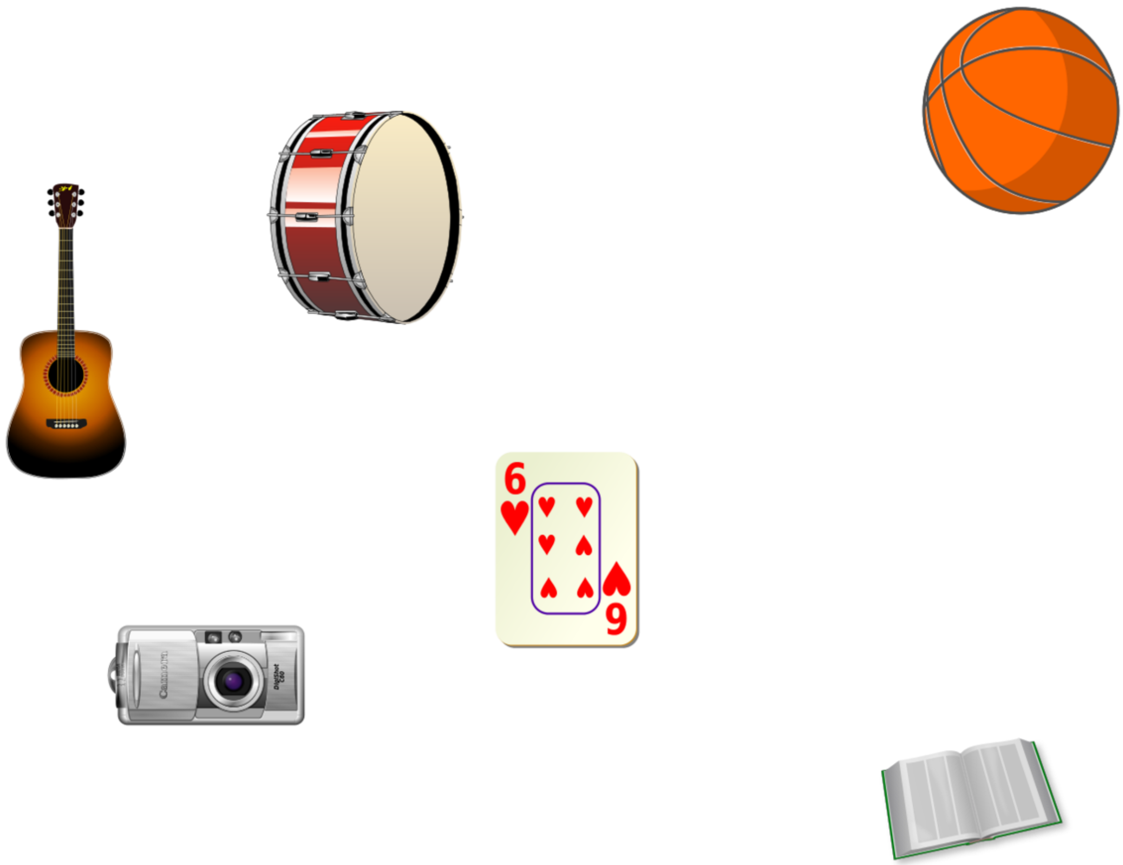


Abb. 18

Aus dieser Ansammlung können wir die vier Elemente Trommel, Spielkarte, Digitalkamera und Gitarre gedanklich zu einer Menge zusammenfassen:

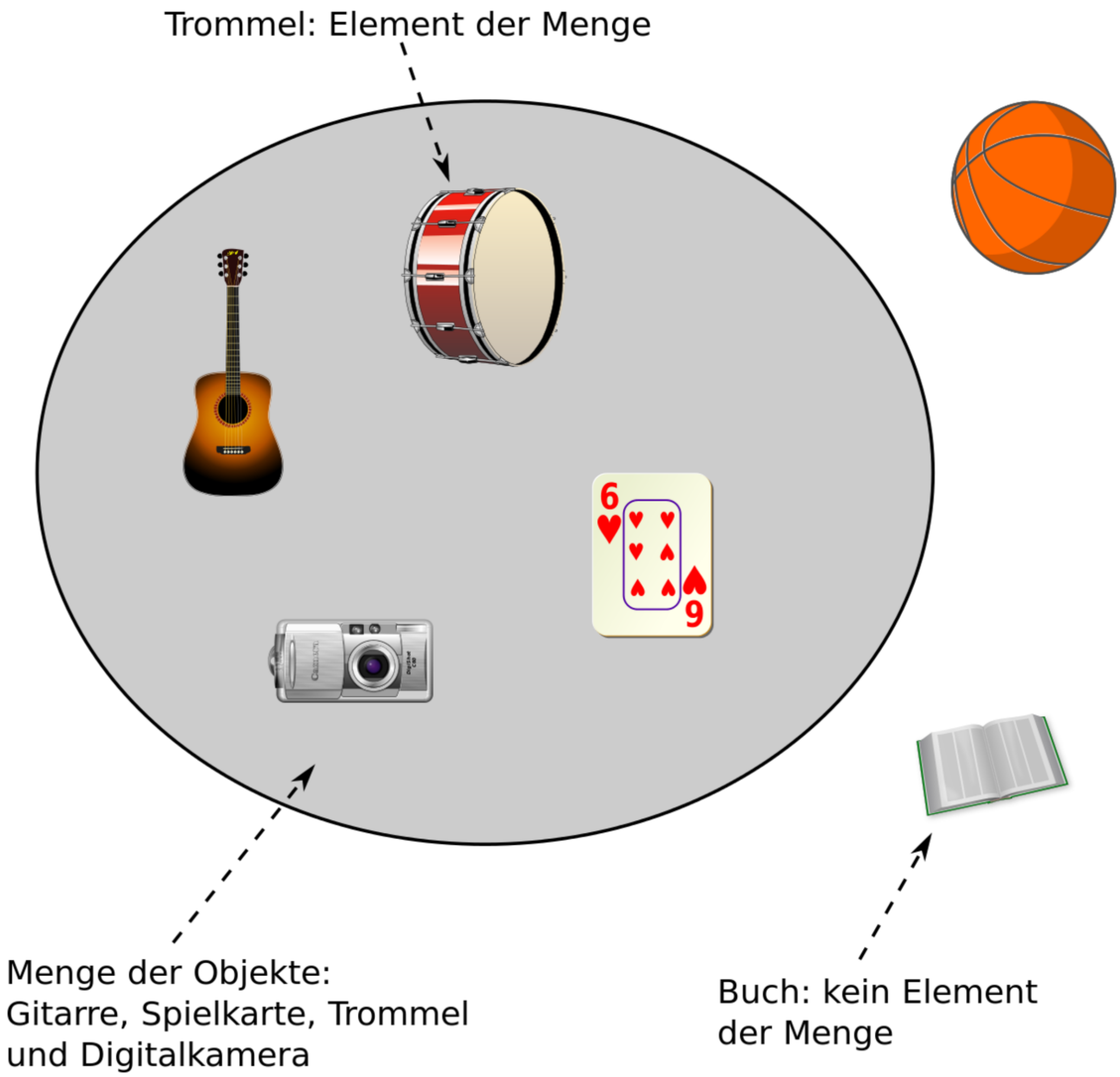


Abb. 19

Wenn wir die gerade von uns in Gedanken gebildete Menge mit M bezeichnen, so können wir aufschreiben:

- Trommel $\in M$ („Die Trommel ist ein Element der Menge M.“)
- Buch $\notin M$ („Das Buch ist kein Element der Menge M.“)

Ein weiteres Beispiel für eine Menge ist Menge der natürlichen Zahlen. Sie ist die gedankliche Zusammenfassung aller natürlicher Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, usw. zu einer Menge. Dieser Menge wird das Symbol $\mathbb{N}$ zugeordnet. Weitere wichtige Mengen von Zahlen sind:
Beweis 3. *wichtige Mengen von Zahlen*

- $\mathbb{N}$ - die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z}$ - die Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$ - die Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ - die Menge der reellen Zahlen

- $\mathbb{C}$ - die Menge der komplexen Zahlen

14.2. Schreibweisen

Es gibt zwei mögliche Schreibweisen, um Mengen zu beschreiben: die *aufzählende Mengenschreibweise* und die *beschreibende Mengenschreibweise*.

14.2.1. Aufzählende Mengenschreibweise

Bei der aufzählenden Mengenschreibweise werden alle Objekte, die gedanklich zu dieser Menge zusammengefasst werden, aufgeschrieben. Dabei werden diese in geschweiften Klammern $\{\}$ gesetzt und durch Kommata „,“ oder Semikolons „;“ getrennt. Die obige Beispielmenge B der Trommel, der Spielkarte, der Digitalkamera und der Gitarre schreiben wir in der aufzählenden Schreibweise so:

$$B = \{\text{Trommel, Spielkarte, Digitalkamera, Gitarre}\}$$

Weitere Beispiele der aufzählenden Mengenschreibweise sind:
Beweis 4. *Beispiele für die aufzählende Mengenschreibweise*

- $C = \{1, 2, 3, 4\}$ (Menge der Zahlen 1, 2, 3 und 4)
- $D = \{25, -16, 9, \pi\}$ (Menge der Zahlen 25, -16, 9 und π)
- $E = \{0; 0,5; 0,75\}$ (Menge der Zahlen 0, 0,5 und 0,75)

Bei der aufzählenden Mengenschreibweise spielt die Reihenfolge, in der die Elemente der Menge aufgezählt werden, keine Rolle. Es gibt auch keine doppelten Elemente. Wenn ein Objekt öfters aufgezählt wird, so ist dies gleichbedeutend damit, als wenn dieses Objekt nur einmal aufgeschrieben sein würde:

$$\{1,2,5\} = \{5,1,2\}$$

$$\{1,2,2,5,2\} = \{1,2,5\}$$

Der Nachteil der aufzählenden Mengenschreibweise ist, dass mit ihr nur Mengen mit einer endlichen Anzahl an Elementen eindeutig definiert werden können. Möchte man mit der aufzählenden Mengenschreibweise eine unendliche Menge definieren, so muss man zwangsläufig mit Pünktchen oder der Abkürzung „usw.“ den Leser dazu auffordern, die Aufzählung in Gedanken fortzuführen. So könnte man für die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen schreiben:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Jedoch ist die aufzählende Schreibweise für unendliche Mengen nicht eindeutig. Insbesondere ist dann die aufzählende Mengenschreibweise problematisch, wenn zu wenig Elemente angegeben sind, als dass *alle* Leser intuitiv auf dieselbe Menge schließen. Dies illustriert folgendes Beispiel:

Frage: Welche Menge ist mit dem Ausdruck $\{1,2,\ldots\}$ gemeint?
Folgende Mengen sind für den Ausdruck $\{1,2,\ldots\}$ plausibel:

- die Menge der natürlichen Zahlen beginnend bei 1: $\{1,2,\ldots\} = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$
- die Menge der Potenzen von 2: $\{1,2,\ldots\} = \{1,2,4,8,16,\ldots\}$
- die Menge der w:Primzahlen[3] zusammen mit der 1: $\{1,2,\ldots\} = \{1,2,3,5,7,11,\ldots\}$
  Durch den Ausdruck $\{1,2,\ldots\}$ kann also die vom Autor gemeinte Menge nicht eindeutig beschrieben werden.

⚠ Warnung

Es kommt manchmal zu Missverständnissen bei einelementigen Mengen. So ist $\{\mathbb{N}\} \neq \mathbb{N}$, denn $\{\mathbb{N}\}$ ist die *einelementige* Menge, die die Menge der natürlichen enthält, und $\mathbb{N}$ ist die *unendliche* Menge der natürlichen Zahlen.

14.2.2. Beschreibende Mengenschreibweise

Es gibt eine zweite Möglichkeit eine Menge aufzuschreiben, die das Problem der Uneindeutigkeit nicht hat: die *beschreibende Mengenschreibweise*. Bei dieser Schreibweise wird eine Bedingung $A(x)$ in Abhängigkeit einer freien Variablen[4] x angegeben, die als Aussage[5] formuliert ist. Die zu dieser Bedingung zugehörige Menge ist die Menge aller Objekte x, die die Eigenschaft $A(x)$ erfüllen. Die Variable und die Bedingung werden durch einen senkrechten Strich „|“ voneinander getrennt, der als „mit“ ausgesprochen wird. Eine Menge M ist also in beschreibender Mengenschreibweise notiert, wenn sie die Form $M = \{x \,|A(x)\}$ hat. Wenn du diese Definition noch nicht verstanden hast, schau dir erst einmal folgende Beispiele an. Du solltest dann keine Probleme mehr haben.
Beweis 5. *Beispiele für die beschreibende Mengenschreibweise*

- Die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen

  $F = \{x \,|\, \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k-1\}$

  mit Aussprache: $\underbrace{F = \{}_{\text{F ist die Menge}} \quad \underbrace{x|}_{\text{aller } x} \quad \underbrace{\exists k \in \mathbb{N} : x = 2k-1\}}_{\text{für die es ein } k\in\mathbb{N} \text{ gibt, sodass } x \text{ gleich } 2k-1 \text{ ist}}$

- Die Menge aller ganzen Quadratzahlen

  $G = \{x \,|\, \exists y \in \mathbb{Z} : x = y^2\}$

  mit Aussprache: $\underbrace{G = \{}_{\text{G ist die Menge}} \quad \underbrace{x|}_{\text{aller } x} \quad \underbrace{\exists y \in \mathbb{Z} : x = y^2\}}_{\text{für die es eine ganze Zahl } y \text{ gibt, sodass } x \text{ ist gleich } y^2}$

- Die Menge aller irrationalen Zahlen

  $H = \{x \,|\, x \in \mathbb{R} x \notin \mathbb{Q}\}$

4 Kapitel 3.1 auf Seite 23
5 Kapitel 1.1 auf Seite 5

mit Aussprache: $$\underbrace{H=\{}_{\text{H ist die Menge}}\quad\underbrace{x|}_{\text{aller } x \text{ mit}}\quad\underbrace{x\in\mathbb{R}}_{x\text{ in }\mathbb{R}}\underbrace{\qquad}_{\text{und}}\underbrace{x\notin\mathbb{Q}}_{x\text{ nicht in }\mathbb{Q}}\}$$

Sollen mehrere Bedingungen an die Elemente einer Menge gestellt werden, so ist es üblich diese Bedingungen mit Kommata zu trennen anstatt sie mit der Konjunktion[6] zu verknüpfen. Möchtest du also, dass die Menge M die Menge aller Objekte x ist, die die Bedingungen $A_1(x)$, $A_2(x)$ bis $A_n(x)$ erfüllen, so kannst du schreiben $M = \{x \,|\, A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x)\}$. Diese Schreibweise ist gleichbedeutend mit $M = \{x \,|\, A_1(x)A_2(x) \ldots A_n(x)\}$.

Möchtest du die Grundmenge explizit angeben, aus der die Elemente der Menge stammen, so kannst du die Schreibweise $M = \{x \in G \,|\, A(x)\}$ verwenden. Durch diese Schreibweise wird die Menge aller Objekte *x der Menge G* beschrieben, die die Eigenschaft $A(x)$ erfüllen. Diese Schreibweise ist eine Kurzschreibweise für $M = \{x \,|\, x \in GA(x)\}$. Beispielsweise kann die obige Menge $H = \{x|x \in \mathbb{R}x \notin \mathbb{Q}\}$ der Menge der irrationalen Zahlen auch durch die Schreibweise $H = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \notin \mathbb{Q}\}$ beschrieben werden.

14.3. Begriffe der Mengenlehre

14.3.1. Teilmenge

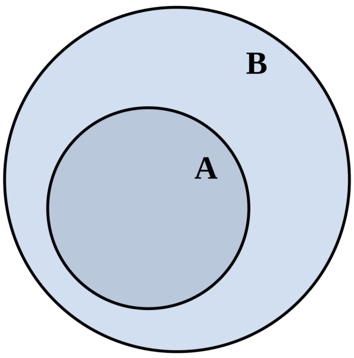


Abb. 20 $A \subseteq B$

6 Kapitel 2.7 auf Seite 17

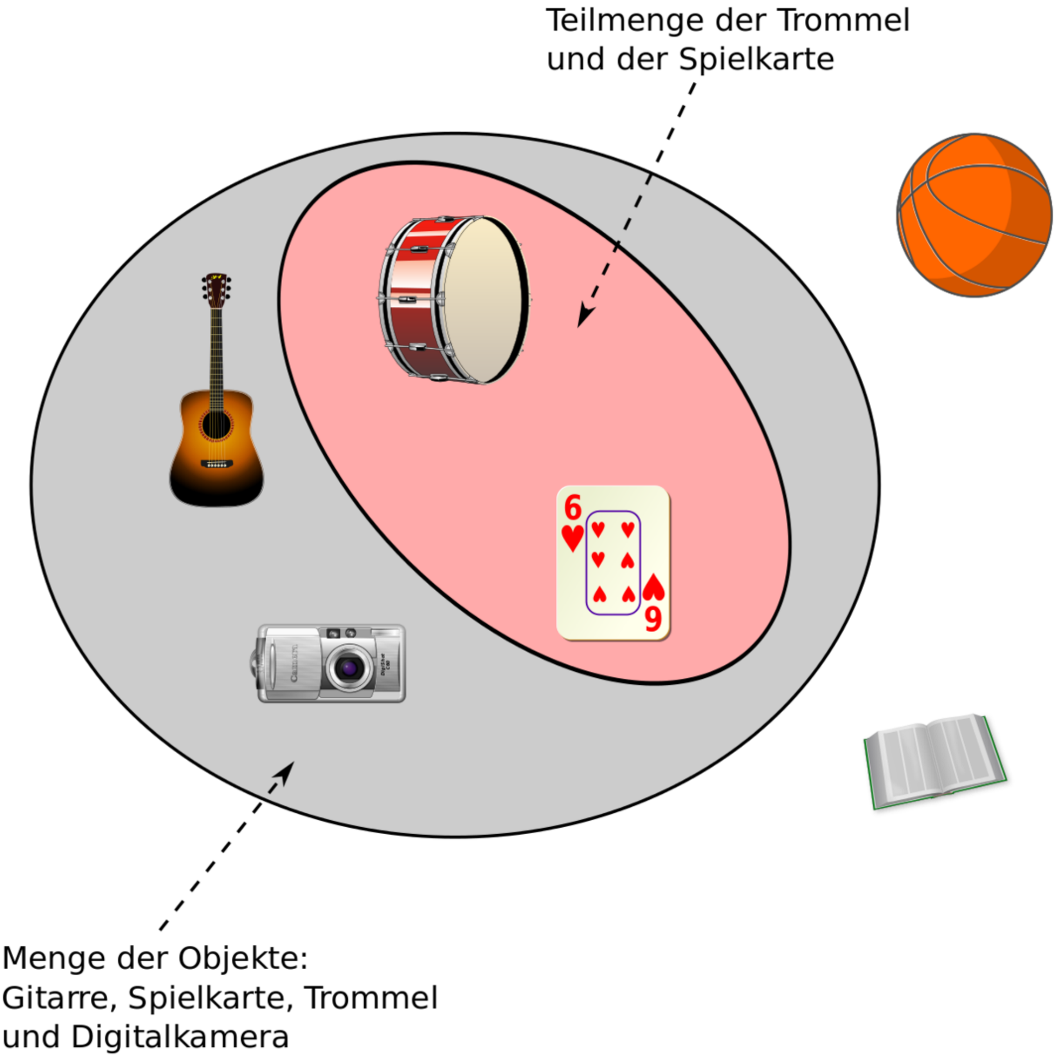


Abb. 21 Die Menge {Trommel, Spielkarte} ist eine echte Teilmenge der Menge {Gitarre, Spielkarte, Digitalkamera, Trommel}

Wenn alle Elemente einer Menge A auch Elemente einer Menge B sind, so wird A eine *Teilmenge* der Menge B genannt. Hierfür schreibt man $A \subseteq B$. Weitere Sprechweisen für $A \subseteq B$ sind: „A ist Untermenge von B“ und „B ist Obermenge von A“. Insbesondere ist jede Menge M Teilmenge von sich selbst ($M \subseteq M$). Möchtest du deutlich machen, dass A *keine* Teilmenge der Menge B, so kannst du $A \nsubseteq B$ schreiben.

Definition 4. Teilmenge

Die Menge A ist eine Teilmenge der Menge B genau dann, wenn alle Elemente der Menge A auch Elemente der Menge B sind (Schreibweise: $A \subseteq B$).

Beweis 6. *Teilmenge*

- $\{5, \pi\} \subseteq \{4, \pi, -1, 5\}$
- $\{5, \pi\} \nsubseteq \{4, \pi, -1\}$
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- $\{5, -1\} \nsubseteq \{z \in \mathbb{Z} | z < 0\}$

- $\{\pi, 3, 0\} \subseteq \{\pi, 3, 0\}$

Ist eine Menge A eine Teilmenge der Menge B und $A \neq B$, so nennt man A eine *echte Teilmenge* der Menge B. Um deutlich zu machen, dass A eine echte Teilmenge der Menge B, schreibt man $A \subsetneq B$.
Definition 5. echte Teilmenge

Die Menge A ist eine echte Teilmenge der Menge B genau dann, wenn A eine Teilmenge der Menge B und A nicht identisch mit B ist (Schreibweise: $A \subsetneq B$).
Beweis 7. *echte Teilmenge*

- $\{5, \pi\} \subsetneq \{4, \pi, -1, 5\}$
- $\{5, \pi\}$ ist keine echte Teilmenge der Menge $\{4, \pi, -1\}$
- $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$
- $\{\pi, 3, 0\}$ ist keine echte Teilmenge der Menge $\{\pi, 3, 0\}$

! Hinweis

In mathematischer Literatur findest du auch die Schreibweise $A \subset B$. Jedoch wird diese Schreibweise nicht in einer einheitlichen Definition gebraucht. So verwenden einige Autoren diese Schreibweise in der Bedeutung „A ist eine Teilmenge von B“ und andere in der Bedeutung „A ist eine echte Teilmenge von B“.

Eine häufig genutzte Methode, um zu zeigen, dass zwei Mengen A und B identisch sind, ist zu zeigen, dass A eine Teilmenge von B ($A \subseteq B$) und B eine Teilmenge von A ($B \subseteq A$) ist. Denn für zwei Mengen A und B gilt folgende Äquivalenz:

$$A = B \;\Leftrightarrow A \subseteq BB \subseteq A$$

Definition 6. Identität von Mengen

Zwei Mengen A und B sind genau dann äquivalent, wenn A eine Teilmenge von B und B eine Teilmenge von A ist.

Verständnisfrage: Es ist $A \Rightarrow B$. Ist dann $\{x|A(x)\} \subseteq \{x|B(x)\}$ oder $\{x|B(x)\} \subseteq \{x|A(x)\}$?
Aus $A \Rightarrow B$ folgt, dass jedes Objekt x, welches die Eigenschaft $A(x)$ erfüllt, auch die Eigenschaft $B(x)$ erfüllt. Damit ist $\{x|A(x)\} \subseteq \{x|B(x)\}$.

Wenn du also mal zeigen möchtest, dass für zwei Mengen $\{x|A(x)\}$ und $\{x|B(x)\}$ die Beziehung $\{x|A(x)\} \subseteq \{x|B(x)\}$ erfüllt ist, so kannst du zeigen, dass $A \Rightarrow B$ ist.

14.3.2. Leere Menge

Die *leere Menge* ist diejenige Menge, die keine Elemente enthält. Für die leere Menge wird das Symbol $\emptyset$ oder die Schreibweise $\{\}$ verwendet.
Definition 7. leere Menge

Die leere Menge $\emptyset$ ist die Menge, die 0 Elemente enthält.
Beweis 8. *leere Menge*

- $\{x|x \neq x\} = \emptyset$

- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$ (Die Nullstellenmenge der Polynomfunktion $f(x) = x^2 + 1$ ist leer)
- $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ (Die Menge $\{\emptyset\}$ ist die *einelementige* Menge der leeren Menge und $\emptyset$ besitzt *keine* Elemente)

Die leere Menge hat folgende Eigenschaften:

- Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge, das heißt für jede Menge M ist $\emptyset \subseteq M$.
- Die einzige Teilmenge der leeren Menge ist die leere Menge: $A \subseteq \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$.
- Jede Existenzaussage[7] über der leeren Menge ist falsch. Dies bedeutet, dass jede Aussage der Form $\exists x \in \emptyset : A(x)$ und der Form $\exists! x \in \emptyset : A(x)$ falsch ist.
- Jede Allaussage[8] über der leeren Menge ist wahr. Dies bedeutet, dass jede Aussage der Form $\forall x \in \emptyset : A(x)$ wahr ist.

7 Kapitel 3.1 auf Seite 23
8 Kapitel 3.1 auf Seite 23

14.3.3. Potenzmenge

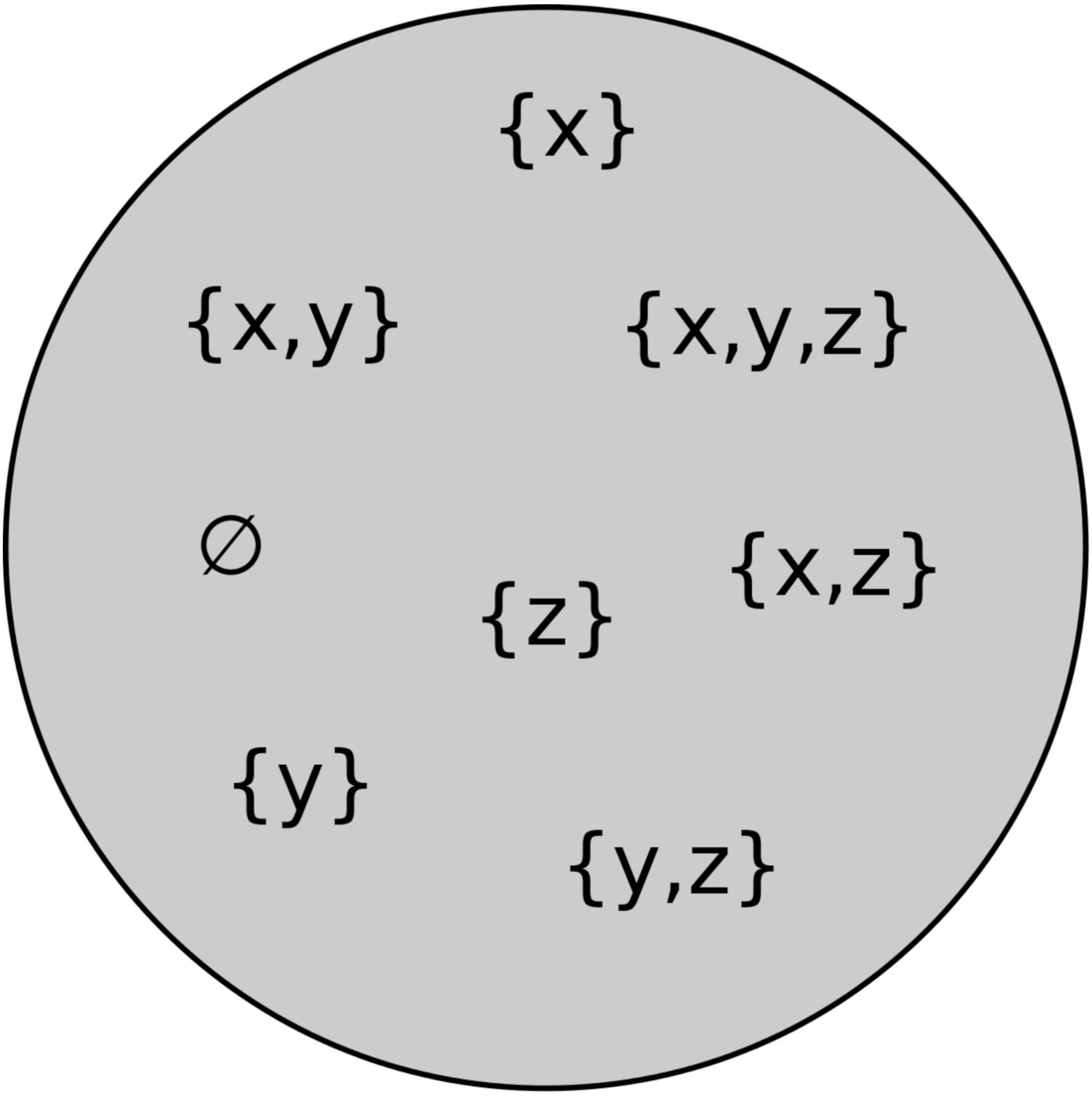


Abb. 22 Die Potenzmenge der Menge $\{x, y, z\}$

Die *Potenzmenge* $\mathscr{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen der Menge M. Es ist also $\mathscr{P}(M) := \{U \,|\, U \subseteq M\}$. Neben $\mathscr{P}(M)$ sind noch die Schreibweisen 2^M und $\mathrm{Pot}(M)$ gebräuchlich.
Definition 8. Potenzmenge

Die Potenzmenge $\mathscr{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen dieser Menge: $\mathscr{P}(M) := \{U \,|\, U \subseteq M\}$
Beweis 9. *Potenzmenge*

- $\mathscr{P}(\{1,2\}) = \{\ \emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}\ \}$
- $\mathscr{P}(\{a\}) = \{\ \emptyset, \{a\}\ \}$
- $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

In der folgenden Animation ist die Erstellung der Potenzmenge $\mathscr{P}(\{x,y,z\})$ dargestellt:

$\mathcal{P}(\{x, y, z\})$

Abb. 23

Im Abschnitt „Folgerungen aus dem binomischen Lehrsatz“[9] werde ich dir zeigen, dass die Potenzmenge einer *endlichen* Menge mit m Elementen genau 2^m Elemente besitzt.

14.4. Grenzen der Mengenbildung

Wie schon Georg Cantor, dem Begründer der Mengenlehre bekannt war, definiert nicht jeder sprachliche Ausdruck sinnvoll eine Menge, auch wenn wir dies intuitiv erwarten würden. Es gibt Ausdrücke, die zu keiner sinnvoll definierten Menge führen. Ein Beispiel für einen solchen Ausdruck ist Russells Antinomie:

Beweis 10. *Russells Antinomie*

Durch die Ausdrücke „R ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.“ beziehungsweise $R = \{x \mid x \notin x\}$ wird keine sinnvolle Menge definiert.

Frage: Wieso definiert $R = \{x \mid x \notin x\}$ keine sinnvolle Menge?
Stell dir vor, es gäbe eine Menge R, die alle Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten. Ist dann $R \in R$? Wäre R ein Element von sich selbst, dann ist gerade nach Definition, R kein Element von sich selbst . Ist $R \notin R$, dann ist nach Definition von R gerade $R \in R$. Wir erhalten also sowohl für $R \in R$ als auch für $R \notin R$ einen Widerspruch.

Analog kannst du so argumentieren: Für die Menge R gilt:

$$x \in R \Leftrightarrow x \notin x$$

Ersetzen wir im obigen Ausdruck die Variable x durch R, dann erhalten wir den Widerspruch:

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R$$

Welche Auswege gibt aus dieser Misere? Der Ausweg liegt darin, die Möglichkeiten der Mengenbildung einzuschränken. Eine in der Mathematik oft benutzte Mengenlehre, die Widersprüche wie Russells Antinomie vermeidet, ist die w:Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre[10]. Sie ist jedoch zu kompliziert, um sie an dieser Stelle einzuführen (die „Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre“ begegnet einem Mathematikstudenten in der Regel erst im Hauptstudium). In den folgenden Kapiteln werden wir jedoch noch nicht an die Grenzen der Mengenbildung stoßen.

14.5. Einzelnachweise

9 Kapitel 35 auf Seite 253
10 `http://de.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre`

15. Verknüpfungen zwischen Mengen

15.1. Einleitendes Beispiel

Stell dir vor, du hast eine Grundmenge M gegeben:

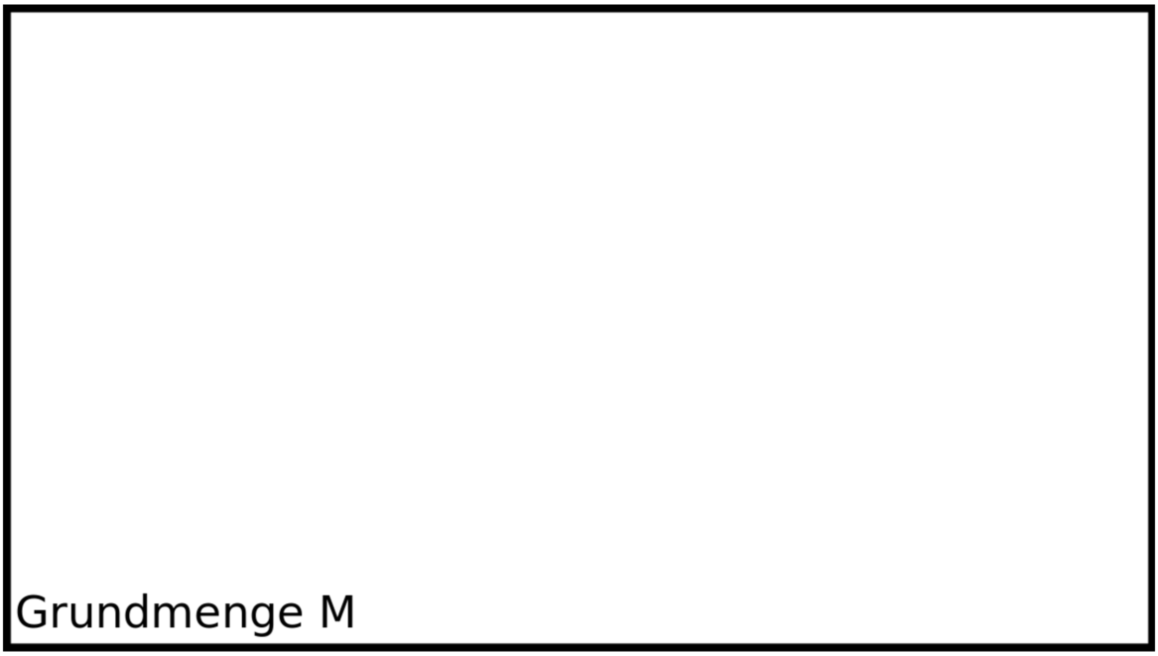


Abb. 24 zentriert

In dieser Grundmenge gibt es eine Menge A:

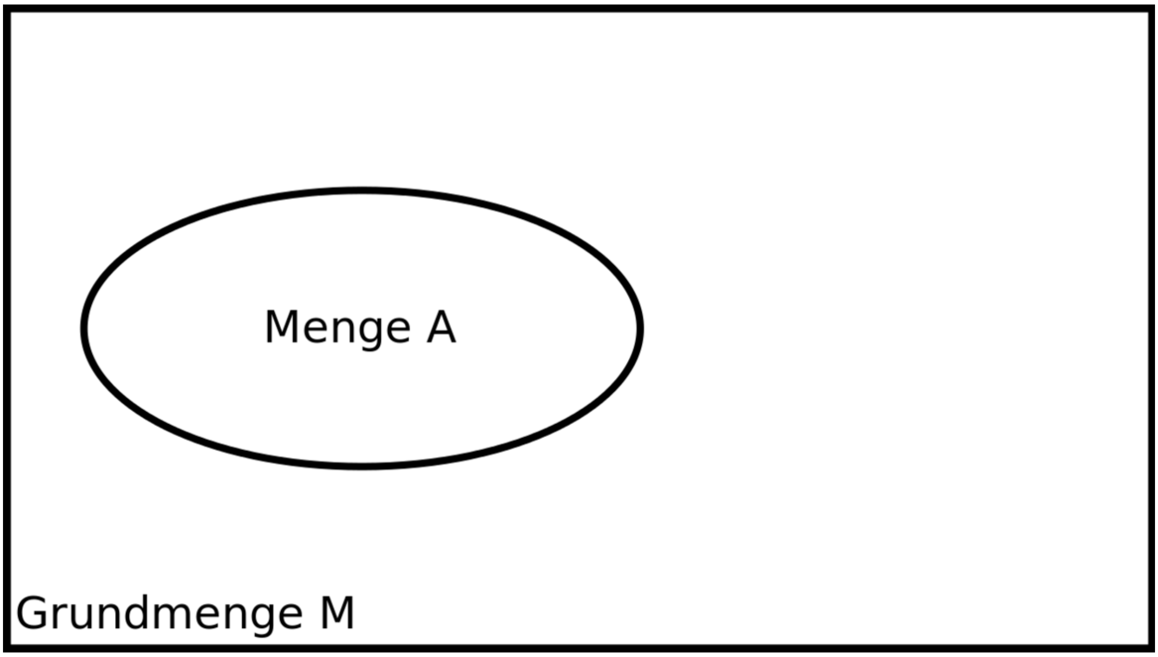


Abb. 25 zentriert

Und eine Menge *B*:

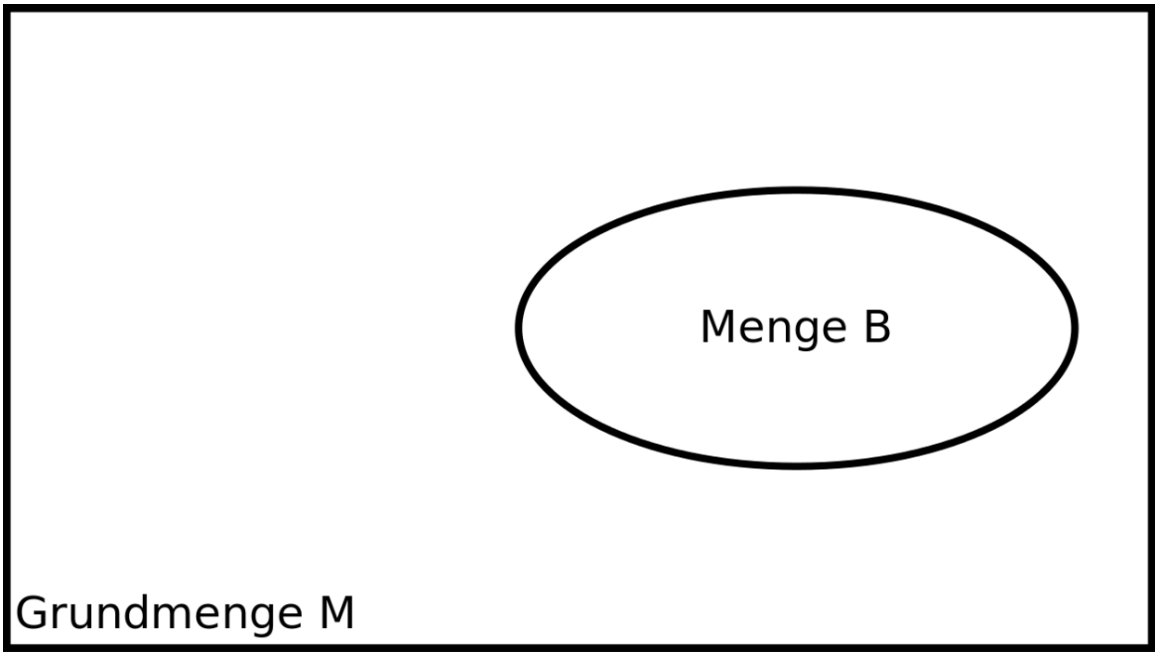


Abb. 26 zentriert

Insgesamt ergibt sich also folgendes Bild:

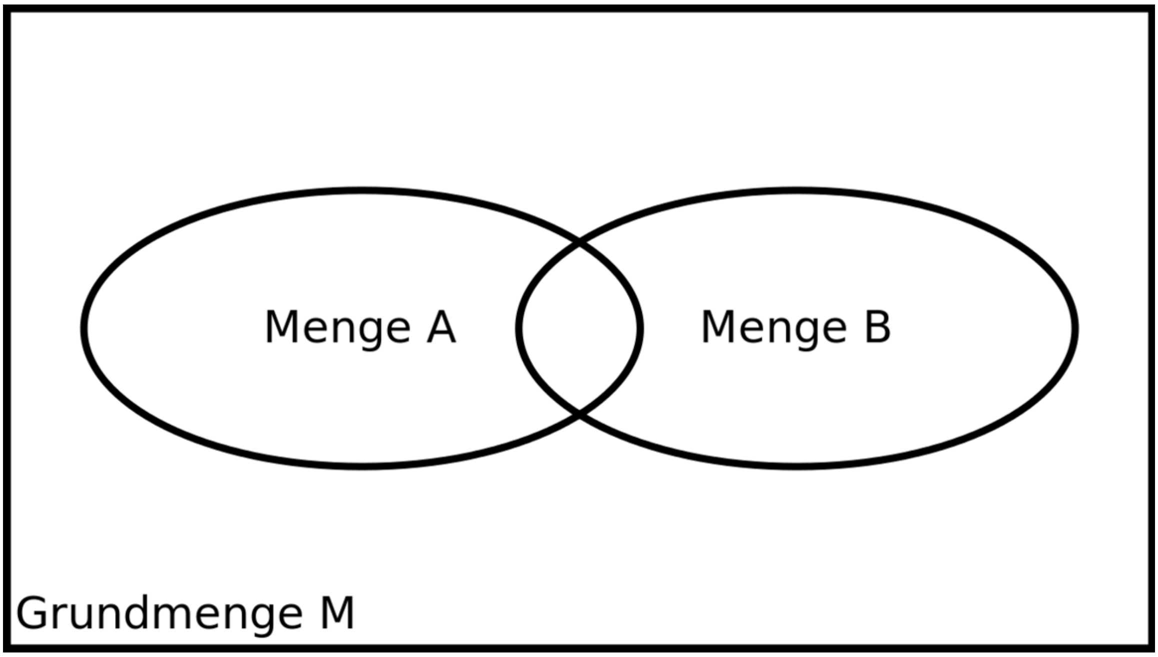


Abb. 27 zentriert

Stell dir nun vor, wir möchten die Menge aller Punkte beschreiben, die in *genau einer* der Mengen A und B enthalten sind:

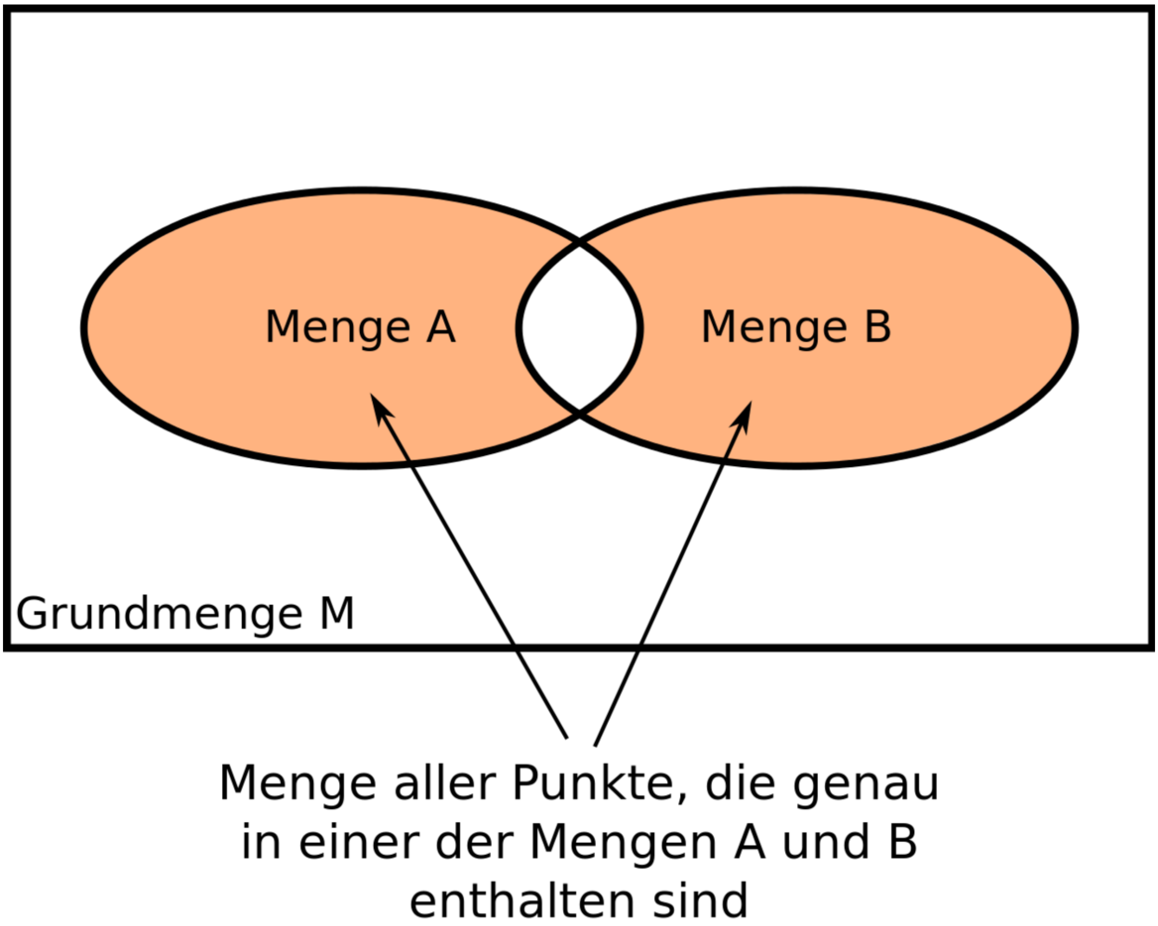


Abb. 28 zentriert

Diese Menge wird *symmetrische Differenz* der Mengen A und B genannt. Man schreibt für diese symmetrische Differenz $A \triangle B$. Hier ist $\triangle$ eine Verknüpfung zwischen zwei Mengen. Der Operator $\triangle$ verknüpft nämlich zwei Mengen A und B zu der Menge $A \triangle B$ der Objekte, die in genau einer der Mengen A und B enthalten sind. Dass $\triangle$ eine Verknüpfung ist, ist analog dazu, dass + eine Verknüpfung ist, die zwei Zahlen a und b zu einer Zahl $a+b$ verknüpft.

Schauen wir uns noch ein weiteres Beispiel an: Stell dir vor, wir wollen alle Punkte der Grundmenge beschreiben, die nicht in A enthalten sind:

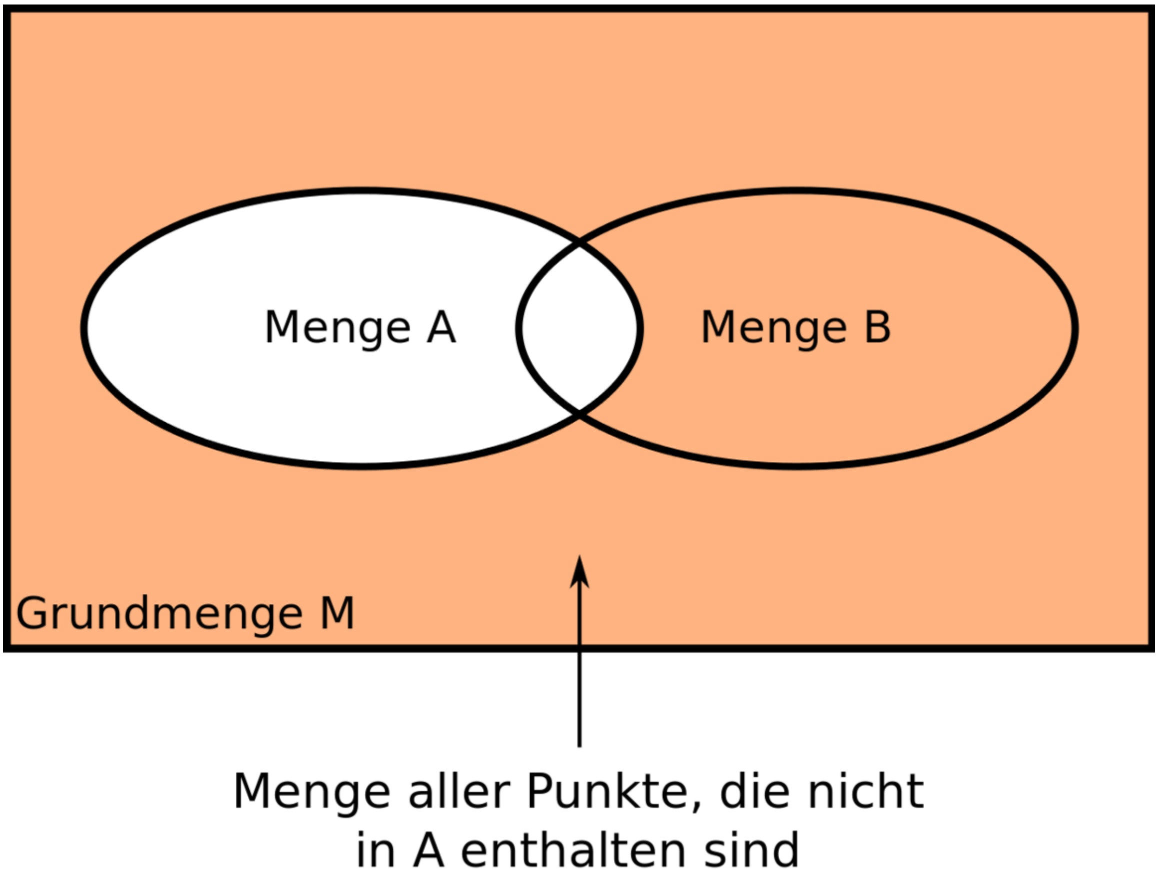
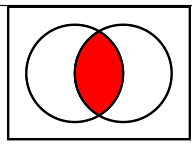
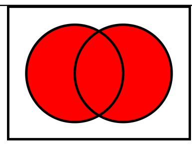
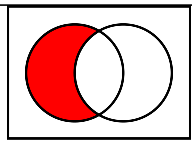
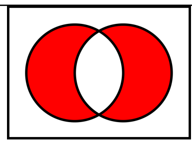


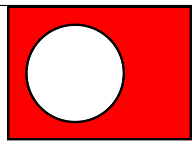
Abb. 29 zentriert

Diese Menge aller Objekte der Grundmenge, die nicht in A enthalten sind, wird *Komplement von A* genannt. Für diese Menge schreibt man A^C. Hier ist $\cdot^C$ der Operator (im obigen Beispiel war $\triangle$ der Operator). Im Unterschied zum obigen Operator $\triangle$ wirkt $\cdot^C$ auf nur einer Menge (während $\triangle$ *zwei* Mengen A und B zu einer neuen Menge $A \triangle B$ verknüpft, wirkt $\cdot^C$ auf nur *einer* Menge).

15.1.1. Überblick

Name der Verknüpfung	**Schreibweise**	**Aussprache**	**Diagramm**	**Definition**

Name der Verknüpfung	**Schreibweise**	**Aussprache**	**Diagramm**	**Definition**
Durchschnitt	$A \cap B$	„A geschnitten B“		$A \cap B$ - die Menge aller Objekte, die sowohl in der Menge A als auch in der Menge B enthalten sind
Vereinigung	$A \cup B$	„A vereinigt B“		$A \cup B$ - die Menge aller Objekte, die in der Menge A und/oder in der Menge B enthalten sind
Differenz	$A \setminus B$	„A ohne B“		$A \setminus B$ - die Menge aller Objekte, die in der Menge A enthalten sind *und* keine Elemente der Menge B sind
Symmetrische Differenz	$A \triangle B$	„symmetrische Differenz von A und B“		$A \triangle B$ - die Menge aller Objekte, die in genau einer der Mengen A und B enthalten sind

Name der Verknüpfung	Schreibweise	Aussprache	Diagramm	Definition
Komplement	A^C	„Komplement von A“		A^C - die Menge aller Objekte (der Grundmenge), die keine Elemente von A sind

15.2. Die einzelnen Verknüpfungen

15.2.1. Durchschnitt

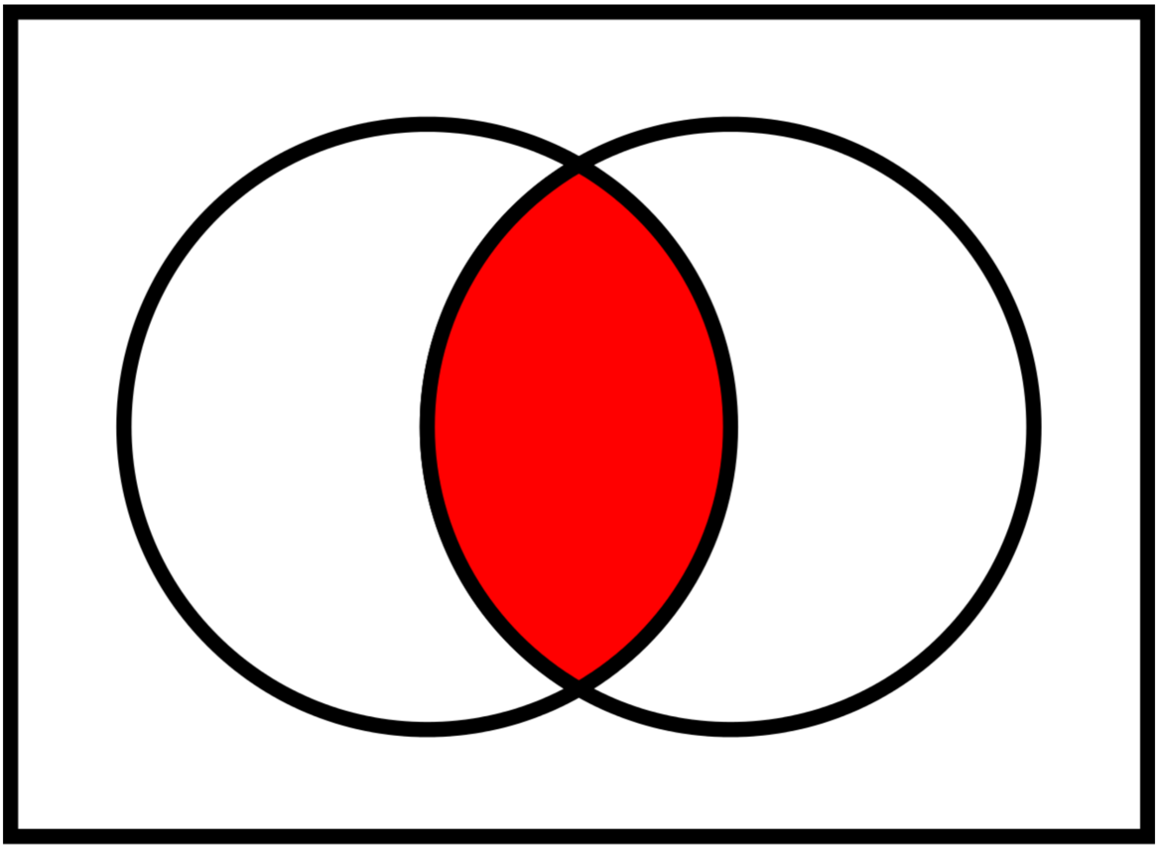


Abb. 35 Schnittmenge zweier Mengen

Der Durchschnitt zweier Mengen A und B ist die Menge aller Objekte, die sowohl Elemente der Menge A als auch der Menge B sind. Ihr Symbol ist $\cap$. Die Schreibweise für den Schnitt zwischen zwei Mengen A und B ist $A \cap B$ und wird „A geschnitten B“ ausgesprochen.
Definition 9. Durchschnitt

Der Durchschnitt $A \cap B$ ist die Menge aller Objekte, die sowohl Elemente von A als auch von B sind:

$A \cap B := \{x \,|\, x \in A x \in B\}$
Beweis 11. *Durchschnitt*

$\{2,4,5,9\} \cap \{1,3,5,7,12\} = \{5\}$

$\{3,12,18\} \cap \{3,4,12,16,18\} = \{3,12,18\}$

$\{x \,|\, \exists y \in \mathbb{N} : x = y^2\} \cap \{x \,|\, \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y\} = \{x \,|\, \left(\exists y \in \mathbb{N} : x = y^2\right) (\exists y \in \mathbb{N} : x = 2y)\}$

$\{x \,|\, \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k\} \cap \{x \,|\, \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k-1\} = \emptyset$

Disjunkte Mengen

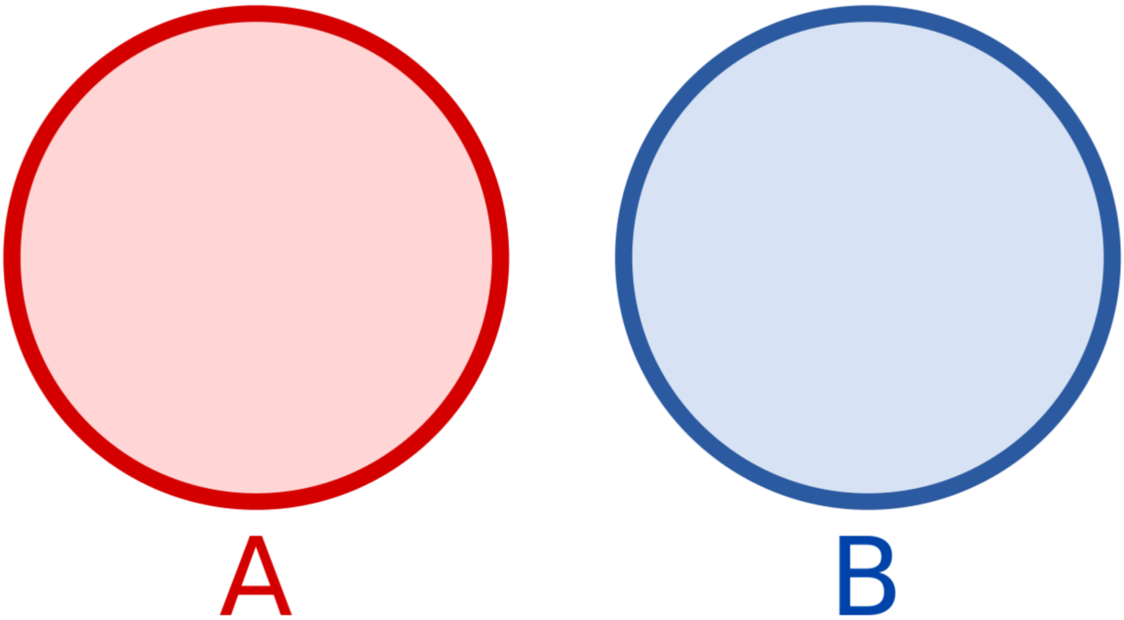


Abb. 36 Die Mengen A und B sind disjunkt

Zwei Mengen A und B, die keine gemeinsamen Elemente besitzen, nennt man *disjunkt*. Damit sind A und B dann und nur dann disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist.
Definition 10. disjunkte Menge

Zwei Mengen nennt man *disjunkt*, wenn sie keine gemeinsamen Elemente besitzen:

$$A \text{ ist disjunkt zu } B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

Beispiele/Übungsaufgabe: Welche der folgenden Paare von Mengen sind disjunkt?

1. $\{1, \pi, -1\}$ *und* $\{2, 77, -1\}$
2. $\{1, \pi, -1\}$ *und* $\{2, 77\}$
3. $\mathbb{Z}$ *und* $\mathbb{Q}$

4. *$\emptyset$ und $\emptyset$*
5. *$\{\emptyset\}$ und $\{\emptyset\}$\antwort= Antwort:*
6. *$\{1, \pi, -1\}$ und $\{2, 77, -1\}$ sind nicht disjunkt, weil sie beide -1 als Element besitzen.*
7. *$\{1, \pi, -1\}$ und $\{2, 77\}$ sind disjunkt, weil sie keine gemeinsamen Elemente besitzen.*
8. *$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind nicht disjunkt, weil sie zum Beispiel die Zahl 0 als gemeinsames Element besitzen.*
9. *$\emptyset$ und $\emptyset$ sind disjunkt, weil $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ ist.*
10. *$\{\emptyset\}$ und $\{\emptyset\}$ sind nicht disjunkt, weil sie $\emptyset$ als gemeinsames Element besitzen.*

Verständnisfrage: Mit welchen Mengen M ist $\emptyset$ disjunkt?
$\emptyset$ ist mit jeder Menge M disjunkt, weil $\emptyset \cap M = \emptyset$ ist.

Verständnisfrage: Wann ist eine Menge A zu sich selbst disjunkt?
Eine Menge A ist genau dann zu sich selbst disjunkt, wenn $A \cap A = \emptyset$ ist. Wegen $A \cap A = A$ ist dies genau dann der Fall, wenn $A = \emptyset$ ist:

$$A \text{ ist zu sich selbst disjunkt} \Leftrightarrow A = \emptyset$$

15.2.2. Vereinigung

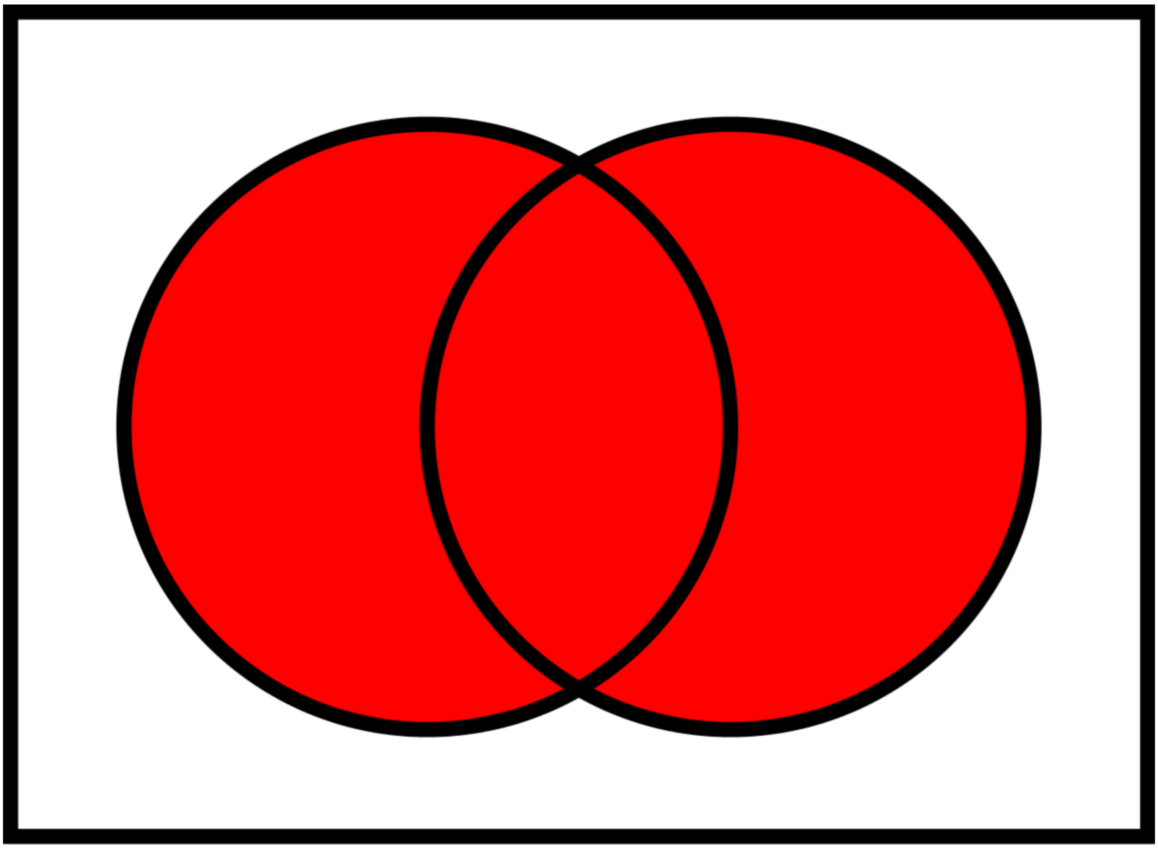


Abb. 37 Vereinigung zweier Mengen

Eine weitere wichtige Verknüpfung zwischen Mengen ist die Vereinigung. Die Vereinigung zweier Mengen ist diejenige Menge, die alle Elemente beider Mengen enthält. Ein Element x ist also genau dann in der Vereinigung von A und B, wenn x in A und/oder x in B ist. Die Vereinigung wird durch $A \cup B$ gekennzeichnet (ausgesprochen: „A vereinigt B“).

Möchte ein Autor deutlich machen, dass die vereinigten Mengen disjunkt sind, so schreibt er in der Regel $A \dot{\cup} B$ (ausgesprochen: „A disjunkt vereinigt mit B“). Der Operator $\dot{\cup}$ wird *disjunkte Vereinigung* genannt.

Definition 11. Vereinigung

Die Vereinigung $A \cup B$ zweier Mengen A und B ist definiert durch: $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Beweis 12. *Vereingung*

$\{2,4,5,9\} \cup \{1,3,5,7,12\} = \{1,2,3,4,5,7,9,12\}$

$\{3,12,18\} \cup \{3,4,12,16,18\} = \{3,4,12,16,18\}$

$\{x \mid \exists y : x = y^2\} \cup \{x \mid \exists y : x = 2y\} = \{x \mid \left(\exists y : x = y^2\right) \vee (\exists y : x = 2y)\}$

$\{x \mid \exists y : x = 2k\} \cup \{x \mid \exists y : x = 2k-1\} = \mathbb{N}$

15.2.3. Differenz

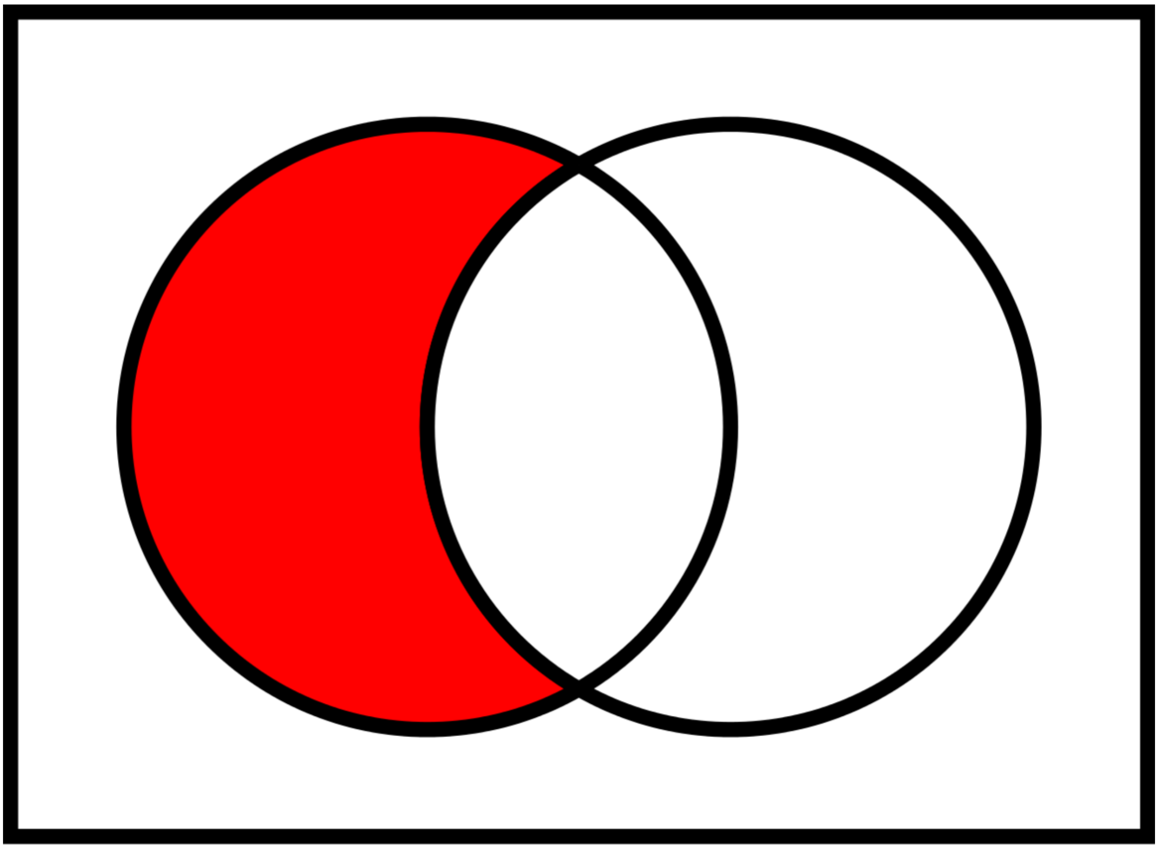


Abb. 38 Differenz zweier Mengen

Mit Hilfe der Differenz kannst du alle Elemente einer Menge A bestimmen, die außerdem nicht in einer zweiten Menge B liegen. Ein Objekt x liegt genau dann in der Differenz von A und B, wenn x ein Element von A aber kein Element von B ist. Für die Differenz von A und B schreibt man $A \setminus B$ (ausgesprochen: „A ohne B“). Seltener wird in der Literatur ein Minuszeichen verwendet: $A - B$.
Definition 12. Differenz

Die Differenz $A \setminus B$ zweier Mengen A und B ist definiert durch: $A \setminus B := \{x \,|\, x \in Ax \notin B\}$
Beweis 13. *Differenz*

$\{2,4,5,9\} \setminus \{1,3,5,7,12\} = \{2,4,9\}$

$\{3,12,18\} \setminus \{1,5,7\} = \{3,12,18\}$

$\{x \,|\, \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k\} \setminus \{x \,|\, \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k-1\} = \{x \,|\, \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k\}$

15.2.4. Symmetrische Differenz

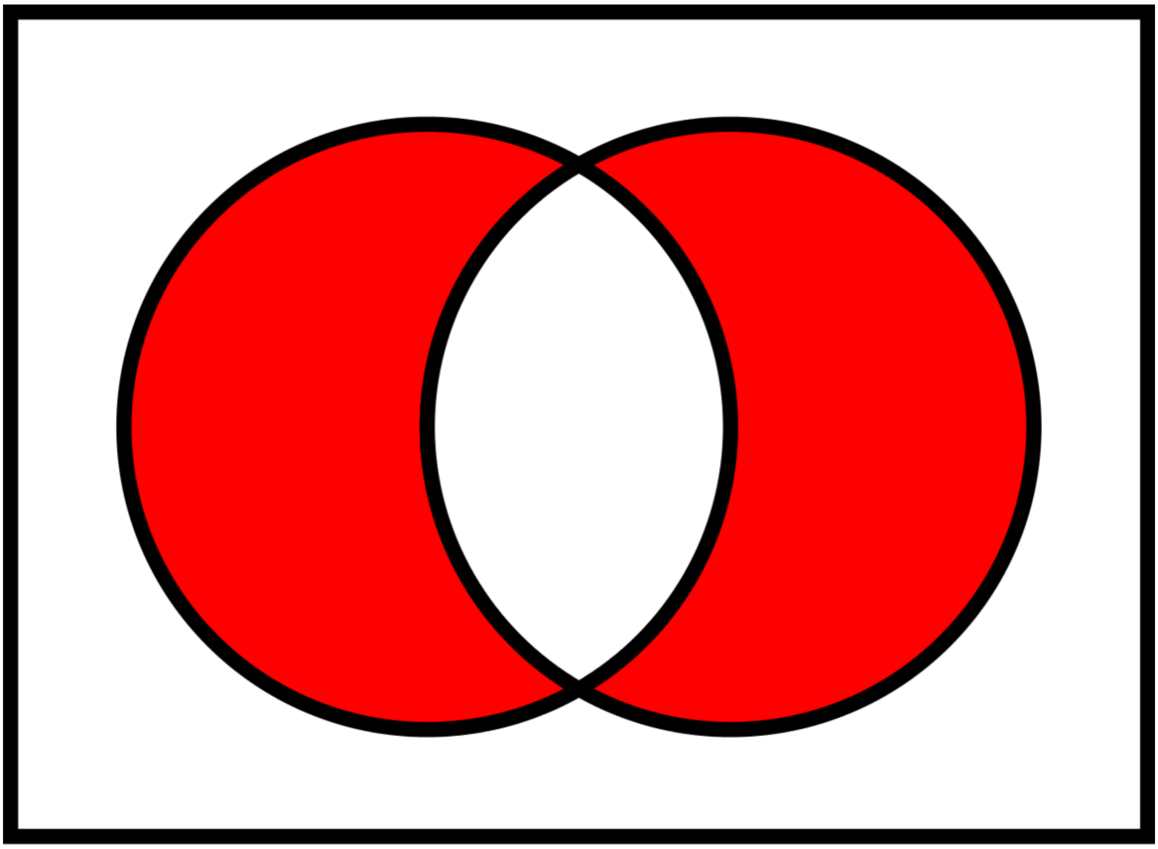


Abb. 39 symmterische Differenz zweier Mengen

Die Symmetrische Differenz zweier Mengen A und B ist die Menge aller Objekte, die in *genau* einer der Mengen A und B enthalten sind. Ist also x ein Element aus der symmetrischen Differenz von A und B, so ist entweder $x \in A$ oder $x \in B$ und x kein gemeinsames Element der Mengen A und B. Ihre Schreibweise ist $A \triangle B$ (ausgesprochen: „symmetrische Differenz von A und B“).

Definition 13. symmetrische Differenz

Die symmetrische Differenz $A \triangle B$ ist die Menge aller Objekte, die Elemente genau einer der Mengen A und B sind:

$$A \triangle B := \{x \,|\, (x \in A \vee x \in B)(x \in A \Rightarrow x \notin B)\}$$

Verständnisfrage: Bilde die symmetrische Differenz folgender Mengen

1. $\{1,2,3\} \triangle \{2,3,4\} = ?$
2. $\{1,2,3\} \triangle \{1,2,3\} = ?$
3. $\{1,2,3\} \triangle \{4,5,6\} = ?$
4. $\mathbb{Z} \triangle \mathbb{R} = ?$
5. $\mathbb{N} \triangle \emptyset = ?$|antwort= *Antwort:*
6. $\{1,2,3\} \triangle \{2,3,4\} = \{1,4\}$

7. $\{1,2,3\} \triangle \{1,2,3\} = \emptyset$
8. $\{1,2,3\} \triangle \{4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$
9. $\mathbb{Z} \triangle \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ ist keine ganze Zahl.}\}$
10. $\mathbb{N} \triangle \emptyset = \mathbb{N}$

15.2.5. Komplement

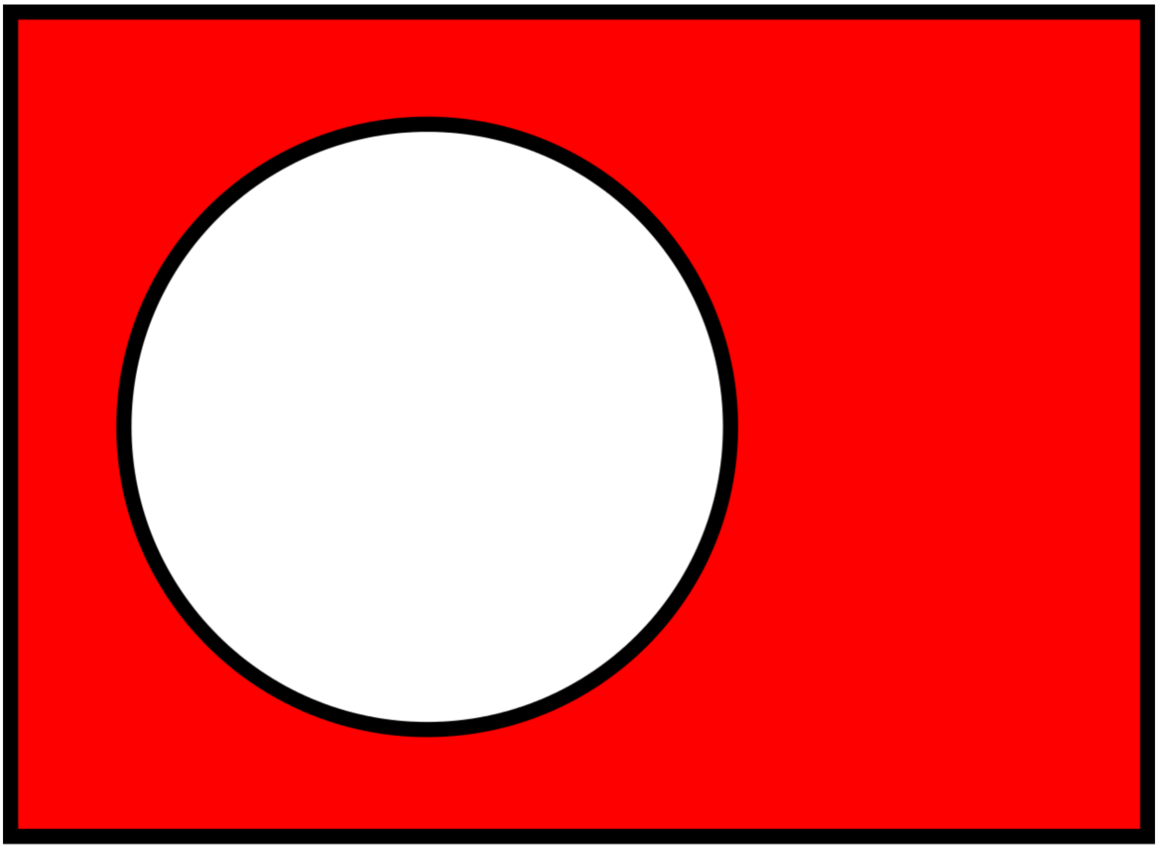


Abb. 40 das Komplement einer Menge

Das Komplement A^C einer Menge A ist die Menge aller Objekte der Grundmenge, die keine Elemente von A sind. Ist in einem Text keine Grundmenge angegeben, so ergibt sich diese aus dem Kontext. So wird bei einem Text über die reelle Analysis die Grundmenge meistens die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sein. Die Schreibweise für das Komplement von A ist A^C (ausgesprochen: „Komplement von A“).
Definition 14. Komplement

Das Komplement A^C der Menge A ist die Menge aller Objekte, die nicht in A enthalten sind.

Verständnisfrage: Die Grundmenge sei $\mathbb{N}_0$. Bilde folgende Komplemente:

1. $\{0,1,2,3\}^C = ?$
2. $\{x \in \mathbb{N}_0 \,|\, x \text{ ist gerade}\}^C = ?$

3. $\mathbb{N}_0^{\mathrm{C}} = ?$
4. $\emptyset^{\mathrm{C}} = ?$|*antwort= Antwort:*
5. $\{0,1,2,3\}^{\mathrm{C}} = \mathbb{N}_{\geq 4}$
6. $\{x \in \mathbb{N}_0 \,|\, x \textit{ ist gerade}\}^{\mathrm{C}} = \{x \in \mathbb{N}_0 \,|\, x \textit{ ist ungerade}\}$
7. $\mathbb{N}_0^{\mathrm{C}} = \emptyset$
8. $\emptyset^{\mathrm{C}} = \mathbb{N}_0$

15.3. Gesetzmäßigkeiten

15.3.1. Assoziativgesetze

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

15.3.2. Kommutativgesetze

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \triangle B = B \triangle A$

15.3.3. Distributivgesetze

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

15.3.4. Idempotenzgesetze

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$

15.3.5. Absorptionsgesetze

- $A \cap (A \cup B) = A$
- $A \cup (A \cap B) = A$

15.3.6. De-Morgansche Regeln

- $(A \cap B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}$
- $(A \cup B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}}$

15.3.7. Gesetzmäßigkeiten zur Differenz

- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
- $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
- $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

15.3.8. Weitere Regeln

Im Folgenden sei M die Grundmenge.

- $\left(A^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} = A$
- $M^{\mathrm{C}} = \emptyset$
- $\emptyset^{\mathrm{C}} = M$
- $A \cap A^{\mathrm{C}} = \emptyset$
- $A \cup A^{\mathrm{C}} = M$
- $A \cap M = A$
- $A \cup M = M$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \triangle A = \emptyset$
- $A \triangle \emptyset = A$

16. Paare, Tupel und das kartesische Produkt

16.1. Geordnetes Paar und Tupel

Wie können Listen in der Mathematik beschrieben werden? Im Abschnitt „Mengenlehre“[1] hast du erfahren, wie du in der Mathematik Ansammlungen von Objekten mit Hilfe von Mengen beschreiben kannst. Nun möchte ich dir zeigen, wie du endliche Listen von Objekten beschreiben kannst, welche man als *Tupel* bezeichnet. Der wesentliche Unterschied von Listen zu Mengen ist der, dass bei Listen auch die Reihenfolge der Objekte entscheidend ist. So sind zwei Listen dann und nur dann gleich, wenn sie dieselben Objekte in derselben Reihenfolge und Anzahl besitzen. Zur Erinnerung: Bei Mengen (aufgeschrieben in der aufzählenden Mengenschreibweise) ist die Reihenfolge ihrer Elemente für die Identität[2] zweier Mengen irrelevant. So ist etwa $\{1,2,3,4\} = \{3,4,2,1\}$.

Eine Liste von Objekten wird *Tupel* genannt. Die einzelnen Objekte eines Tupels sind seine *Komponenten*. Die Schreibweise für eine endliche Liste von n Objekten x_1 bis x_n ist $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Die einzelnen Komponenten eines Tupels werden also durch Kommata „,“ (oder auch Semikolons „;“ getrennt) und in runden Klammern () zusammengefasst. Wie bereits gesagt, ist die Reihenfolge der Komponenten eines Tupels wichtig. So sind zwei Tupel dann und nur dann gleich, wenn sie dieselben Objekte in derselben Reihenfolge und Anzahl besitzen. Dies bedeutet:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) :\Leftrightarrow n = m\, x_1 = y_1\, x_2 = y_2\, \ldots\, x_n = y_m$$

In Übersetzung:

$$\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)}_{\text{Tupel } (x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ ist gleich dem Tupel } (y_1,y_2,\ldots,y_m)} \quad \underbrace{:\Leftrightarrow}_{\text{genau dann, wenn}} \quad \underbrace{n = m}_{\text{sie dieselbe Anzahl von Objekten}} \quad \underbrace{\qquad}_{\text{und}} \quad \underbrace{x_1 = y_1\, x_2 = y_2\, \ldots\, x_n = y_m}_{\text{dieselben Objekte in derselben Reihenfolge b}}$$

Wenn du deutlich machen möchtest, dass ein Tupel n Komponenten besitzt, so kannst du ihn *n-Tupel* nennen. So nennt man ein Tupel mit 2 Komponenten „2-Tupel“, ein Tupel mit 3 Komponenten „3-Tupel“ und so weiter.

Es gibt einen besonderen Name für 2-Tupel. Sie werden *geordnetes Paar* oder kurz *Paar* genannt. Geordnete Paare (a, b) sind also 2-komponentige Listen mit der ersten Komponente a und der zweiten Komponente b.

Verständnisfrage: Welche Bedingungen müssen x und y besitzen, damit folgende Paare gleich sind?

1 Kapitel 14 auf Seite 95
2 http://de.wikibooks.org/wiki/%3Aw%3AIdentit%E4t_%28Mathematik%29

1. (x,x) und (x)
2. (x,y) und (y,x)
3. $(1,2)$ und (x,y)|antwort=
4. Für alle x ist $(x,x) \neq (x)$, da zwei Tupel nur dann identisch sein können, wenn sie dieselbe Anzahl an Elementen besitzen.
5. Es ist $(x,y) = (y,x)$ genau dann, wenn $x = y$.
6. Es ist $(1,2) = (x,y)$ genau dann, wenn $x = 1$ und $y = 2$.

Verständnisfrage: Welche Bedingungen müssen die Objekte a, b, c und d erfüllen, damit die Paare (a,b) und (c,d) gleich sind?
Damit zwei Paare (a,b) und (c,d) gleich sind, muss $a = c$ und $b = d$ sein:

$$(a,b) = (c,d) :\Leftrightarrow a = cb = d$$

Wir fassen zusammen:
Definition 15. Tupel

Ein *Tupel* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist eine endliche Liste der n Objekte x_1 bis x_n. Das Objekt x_k des Tupels wird seine *kte Komponente* genannt. Zwei Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sind dann und nur dann identisch, wenn sie dieselben Objekte in derselben Reihenfolge und Anzahl besitzen:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) :\Leftrightarrow n = m \, \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_k = y_k$$

Definition 16. geordnetes Paar

Ein *geordnetes Paar* (a,b) ist ein 2-Tupel, also eine Liste mit genau 2 Komponenten. Zwei geordnete Paare (a,b) und (c,d) sind genau dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ ist.

16.1.1. Modellierung durch Mengen

Oft werden neu eingeführte Objekte auf bereits bekannte Objekte zurückgeführt, indem die neuen Objekte mit Hilfe der bereits bekannten Objekte definiert werden. Diese Zurückführung kann später in Beweisen genutzt werden.

Bisher haben wir nur Mengen als Objekte der Mathematik kennen gelernt. Wie können also geordnete Paare und Tupel im Allgemeinen als Mengen definiert werden? Die wesentliche Eigenschaft von Tupeln ist die, dass $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ dann und nur dann ist, wenn $n = m$ und $x_k = y_k$ für alle natürlichen Zahlen k mit $1 \leq k \leq n = m$ ist. Diese Eigenschaft muss auch eine Definition von Tupeln mit Hilfe von Mengen erfüllen.

Hierzu gibt es folgende rekursive Definition des Tupels:
Definition 17. Definition von Tupel durch Mengen

Tupel sind rekursiv definiert durch:

- Rekursionsanfang: $() := \emptyset$
- Rekursionsschritt: $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), \{x_{n+1}\}\}$

Die Wirkungsweise dieser rekursiven Definition lässt mit Hilfe der folgenden Animation nachvollziehen:

Abb. 41

> <u>Verständnisfrage</u>: *Wie sind folgende Tupel durch obige Definition durch Mengen ausdrückbar?*
>
> *1.* (1)
> *2.* (a,b)
> *3.* $(())$|*antwort=*
> *Tupel* (1)*:*
>
> $$\begin{aligned} & (1) && \mid (1) = \{(), \{1\}\} && \textit{(Rekursionsschritt)} \\ = \; & \{(), \{1\}\} && \mid () = \emptyset && \textit{(Rekursionsanfang)} \\ = \; & \{\emptyset, \{1\}\} \end{aligned}$$
>
> *Tupel* (a,b)*:*
>
> $$\begin{aligned} & (a,b) && \mid (a,b) = \{(a), \{b\}\} && \textit{(Rekursionsschritt)} \\ = \; & \{(a), \{b\}\} && \mid (a) = \{(), \{a\}\} && \textit{(Rekursionsschritt)} \\ = \; & \{\{(), \{a\}\}, \{b\}\} && \mid () = \emptyset && \textit{(Rekursionsanfang)} \\ = \; & \{\{\emptyset, \{a\}\}, \{b\}\} \end{aligned}$$
>
> *Tupel* $(())$*:*
>
> $$\begin{aligned} & (()) && \mid () = \emptyset && \textit{(Rekursionsanfang)} \\ = \; & (\emptyset) && \mid (\emptyset) = \{(), \{\emptyset\}\} && \textit{(Rekursionsschritt)} \\ = \; & \{(), \{\emptyset\}\} && \mid () = \emptyset && \textit{(Rekursionsanfang)} \\ = \; & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \end{aligned}$$

Wir haben noch nicht gezeigt, dass unsere obige Definition von Tupel über Mengen auch die wesentliche Eigenschaft von Tupel erfüllt, nämlich dass zwei Tupel dann und nur dann identisch sind, wenn sie dieselben Objekte in derselben Anzahl und Reihenfolge besitzen. Wir müssen also noch folgenden Satz zeigen:
Satz 1. *Identität von Tupeln*

Zwei Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sind dann und nur dann identisch, wenn sie dieselben Objekte in derselben Reihenfolge und Anzahl besitzen:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) :\Leftrightarrow n = m \, \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_k = y_k$$

Diesen Satz werden wir über vollständige Induktion[3] beweisen:
Beweis 14. *Identität von Tupeln*

Zu beweisende Aussage: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftrightarrow n = m \, \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_k = y_k$

Induktionsvariable: n

Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Wir müssen zeigen

$$() = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftrightarrow 0 = m \; \underbrace{\forall k \in \underbrace{\{1, 2, \ldots, 0\}}_{\text{leere Menge}} : x_k = y_k}_{\text{immer erf}}$$

ullt

also

$() = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftrightarrow 0 = m$

Für $m = 0$ ist $() = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ eine direkte Folgerung, so dass wir nur noch die Implikation $() = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \Rightarrow 0 = m$ zeigen müssen.

Nun ist nach Rekursionsanfang $() = \emptyset$, so dass wir die Implikation $\emptyset = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \Rightarrow 0 = m$ zeigen müssen (die Implikation $\emptyset = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftarrow 0 = m$ haben wir gerade gezeigt).

Sei also $\emptyset = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Da für $m > 0$ nach dem Rekursionsschritt $(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \{(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}), \{y_m\}\}$ ist, ist für $m > 0$ die *Menge* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ zweielementig und somit nicht leer. Weil aber nach Voraussetzung $\emptyset = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ ist, kann m nicht größer als 0 sein, da wir sonst einen Widerspruch erhalten würden. Damit ist $m = 0$, da m nur natürliche Zahlen größer gleich 0 annehmen kann. nice.

Induktionsschritt: Nun müssen wir folgende Aussage beweisen

$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftrightarrow n + 1 = m \, \forall k \in \{1, 2, \ldots, n + 1\} : x_k = y_k$

Auch hier ist folgende Implikation eine direkte Folgerung:

$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftarrow n + 1 = m \, \forall k \in \{1, 2, \ldots, n + 1\} : x_k = y_k$

Damit müssen wir noch beweisen:

$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \Rightarrow n + 1 = m \, \forall k \in \{1, 2, \ldots, n + 1\} : x_k = y_k$

Sei also $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Da $n + 1 > 0$ ist, ist nach dem Rekursionsschritt $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), \{x_{n+1}\}\}$ und damit nicht leer. Da $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ für $m = 0$ leer wäre, muss $m > 0$ sein. Nach Anwendung des Rekursionsschritt erhalten wir aus der Voraussetzung $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ die Gleichung:

$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n), \{x_{n+1}\}\} = \{(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}), \{y_m\}\}$

Weil $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für $n > 0$ zweielementig und für $n = 0$ leer ist, ist $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq \{x_{n+1}\}$ und $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq \{y_m\}$. Analog ist $(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}) \neq \{x_{n+1}\}$ und $(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}) \neq \{y_m\}$. Damit gilt obige Gleichung nur dann, wenn $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$ und $\{x_{n+1}\} = \{y_m\}$.

---

3 Kapitel 11 auf Seite 71

Aus $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$ folgt $n = m-1$ also $n+1 = m$ und $x_k = y_k$ für alle natürlichen k mit $1 \geq k \geq n$. Aus $\{x_{n+1}\} = \{y_m\}$ folgt $x_{n+1} = y_m$ und damit $x_k = y_k$ für alle $1 \geq k \geq n+1$.

16.2. Kartesisches Produkt

Das *kartesische Produkt* ist eine besondere Verknüpfung zwischen zwei Mengen. Die Schreibweise für das kartesische Produkt zwischen den Mengen A und B ist $A \times B$ (ausgesprochen: „A kreuz B“). Das kartesische Produkt $A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paar (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$. So ist beispielsweise:

$$\begin{aligned}\{1,2\} \times \{3,4,5\} = \{&(1,3); (1,4); (1,5);\\ &(2,3); (2,4); (2,5)\}\end{aligned}$$

Beispiele/Übungsaufgabe: Schreibe folgende kartesische Produkte aus.

- $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$
- $\{x\} \times \{y\}$
- $\emptyset \times \{1,2,3\}$|*antwort*=
  $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\} = \{(1,1); (1,2); (1,3);$
- $(2,1); (2,2); (2,3);$
  $(3,1); (3,2); (3,3)\}$
- $\{x\} \times \{y\} = \{(x,y)\}$
- $\emptyset \times \{1,2,3\} = \emptyset$

Definition 18. kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt $A \times B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a,b) wobei a ein Element der Menge A und b ein Element der Menge B ist:

$A \times B := \{(x,y) \,|\, x \in Ay \in B\}$

Verständnisfrage: Sei A eine endliche Menge mit a Elementen und B eine endliche Menge mit b Elementen. Wie viele Elemente enthält die Menge $A \times B$?
Seien x_1 bis x_a die Elemente der Menge A und y_1 bis y_b die Elemente der Menge B. Dann sieht $A \times B$ so aus:

$$\begin{aligned}\underbrace{\{x_1, x_2, \ldots, x_a\}}_{=A} \times \underbrace{\{y_1, y_2, \ldots, y_b\}}_{=B} = \{ \quad &(x_1,y_1); (x_1,y_2); \ldots; (x_1,y_b);\\ &(x_2,y_1); (x_2,y_2); \ldots; (x_2,y_b);\\ &\vdots\\ &(x_a,y_1); (x_a,y_2); \ldots; (x_a,y_b)\}\end{aligned}$$

Man sieht, dass es für jedes $x \in A$ genau b verschiedene $y \in B$ mit $(x,y) \in A \times B$ gibt. Damit enthält $A \times B$ genau $a \cdot b$ verschiedene geordnete Paare als Elemente.

Man kann auch das kartesische Produkt von mehr als zwei Mengen bilden. Analog zum Fall von zwei Mengen ist das kartesische Produkt $A \times B \times C$ der drei Mengen A, B und C gleich der Menge aller 3-Tripel (a, b, c) mit $a \in A$, $b \in B$ und $c \in C$:

$$A \times B \times C := \{(a, b, c) \,|\, a \in A,\, b \in B,\, c \in C\}$$

<u>Verständnisfrage</u>: *Was ist* $\{1, 2\} \times \{3, 4\} \times \{5, 6\}$*?*

$$\begin{aligned}\{1, 2\} \times \{3, 4\} \times \{5, 6\} = \{&(1, 3, 5); (1, 3, 6);\\ &(1, 4, 5); (1, 4, 6);\\ &(2, 3, 5); (2, 3, 6);\\ &(2, 4, 5); (2, 4, 6)\}\end{aligned}$$

Allgemein ist das kartesische Produkt $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ der n Mengen A_1 bis A_n die Menge aller n-Tupeln $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ und so weiter bis $a_n \in A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_1 \in A_1 a_2 \in A_2 \ldots a_n \in A_n\}$$

Für kartesische Produkte von Mengen mit sich selber gibt es eine abkürzende Schreibweise: Es ist $M^2 := M \times M$, $M^3 := M \times M \times M$ und so weiter. Allgemein ist

$$M^n := \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{n\text{-mal}}$$

<u>Verständnisfrage</u>: *Was ist* $\{1, 2\}^3$*?*

$$\begin{aligned}\{1, 2\}^3 = \{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{&(1, 1, 1); (1, 1, 2);\\ &(1, 2, 1); (1, 2, 2);\\ &(2, 1, 1); (2, 1, 2);\\ &(2, 2, 1); (2, 2, 2)\}\end{aligned}$$

17. Zusammenfassung

__FORCETOC__

Mind Map

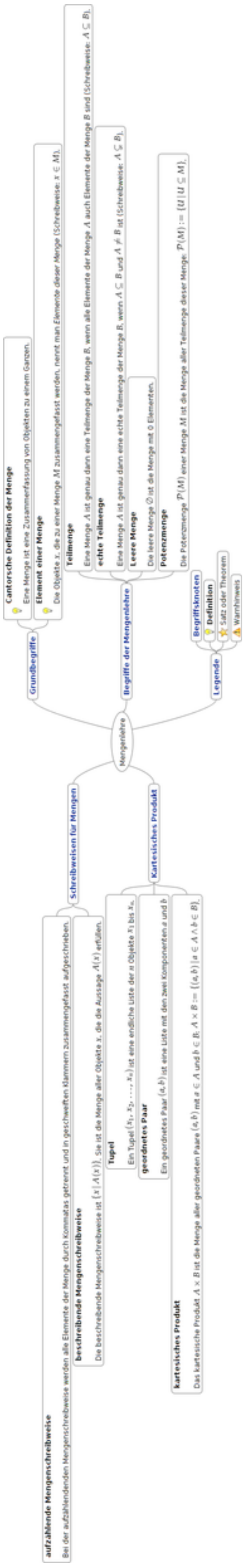
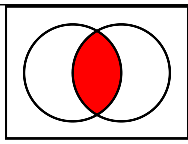
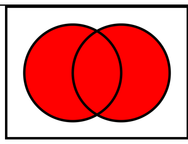
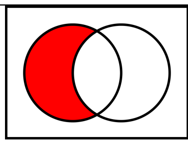
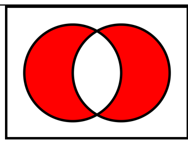
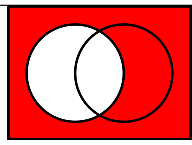

Mengenlehre
Grundbegriffe
Cantorsche Definition der Menge
Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen.
Element einer Menge
Die Objekte x, die zu einer Menge M zusammengefasst werden, nennt man *Elemente dieser Menge* (Schreibweise: $x \in M$).
Begriffe der Mengenlehre
Teilmenge
Eine Menge A ist genau dann eine Teilmenge der Menge B, wenn alle Elemente der Menge A auch Elemente der Menge B sind (Schreibweise: $A \subseteq B$).
echte Teilmenge
Eine Menge A ist genau dann eine echte Teilmenge der Menge B, wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ist (Schreibweise: $A \subsetneq B$).
Leere Menge
Die leere Menge $\emptyset$ ist die Menge mit 0 Elementen.
Potenzmenge
Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmenge dieser Menge: $\mathcal{P}(M) := \{U \mid U \subseteq M\}$.
Legende
Begriffsknoten
Definition
Satz oder Theorem
Warnhinweis
Schreibweisen für Mengen
aufzählende Mengenschreibweise
Bei der aufzählendenden Mengenschreibweise werden alle Elemente der Menge durch Kommatas getrennt und in geschweiften Klammern zusammengefasst aufgeschrieben.
beschreibende Mengenschreibweise
Die beschreibende Mengenschreibweise ist $\{x \mid A(x)\}$. Sie ist die Menge aller Objekte x, die die Aussage $A(x)$ erfüllen.
Kartesisches Produkt
Tupel
Ein Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist eine endliche Liste der n Objekte x_1 bis x_n.
geordnetes Paar
Ein geordnetes Paar (a, b) ist eine Liste mit den zwei Komponenten a und b
kartesisches Produkt
Das kartesische Produkt $A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$: $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Abb. 42

17.1. Verknüpfungen zwischen Mengen

Name der Verknüpfung	**Schreibweise**	**Aussprache**	**Diagramm**	**Definition**
Durchschnitt	$A \cap B$	„A geschnitten B"		$A \cap B$ - die Menge aller Objekte, die sowohl in der Menge A als auch in der Menge B enthalten sind
Vereinigung	$A \cup B$	„A vereinigt B"		$A \cup B$ - die Menge aller Objekte, die in der Menge A und/oder in der Menge B enthalten sind
Differenz	$A \setminus B$	„A ohne B"		$A \setminus B$ - die Menge aller Objekte, die in der Menge A enthalten sind *und* keine Elemente der Menge B sind
Symmetrische Differenz	$A \triangle B$	„symmetrische Differenz von A und B"		$A \triangle B$ - die Menge aller Objekte, die in genau einer der Mengen A und B enthalten sind

Name der Verknüpfung	Schreibweise	Aussprache	Diagramm	Definition
Komplement	A^C	„Komplement von A“		A^C - die Menge aller Objekte (der Grundmenge), die keine Elemente von A sind

17.2. Gesetzmäßigkeiten

17.2.1. Assoziativgesetze

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

17.2.2. Kommutativgesetze

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \triangle B = B \triangle A$

17.2.3. Distributivgesetze

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

17.2.4. Idempotenzgesetze

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$

17.2.5. Absorptionsgesetze

- $A \cap (A \cup B) = A$
- $A \cup (A \cap B) = A$

17.2.6. De-Morgansche Regeln

- $(A \cap B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}$
- $(A \cup B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}}$

17.2.7. Gesetzmäßigkeiten zur Differenz

- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
- $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
- $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

17.2.8. Weitere Regeln

Im Folgenden sei M die Grundmenge.

- $\left(A^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} = A$
- $M^{\mathrm{C}} = \emptyset$
- $\emptyset^{\mathrm{C}} = M$
- $A \cap A^{\mathrm{C}} = \emptyset$
- $A \cup A^{\mathrm{C}} = M$
- $A \cap M = A$
- $A \cup M = M$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \triangle A = \emptyset$
- $A \triangle \emptyset = A$

Teil V.

Relationen

18. Relationen – Wie Beziehungen zwischen Objekten modelliert werden

18.1. Wie können Eigenschaften und Beziehungen modelliert werden?

Im vorherigem Kapitel haben wir das Konzept der Menge[1] kennengelernt, mit der Objekte zu einem Ganzen zusammengefasst werden können. In diesem Kapitel werden wir uns damit beschäftigen, wie Eigenschaften und Beziehungen zwischen Objekten modelliert werden können. Diese Eigenschaften bzw. Beziehungen zwischen Objekten werden *Relationen* genannt. Hierzu werden wir uns zunächst einige Beispiele anschauen, um dann das Konzept der Relationen einzuführen.

1 Kapitel 14 auf Seite 95

18.1.1. Modellierung von Eigenschaften

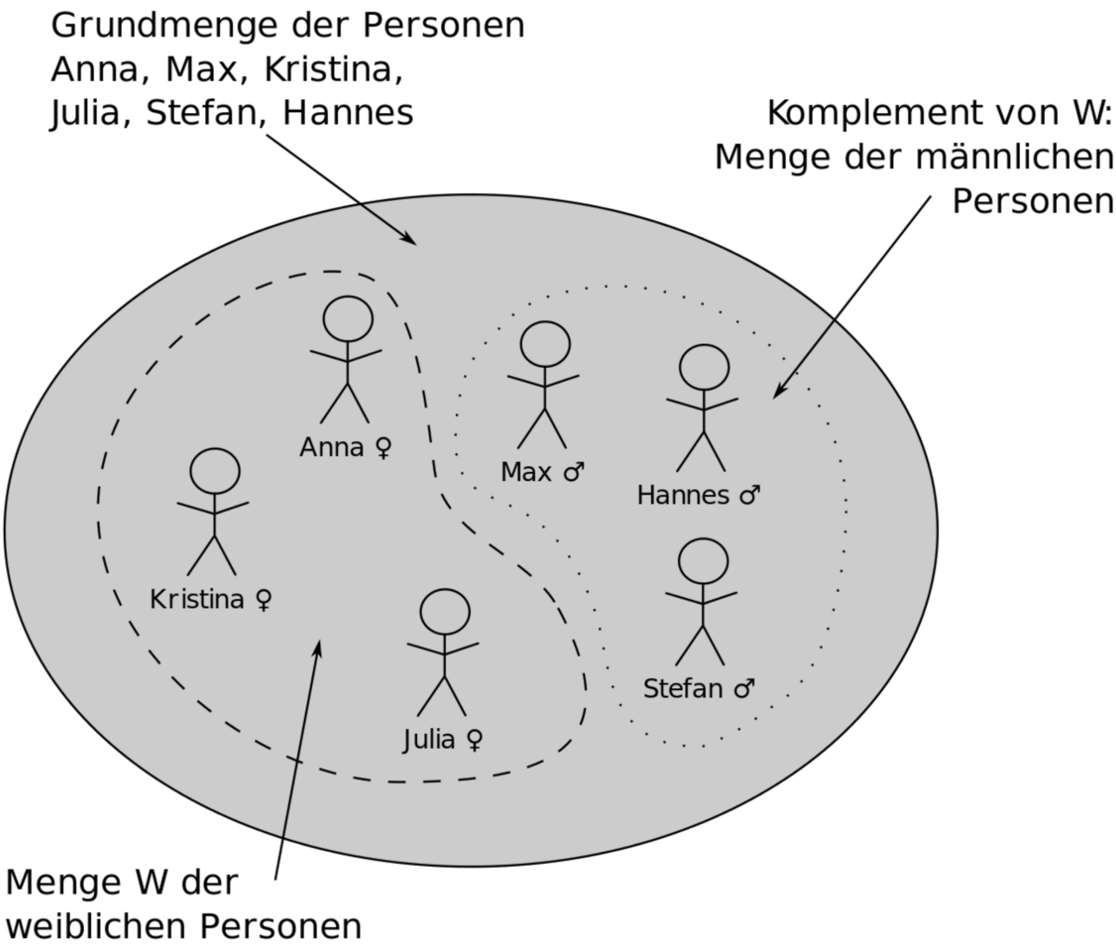


Abb. 48 Modellierung der Eigenschaft "x ist weiblich"

Sei M die Menge aller zur Zeit lebenden Menschen. Wir wollen nun das (biologische) Geschlecht der Menschen beschreiben. Dabei soll angenommen werden, dass jeder Mensch entweder männlich oder weiblich aber nicht beides gleichzeitig ist. Wie können wir das Geschlecht eines Menschen mit Hilfe von Mengen beschreiben?

Eine in der Mathematik häufig benutze Möglichkeit ist folgende: Wir definieren eine neue Menge W, die genau all diejenigen Menschen enthält, die wir als weiblich bezeichnen wollen. Die Menge W ist also definiert durch $W = \{m \in M \,|\, m \text{ ist weiblich}\}$. Damit können wir $m \in W$ schreiben, um auszudrücken, dass m weiblich ist.

Ein Vorteil dieser Modellierung ist der, dass wir Mengenverknüpfungen verwenden können, um neue Eigenschaften zu beschreiben. So ist $W^{\mathrm{C}} = M \setminus W$ die Menge aller männlichen Menschen, da wir davon ausgehen, dass jeder nicht weibliche Mensch männlich ist. Damit können wir $m \in W^{\mathrm{C}}$ für „M ist männlich “schreiben.

Wir fassen zusammen: Wenn wir eine Grundmenge G haben und in ihr eine Eigenschaft beschreiben wollen, so können wir eine neue Menge $E \subseteq G$ definieren, die genau all diejenigen Objekte aus G enthält, die diese Eigenschaft besitzen.

18.1.2. Modellierung von zweistelligen Beziehungen

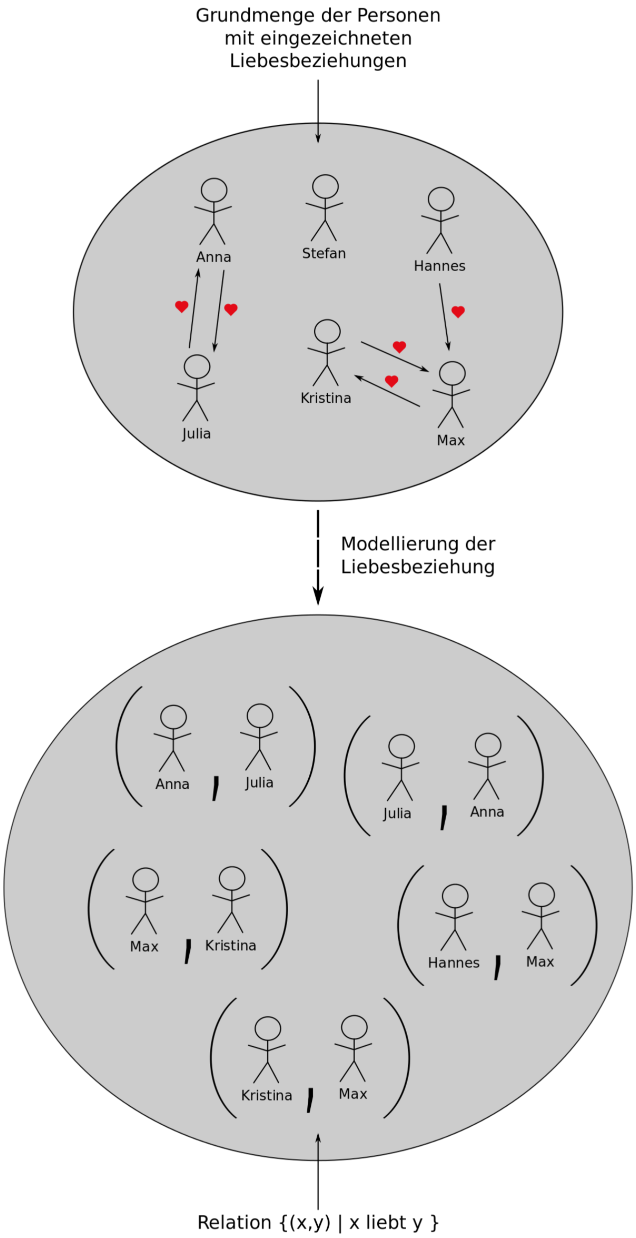


Abb. 49 Modellierung der Beziehung „x liebt y“

Sei wieder M die Menge aller Menschen, die zur Zeit leben. Wie kann nun die Liebesbeziehung zwischen zwei Menschen beschrieben werden? Wie können wir also modellieren, dass ein Mensch x einen anderen Menschen y liebt?

Auch hierfür führen wir eine neue Menge L ein. Sie soll genau all diejenigen Paare[2] (x,y) von Menschen enthalten, für die gilt, dass x die Person y liebt. Wir definieren damit $L = \{(x,y) \,|\, x \text{ liebt } y\}$. So können wir $(m,n) \in L$ schreiben, um auszudrücken, dass m den Menschen n liebt. Damit haben wir eine Modellierung für die Liebesbeziehung gefunden.

Rechts siehst du ein Beispiel für eine solche Modellierung. Du siehst, dass Kristina und Max sowie Julia und Anna ein Liebespärchen sind. Hannes ist zwar in Max verliebt, jedoch wird seine Liebe nicht erwidert. Stefan liebt keine Person der Grundmenge und wird auch von keiner anderen Person geliebt.

Verständnisfrage: Wieso werden für die Beziehung „x liebt y“ Paare (x,y) und nicht Mengen $\{x,y\}$ verwendet?
Bekanntermaßen ist bei der aufzählenden Mengenschreibweise die Reihenfolge der Objekte irrelevant. So ist $\{x,y\} = \{y,x\}$. Jedoch ist die Beziehung „x liebt y“ zwischen den Personen x und y eine andere Beziehung als „y liebt x“. Dementsprechend können Mengen der Form $\{x,y\}$ nicht zur Beschreibung der Liebesbeziehung herangezogen werden.

Im Gegensatz zu Mengen besitzen Paare (x,y) die notwendige Eigenschaft, dass die Reihenfolge ihrer Komponenten für die Identitätsbeziehung relevant ist. So ist $(a,b) = (c,d)$ dann und nur dann, wenn $a = c$ und $b = d$ ist.

Zusammenfassung: Um eine Zweierbeziehung in einer Grundmenge G zu modellieren, können wir eine neue Menge B definieren, die all diejenigen Paare (x,y) der Objekte x und y aus G enthält, die in Zweierbeziehung zueinander stehen. Damit ist $B \subseteq G \times G$.

2 Kapitel 17 auf Seite 129

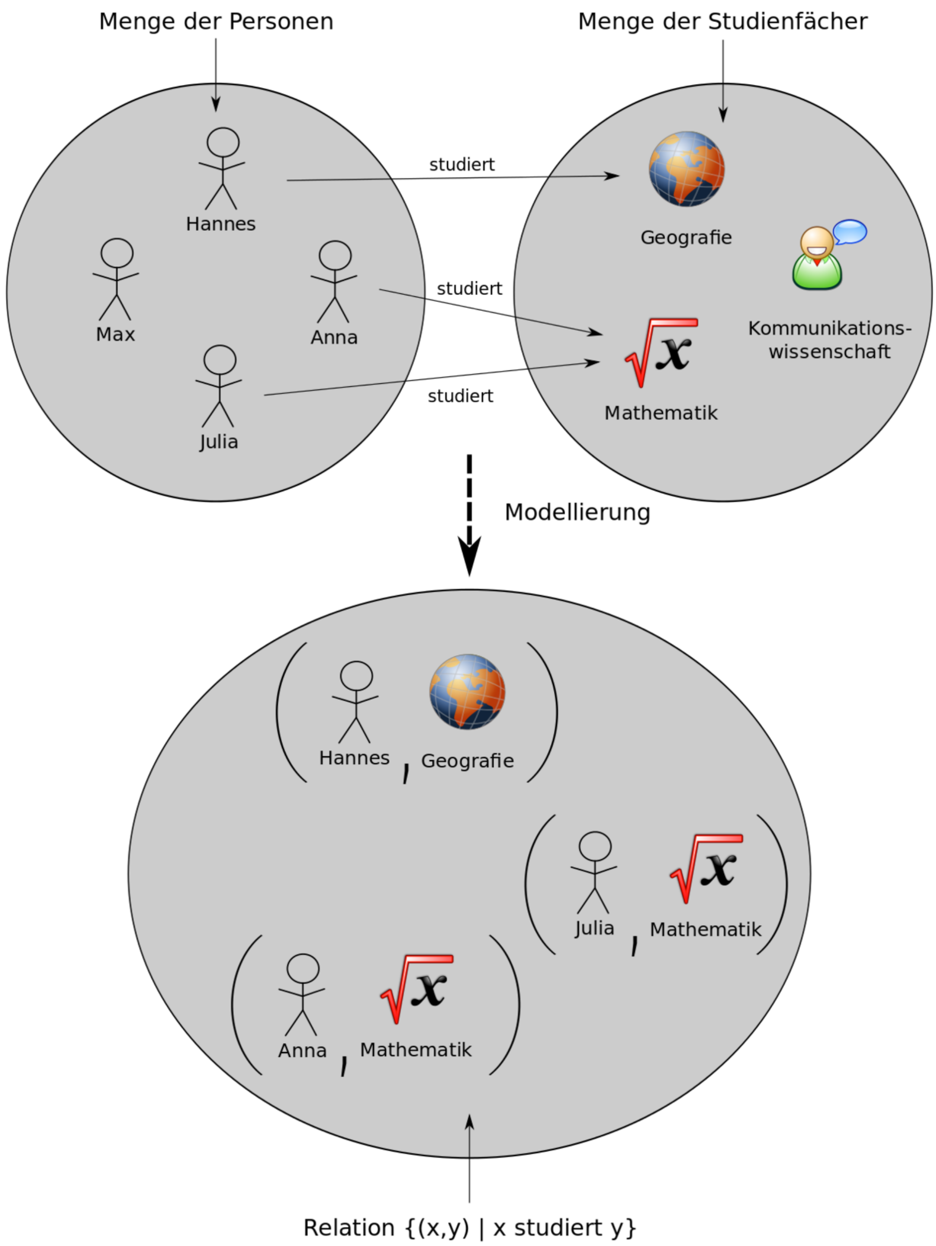


Abb. 50 Modellierung der Beziehung „x studiert y“

Mit der Liebesbeziehung haben wir ein Beispiel für eine Beziehung von Objekten *innerhalb* einer Menge kennen gelernt. Wie können wir Beziehungen von Objekten unterschiedlicher Mengen modellieren?

Nehmen wir hierzu die Beziehung „x studiert y“. Dabei sei M die Menge der Menschen und F die Menge der Studienfächer. Um nun die Beziehung „x studiert y“ zu beschreiben, definieren wir eine neue Menge S derjenigen Paare (x,y) mit $x \in M$ und $y \in F$, so dass der Mensch x das Fach y studiert. So wird die Beziehung „x studiert y“ modelliert durch die Menge $S = \{(x,y) \,|\, x \text{ studiert } y\}$. Es ist damit $S \subseteq M \times F$.

Auf der linken Seite siehst du ein konkretes Beispiel für diese Art der Modellierung. Hier sind Hannes, Anna und Julia Studenten, während Max nicht studiert. Hannes studiert Geografie und Annna und Julia studieren Mathematik. Das Studienfach Kommunkiationswissenschaften wird in unserem Beispiel von niemanden studiert.

18.1.3. Modellierung von dreistelligen Beziehungen

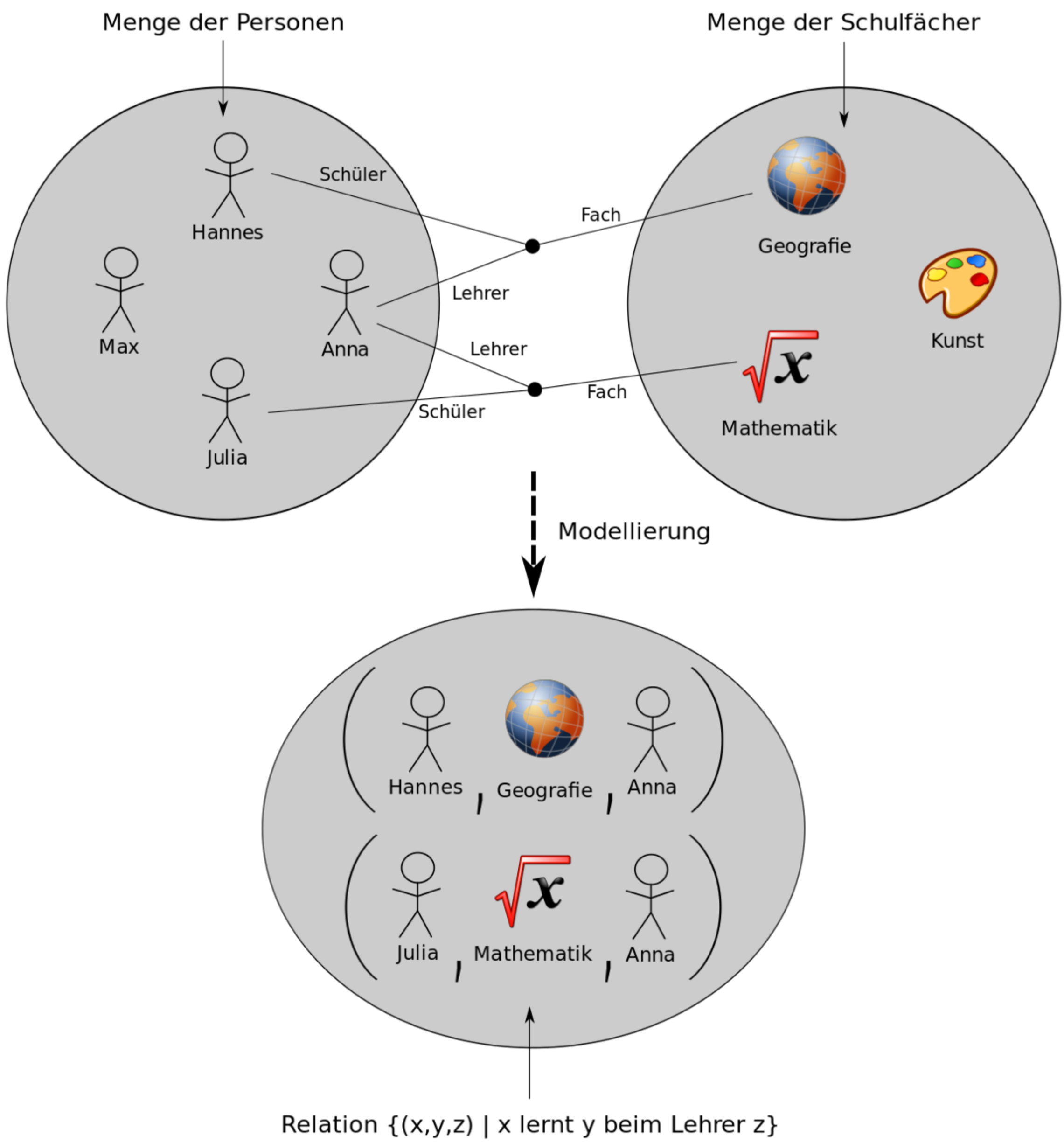


Abb. 51 Relation „x lernt y beim Lehrer z“

Zum Schluss schauen wir uns ein Beispiel für eine Beziehung an, in der drei Objekte involviert sein. Ein Beispiel für eine solche Beziehung ist die Relation „x lernt y beim Lehrer z“. Dabei sind x und z Menschen der Menge M und y ein Schulfach der Menge F.

Diese Beziehung beschreiben wir über ein 3-Tupel[3]. Wir definieren eine neue Menge R von 3er-Tupeln (x,y,z) mit $x,z \in M$ und $y \in F$ für die gilt, dass der Mensch x beim Lehrer z das Schulfach y lernt. Es ist also $R = \{(x,y,z) \,|\, x \text{ lernt } y \text{ beim Lehrer } z\}$.

Auf der rechten Seite siehst du eine Abbildung, die diese Modellierung veranschaulicht. Hier ist Anna Lehrerin der Fächer Mathematik und Geografie. Julia ist Schülerin im Mathematikunterricht und Hannes Schüler im Geografieunterricht bei Anna. Max ist weder Schüler noch Lehrer. Außerdem gibt es in unserem Beispiel weder Schüler noch Lehrer für das Fach Kunst.

18.2. Definition

Aus den obigen Beispielen lässt sich ein Prinzip ablesen, wie Relationen in der Mathematik modelliert werden. Sei dazu R eine n-stellige Relation zwischen den Mengen A_1 bis A_n. Dies bedeutet, dass R eine Relation ist, die zwischen n Objekten a_1 bis a_n besteht und dass $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$,... ,$a_n \in A_n$ ist. Wie wird R in der Mathematik modelliert?

R wird modelliert als Menge von n-Tupeln $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der Objekte a_1 bis a_n mit $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ ... $a_n \in A_n$. Dabei enthält R genau diejenigen n-Tupel von Objekten, die in Relation zueinander stehen. Somit ist R eine Teilmenge des kartesischen Produkts[4] $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ($A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ist die Menge *aller* n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ ... $a_n \in A_n$. R enthält nur diejenigen Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der Objekte a_1 bis a_n, die in Relation zueinander stehen und ist damit eine Teilmenge von $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$).
Definition 19. Relation

Eine *n-stellige Relation R* zwischen Objekten der Mengen A_1 bis A_n ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Diese Art der Relation kann nicht die Qualität einer Relation beschreiben. Entweder stehen bestimmte Objekte in Relation zueinander oder nicht, aber sie können nicht mehr oder weniger in Relation zueinander stehen. Im Beispiel der Liebesbeziehung bedeutet dies, dass entweder x die Person y liebt oder nicht. Jedoch können wir mit Hilfe der obigen Definition nicht beschreiben, dass x die Person y mehr liebt als die Person z oder dass x die Person y mag, aber nicht liebt.

Die häufigste Art der Relation ist die *binäre Relation*:
Definition 20. binäre Relation

Eine *binäre Relation* ist eine zweistellige Relation. Eine binäre Relation ist damit eine Beziehung, die zwischen Objekten zweier Mengen A und B existiert und damit eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$.

Für eine binäre Relation $R \subseteq A \times B$ gibt es eine eigene Schreibweise für die Relation zwischen zwei Objekten a und b. Um auszudrücken, dass a mit b in Relation steht, kann man neben $(a,b) \in R$ auch aRb schreiben. Ein Beispiel hierfür ist die Relation $<:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \text{ ist kleiner als } y\}$, die „$x$ ist kleiner als y"-Relation auf den reellen Zahlen (hier ist „$<$" das Zeichen für die Relation). Anstatt nun $(2,3) \in <$ zu schreiben (was bedeutet, dass 2 kleiner als 3 ist), kann man auch $2 < 3$ schreiben, wie du es bereits aus der Schule kennst.

3 Kapitel 17 auf Seite 129
4 Kapitel 17 auf Seite 129

<u>Frage</u>: *Sei* $M = \{1, 2, 3, 4\}$. *Wie sehen folgende Relationen als Mengen von Tupeln aus?*

- R_1: *„x ist eine gerade Zahl."*
- R_2: *„x ist eine Quadratzahl."*
- R_3: *„x ist kleiner als y"*
- R_4: *„x ist ein Teiler von y" oder gleichwertig „die Division y durch x hinterlässt keinen Rest"*
- R_5: *„$x^2 + y^2 = z^2$"*\antwort=
- $$\begin{aligned} R_1 &= \{x \in M \,|\, x \text{ ist gerade}\} \\ &= \{2, 4\} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} R_2 &= \{x \in M \,|\, x \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\ &= \{1, 4\} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} R_3 &= \{(x, y) \in M^2 \,|\, x \text{ ist kleiner als } y\} \\ &= \{(1,2); (1,3); (1,4); (2,3); (2,4); (3,4)\} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} R_4 &= \{(x, y) \in M^2 \,|\, x \text{ ist ein Teiler von } y\} \\ &= \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,2); (2,4); (3,3); (4,4)\} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} R_5 &= \{(x, y, z) \in M^3 \,|\, x^2 + y^2 = z^2\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

19. Binäre Relationen

19.1. Binäre Relationen

Binäre Relationen sind zweistellige Relationen, also Teilmengen des kartesischen Produkts $A \times B$ der Mengen A und B.

19.1.1. Homogene und heterogene Relationen

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times B$ heißt *homogen*, wenn die Mengen A und B identisch sind. Im Fall $A \neq B$ nennt man die Relation $R \subseteq A \times B$ *heterogen*.

Homogene Relationen beschreiben damit Beziehungen *innerhalb* einer Menge und heterogene Relationen beschreiben Beziehungen von Objekten aus *unterschiedlichen* Mengen.

Verständnisfrage: Welche der folgenden Relationen ist homogen und welche sind heterogen?

1. *„Die Person x liebt die Person y“*
2. *„Die natürliche Zahl x ist kleiner als die rationale Zahl y“*
3. *„Die natürliche Zahl x teilt die natürliche Zahl y“*
4. *„Die Personen x und y sind in derselben Klasse“*
5. *„Die Person x studiert das Fach y“\antwort=*
6. *homogen*
7. *heterogen*
8. *homogen*
9. *homogen*
10. *heterogen*

19.1.2. Darstellung endlicher binärer Relationen

Es gibt zwei wesentliche Möglichkeiten, binäre Relationen zwischen endlichen Mengen darzustellen: *Pfeildiagramme* und *Relationsmatrizen*. Diese möchte ich dir anhand der folgenden Relationen vorstellen:

- heterogene Relation R_1: „Der Fluss x fließt im Land y“, wobei x ein Fluss der Menge $\{\text{Nil}, \text{Elbe}, \text{Donau}, \text{Rhein}\}$ und y ein Land der Menge $\{\text{Irland}, \text{Deutschland}, \text{Niederlande}, \text{Ukraine}\}$ ist.
- homogene Relation R_2: „x ist ein Nachfolger von y“

Pfeildiagramm

Die erste Möglichkeit der Darstellung sind *Pfeildiagramme*. Hier werden alle Objekte, die in Relation zueinander stehen, durch Pfeile miteinander verbunden. So sieht die heterogene Relation R_1 „Der Fluss x fließt im Land y“ im Pfeildiagramm so aus:

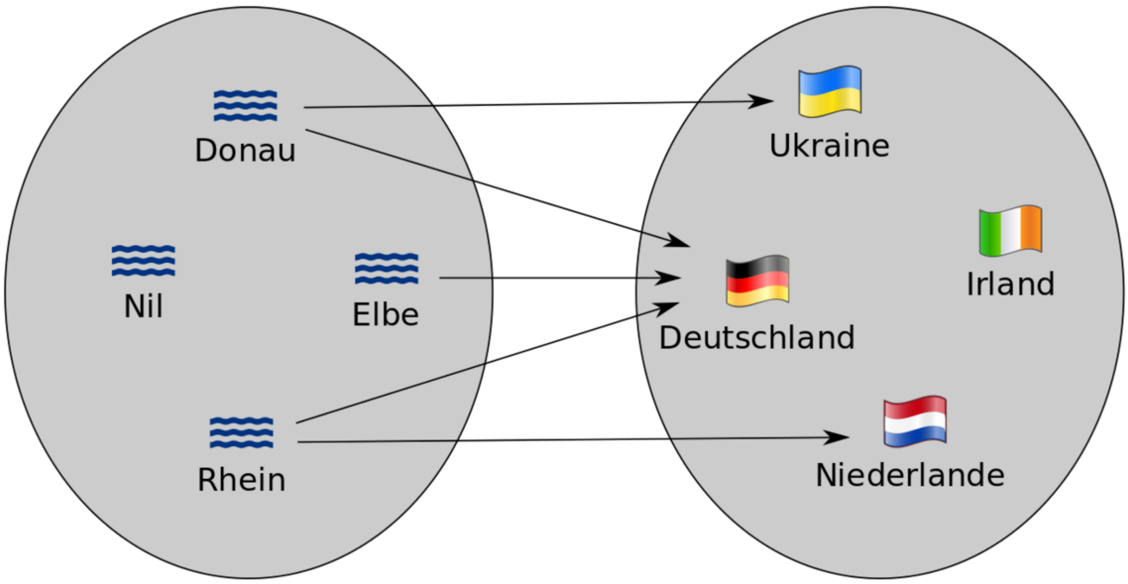


Abb. 52

Da die zweite Relation R_2 „x ist ein Nachfolger von y“ homogen ist, kann hier auf die Darstellung zweier Mengen verzichtet werden:

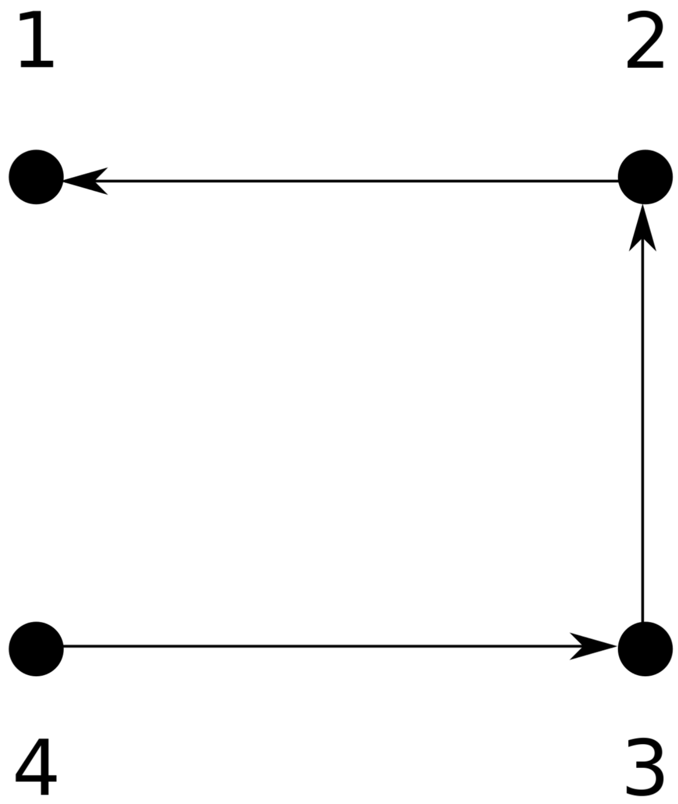


Abb. 53

<u>Verständnisfrage</u>: *Erstelle die Pfeildiagramme für folgende binäre Relationen auf der Grundmenge* $\{1,2,3,4\}$

1. *x ist größer als y*
2. *x ist ein Teiler von y*
3. *x ergibt bei Division mit 2 denselben Rest wie y|antwort=*

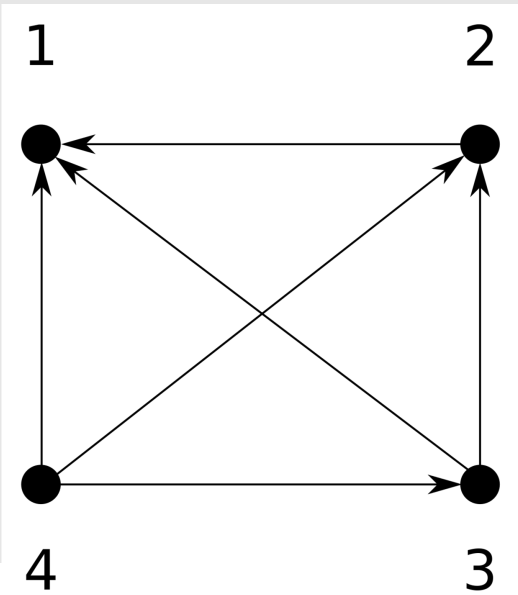


Abb. 54 *Relation „x ist größer als y“*

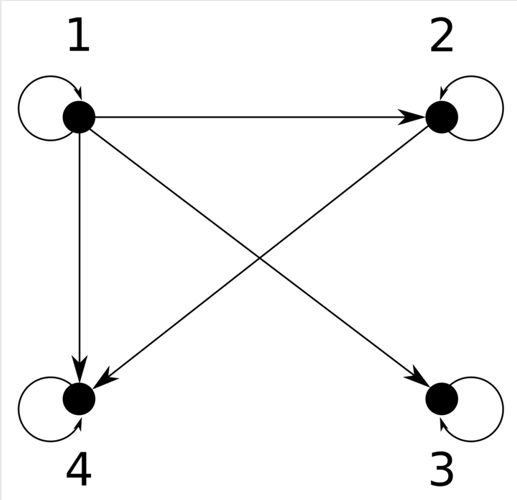


Abb. 55 Relation „x ist ein Teiler von y“

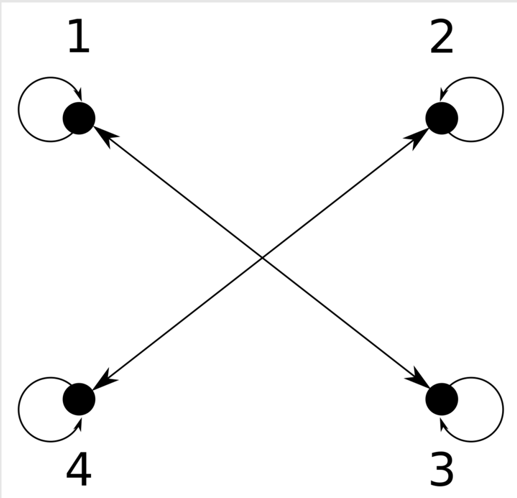


Abb. 56 Relation „x ergibt bei Division mit 2 denselben Rest wie y“

Relationsmatrix

Bei der Relationsmatrix wird eine Tabelle für die Relation aufgestellt. Hier wird jeder Zelle eingetragen, ob das Objekt der aktuellen Spalte mit dem Objekt der aktuellen Zeile in Relation steht. Die Relation R_1 „Der Fluss x fließt im Land y“ sieht als Relationsmatrix so aus:

	Irland	Deutschland	Niederlande	Ukraine
Donau		X		X
Elbe		X		
Nil				
Rhein		X	X	

Die Relationsmatrix der Relation R_2 „x ist ein Nachfolger von y“ auf der Menge $\{1,2,3,4\}$ ist folgende:

	1	2	3	4
1				
2	X			
3		X		
4			X	

Die *Hauptdiagonale* in der Relationsmatrix zu einer homogenen Relation ist die Menge der Zellen, bei denen die Objekte der Spalte dieselben sind wie die Objekte der Zeile:

	1	2	3	…	n
1	*Haupt-*				
2		*dia-*			
3			*gona-*		
…				⋱	
n					*le*

<u>Verständnisfrage</u>: Erstelle die Relationsmatrizen für folgende binäre Relationen auf der Grundmenge $\{1,2,3,4\}$

1. *x ist größer als y*
2. *x ist ein Teiler von y*
3. *x ergibt bei Division mit 2 denselben Rest wie y|antwort= Relationsmatrix für die Relation „x ist größer als y“ auf der Grundmenge* $\{1,2,3,4\}$*:*

	1	*2*	*3*	*4*
1				
2	*X*			
3	*X*	*X*		
4	*X*	*X*	*X*	

Relationsmatrix für die Relation „x ist ein Teiler von y“ auf der Grundmenge $\{1,2,3,4\}$*:*

	1	*2*	*3*	*4*
1	*X*	*X*	*X*	*X*
2		*X*		*X*
3			*X*	
4				*X*

Relationsmatrix für die Relation „x ergibt bei Division mit 2 denselben Rest wie y“ auf der Grundmenge $\{1,2,3,4\}$*:*

	1	*2*	*3*	*4*
1	*X*		*X*	
2		*X*		*X*
3	*X*		*X*	
4		*X*		*X*

19.2. Eigenschaften homogener Relationen

Im Folgenden sei R eine homogene Relation auf der Grundmenge A, also $R \subseteq A \times A$.

Eigenschaft	**Definition**	**Definition in formaler Schreibweise**	**Merkmale**

Eigenschaft	**Definition**	**Definition in formaler Schreibweise**	**Merkmale**
reflexiv	Jedes Objekt der Grundmenge steht mit sich selbst in Relation.	$\forall a \in A : aRa$	• Im Pfeildiagramm ist jedes Objekt mit sich selbst verbunden. • In der Relationsmatrix ist die Hauptdiagonale voll besetzt.
irreflexiv	Es gibt kein Objekt, welches mit sich selbst in Relation steht	$\forall a \in A : \neg aRa$	• Im Pfeildiagramm steht kein Objekt mit sich selbst in Relation • In der Relationsmatrix ist die Hauptdiagonale komplett unbesetzt.
symmetrisch	Steht ein Objekt a in Relation mit dem Objekt b, dann steht auch b in Relation mit a	$\forall a,b \in A : aRb \Rightarrow bRa$	• Die Relationsmatrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonale
antisymmetrisch	Zwei *verschiedene* Objekte a und b stehen nicht gegenseitig in Relation zueinander.	$\forall a,b \in A : aRbbRa \Rightarrow a = b$	• Die Relationsmatrix ist komplementär zu Hauptdiagonale.
transitiv	Steht a mit b und b mit c in Relation, dann steht auch a mit c in Relation.	$\forall a,b,c \in A : aRbbRc \Rightarrow aRc$	
linear	Für jeweils zwei Objekte a und b stehen a mit b und/oder b mit a in Relation.	$\forall a,b \in A : aRb \vee bRa$	

ndnisfrage: Welche Eigenschaften haben die folgenden Relationen?

t kleiner als y“ für $x,y \in \mathbb{N}$
t kleiner oder gleich y“ für $x,y \in \mathbb{N}$
t ein Teiler von y“ für $x,y \in \mathbb{N}$
nd y sind ganze Zahlen“ für $x,y \in \mathbb{N}$
nd y sind ganze Zahlen“ für $x,y \in \mathbb{R}$|antwort=

Relation	***reflexiv***	***irreflexiv***	***symmetrisch***	***antisymmetrisch***	***transitiv***	***linear***
„x ist kleiner als y“ für $x,y \in \mathbb{N}$		*X*		*X*	*X*	
„x ist kleiner oder gleich y“ für $x,y \in \mathbb{N}$	*X*			*X*	*X*	*X*
„x ist ein Teiler von y“ für $x,y \in \mathbb{N}$	*X*			*X*	*X*	
„x und y sind ganze Zahlen“ für $x,y \in \mathbb{N}$	*X*		*X*		*X*	
„x und y sind ganze Zahlen“ für $x,y \in \mathbb{R}$			*X*		*X*	

Verständnisfrage: Ist jede nicht reflexive Relation irreflexiv? Wieso?
Es gibt Relationen, die weder reflexiv noch irreflexiv sind. Ein Beispiel hierfür ist die Relation „x und y sind gerade Zahlen“ auf der Menge $\{1,2,3,4\}$ mit der Relationsmatrix

	1	2	3	4
1				
2		X		X
3				
4		X		X

Verständnisfrage: Ist jede nicht symmetrische Relation antisymmetrisch? Wieso?
Es gibt Relationen, die weder symmetrisch noch antisymmetrisch sind. Ein Beispiel hierfür ist die Relation „x und y sind kleiner gleich 2“ auf der Menge $\{1,2,3,4\}$ mit der Relationsmatrix

	1	2	3	4
1	X	X		
2	X	X		
3				
4				

Verständnisfrage: Ist jede lineare Relation reflexiv? Wieso?
Sei R eine lineare Relation über der Grundmenge M. Dann gilt $\forall a \in M \forall b \in M : aRb \vee bRa$. Damit gilt insbesondere auch $\forall a \in M : aRa \vee aRa$ und damit $\forall a \in M : aRa$. Dies ist aber gerade die Definition der Reflexivität. Also ist jede lineare Relation reflexiv.

20. Äquivalenzrelationen

20.1. Einführendes Beispiel

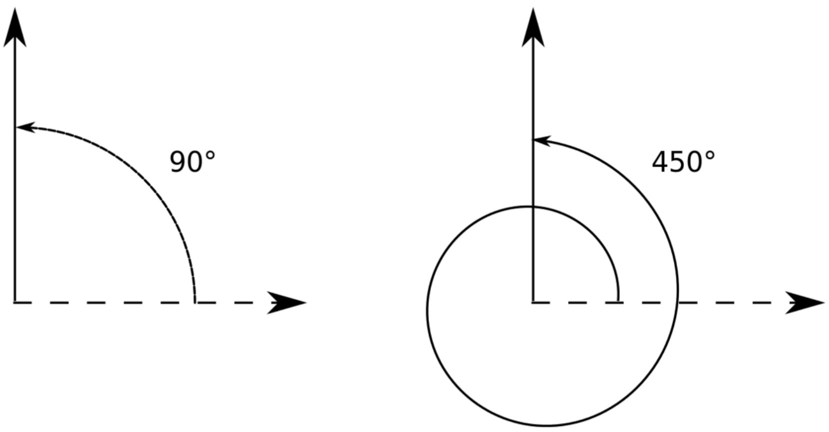


Abb. 57 Das Ergebnis einer Drehung um 90° ist dasselbe Ergebnis wie bei einer Drehung um 450°.

Oftmals verhalten sich verschiedene Objekte in bestimmten Aspekten gleich oder besitzen gleiche, beziehungsweise sehr ähnliche Eigenschaften. So ist das Ergebnis einer Drehung von 90° dasselbe wie bei einer Drehung von 450°. Exemplare von Büchern derselben ISB-Nummer besitzen denselben Inhalt und Autor. In diesem Kapitel wirst du die mathematischen Werkzeuge kennen lernen, mit denen du solche Äquivalenzen zwischen Objekten einer Grundmenge sauber beschreiben kannst.

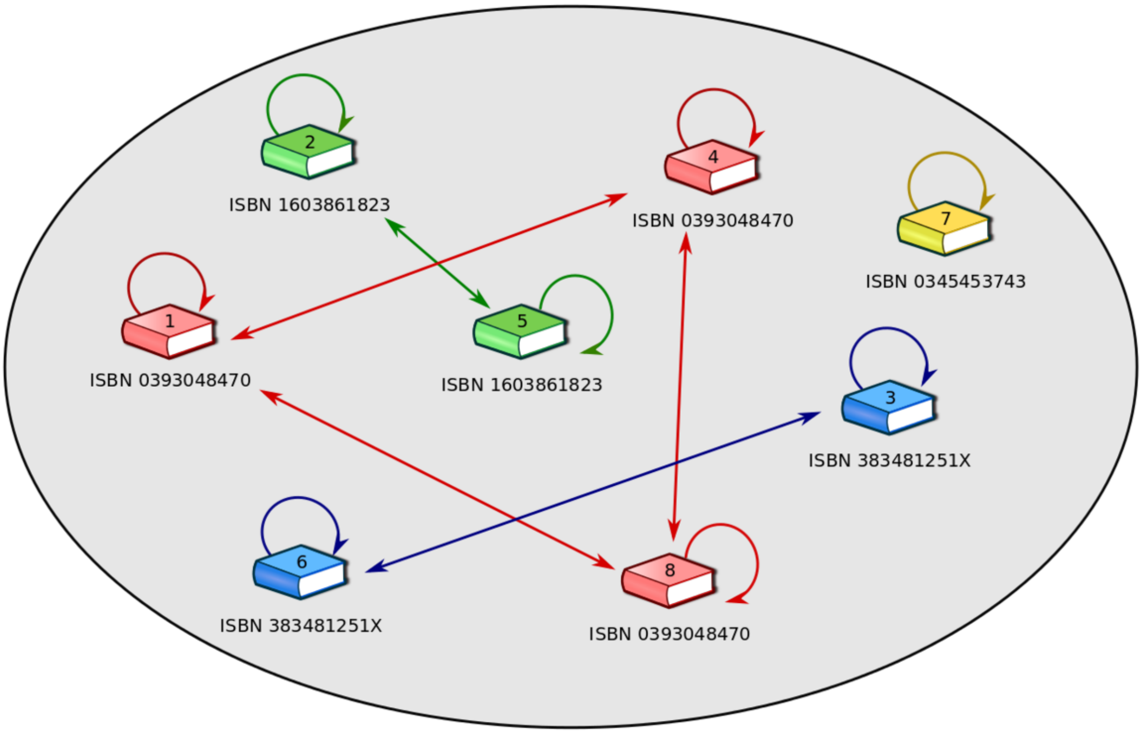


Abb. 58 Menge mit acht Buchexemplaren und eingezeichneter Äquivalenzrelation „x und y besitzen dieselbe ISB-Nummer“ als Pfeildiagramm.

Eine Beziehung, die die Gleichwertigkeit zwischen Objekten unter bestimmten Aspekten ausdrückt, wird *Äquivalenzrelation* genannt. Wir werden sehen, dass folgende Relation auf der Grundmenge aller bisher gedruckter Buchexemplare eine Äquivalenzrelation ist:

x und y besitzen dieselbe ISB-Nummer.

Frage: Welche Eigenschaften besitzt diese Relation?
Die Relation ist

- reflexiv (Für jedes Exemplar x gilt: x und x besitzen dieselbe ISB-Nummer.)
- *nicht irreflexiv* (Da die Relation reflexiv ist, steht jedes Exemplar mit sich selbst in Relation. Weil die Grundmenge nicht leer ist, gibt mindestens ein Exemplar x das mit sich selbst in Relation steht und damit ist die Relation nicht irreflexiv.)
- *symmetrisch* (Wenn x und y dieselbe ISB-Nummer besitzen, dann besitzen auch y und x dieselbe ISB-Nummer.)
- *nicht antisymmetrisch* (Es gibt mindestens zwei verschiedene Exemplare x und y, die dieselbe ISB-Nummer besitzen. Für diese beiden Exemplare steht zwar x in Relation zu y und y in Relation zu x, aber es ist $x \neq y$.)
- *transitiv* (Wenn x und y dieselbe ISB-Nummer besitzen und y und z dieselbe ISB-Nummer besitzen, dann besitzen auch x und z dieselbe ISB-Nummer.)
- *nicht linear* (Gegenbeispiel: Nehme zwei Exemplare x und y, so dass beide eine verschiedene ISB-Nummer haben. Dann steht weder x mit y noch y mit x in Relation. Damit ist die Relation nicht linear.)

Wir werden sehen, dass die Eigenschaften der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität der obigen Relation, genau diejenigen sind, die hinreichend und notwendig für eine Äquivalenzrelation sind.

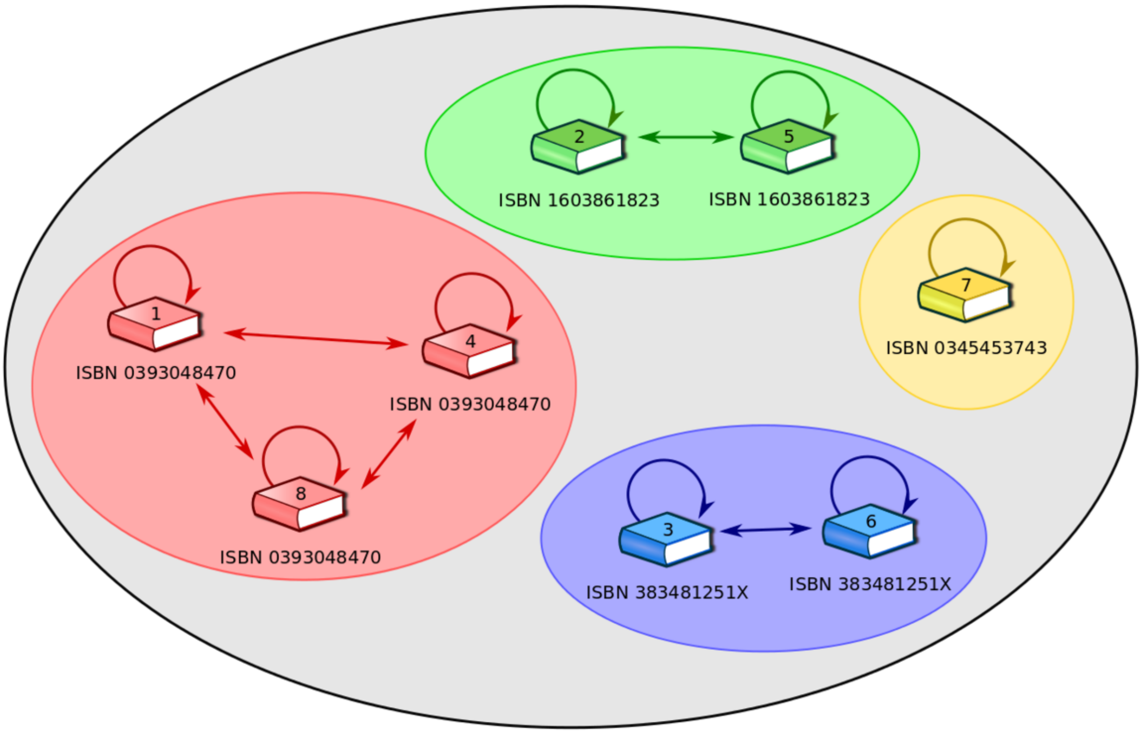


Abb. 59 Menge von acht Buchexemplaren, die durch die Äquivalenzrelation „x und y besitzen dieselbe ISB-Nummer" in Äquivalenzklassen zerlegt wurde.

Es gibt eine weitere Möglichkeit Äquivalenzrelationen zu beschreiben: Die Möglichkeit die Grundmenge in verschiedene disjunkte Teilmengen zu zerlegen. Nehmen wir wieder das obige Beispiel mit den Büchern. Stell dir vor, wir fassen alle Exemplare in eine Menge zusammen, die dieselbe ISB-Nummer besitzen. Es kommen also genau dann zwei Bücher x und y in dieselbe Menge, wenn sie dieselbe ISB-Nummer besitzen, wenn also x in Relation zu y steht. Eine so entstandene Teilmenge werden wir später *Äquivalenzklasse* nennen.

Das Ergebnis ist eine Zerlegung der Grundmenge aller gedruckter Buchexemplare in disjunkte Teilmengen. Jede dieser Teilmenge steht für ein konkretes Schriftwerk eines Autors. Denn jede ISB-Nummer bezeichnet eineindeutig ein solches Schriftwerk und jede Teilmenge enthält genau diejenigen Exemplare, die dieselbe ISB-Nummer besitzen. Man kann diese Teilmengen nun als neue Objekte betrachten. Dadurch erhältst du die Menge aller Schriftwerke. Jedes Schriftwerk ist dabei als Menge, nämlich der Menge aller Exemplare dieses Schriftwerks, modelliert. Durch eine Zerlegungen einer Menge mit Hilfe einer Äquivalenzrelation können also neue Objekte modelliert werden (dies ist eine gängige Vorgehensweise in der Mathematik).

20.2. Definitionen

20.2.1. Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation ist folgendermaßen definiert:
Definition 21. Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation ist eine homogene, binäre Relation auf einer Grundmenge, die folgende Eigenschaften besitzt:

- reflexiv
- symmetrisch
- transitiv

Zwei Elemente, die bezüglich einer Äquivalenzrelation in Relation stehen, heißen *äquivalent*. Wenn zwei Elemente x und y äquivalent zueinander bezüglich einer Äquivalenzrelation R sind, schreibt man oft $x \sim_R y$ oder einfach $x \sim y$ anstatt der sonst üblichen Schreibweise xRy beziehungsweise $(x,y) \in R$.

Verständnisfrage: Was musst du tun, wenn du entscheiden sollst, ob eine Relation eine Äquivalenzrelation ist oder nicht?
Um zu entscheiden, ob eine Relation eine Äquivalenzrelation ist, musst du folgende Fragen beantworten:

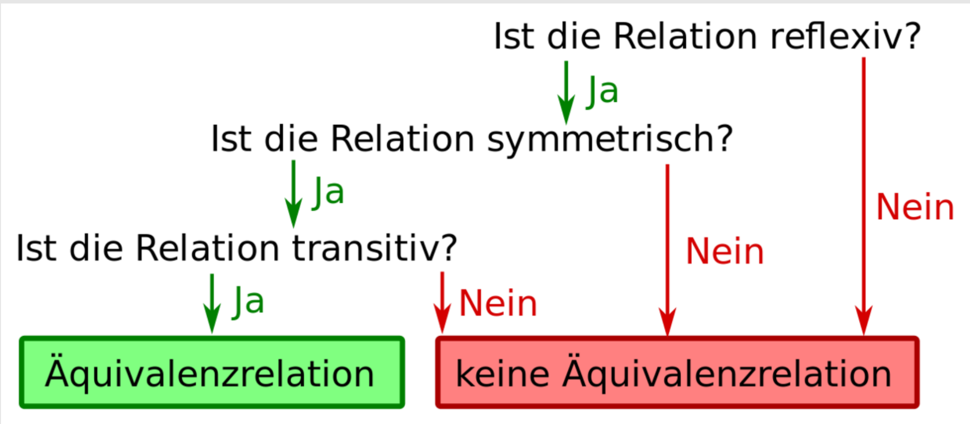


Abb. 60 Entscheidungsbaum zum Nachweis von Äquivalenzrelationen

Verständnisfrage: Welche der folgenden Relationen ist eine Äquivalenzrelation?

1. *„x und y gehen in dieselbe Klasse“ auf der Menge aller Schüler einer Schule*
2. *„$x \geq y$“ auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen*
3. *„x und y sind ungerade“ auf der Menge $\mathbb{N}_{\geq 1}$*
4. *„x und y besitzen denselben Rest bei der Division durch zwei“ auf der Menge $\mathbb{N}_{\geq 1}$*
5. *„$x = y$“ auf einer beliebigen, nicht leeren Grundmenge M|antwort= Antwort:*
6. *Äquivalenzrelation*

7. *keine Äquivalenzrelation (die Relation ist nicht symmetrisch – so ist zwar $-3 \leq -1$, aber nicht auch $-1 \leq -3$)*
8. *keine Äquivalenzrelation (die Relation ist nicht reflexiv – beispielsweise steht 3 nicht mit sich selbst in Relation)*
9. *Äquivalenzrelation*
10. *Äquivalenzrelation*

Verständnisfrage: Wie viele lineare Äquivalenzrelationen auf einer Grundmenge M gibt es?
Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation auf der Grundmenge M. Seien $x, y \in M$ beliebig. Da R linear ist, steht entweder x in Relation zu y oder y in Relation zu x. Sei oBdA xRy. Auf Grund der Symmetrie ist dann aber auch yRx. Damit steht jedes Element mit jedem anderen Element in Relation.

Es gibt also genau eine lineare Relation auf einer Grundmenge M, nämlich $R = M \times M$, bei der jedes Element mit jedem anderen in Relation steht.

20.2.2. Äquivalenzklasse

Im obigen Beispiel haben wir durch die Äquivalenzrelation die Grundmenge in disjunkte Teilmengen zerlegt, indem wir alle Buchexemplare in einer Teilmenge zusammengefasst haben, die in Relation steht. Eine solche Teilmenge wird *Äquivalenzklasse* genannt und mit $[x]$ bezeichnet:
Definition 22. Äquivalenzklasse

Eine Äquivalenzklasse $[x]$ ist die Menge aller Elemente der Grundmenge M, die zum Element x äquivalent sind:

$$[x] := \{y \in M \,|\, y \sim x\}$$

Wenn du die Relation explizit angeben musst, kannst du auch $[x]_R$ schreiben. Es ist dann

$$[x]_R := \{y \in M \,|\, y \sim_R x\}$$

Das Element x in der Schreibweise $[x]$ nennt man *Repräsentant* oder *Vertreter*. Ist unsere obige Definition für Äquivalenzklassen korrekt im Sinne, dass $[x] = [y]$ wenn x und y äquivalent zueinander sind? Dies beantwortet der folgende Satz:
Satz 2.

Ist $x \sim y$, dann ist $[x] = [y]$
Beweis 15.

Sei $x \sim y$. Zu zeigen ist, dass $[x] \subseteq [y]$ und $[y] \subseteq [x]$ ist. Sei also $a \in [x]$ beliebig. Es gilt damit $a \sim x$. Da außerdem $x \sim y$ ist, folgt aus der Transitivität der Äquivalenzrelation, dass auch $a \sim y$ ist. Dies bedeutet aber $a \in [y]$. Da $a \in [x]$ beliebig war, ist $[x] \subseteq [y]$.

Dass auch $[y] \subseteq [x]$ ist, kannst du analog beweisen.

Es gilt auch die Umkehrung des obigen Satzes:

Satz 3.

Aus $[x] = [y]$ folgt $x \sim y$
Beweis 16.

Sei $[x] = [y]$. Damit ist $[x] \subseteq [y]$, also $a \in [y]$ für alle $a \in [x]$. Nun ist $x \in [x]$, da $x \sim x$ aufgrund der Reflexivität der Äquivalenzrelation. Daraus folgt, dass $x \in [y]$ und somit nach Definition $x \sim y$ ist.

Zusammen ergeben die vorherigen beiden Sätze folgenden wichtigen Satz:
Satz 4. *Zusammenhang zwischen Äquivalenz der Repräsentanten und der Äquivalenzklassen*

Für Äquivalenzklassen und deren Vertreter gilt folgender Zusammenhang:

$$[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$$

Verständnisfrage: Wie sehen die Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelationen aus:

1. *„x und y gehen in dieselbe Klasse“ auf der Menge aller Schüler einer Schule*
2. *„$x \geq y$“ auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen*
3. *„x und y sind ungerade“ auf der Menge $\mathbb{N}_{\geq 1}$*
4. *„x und y besitzen denselben Rest bei der Division durch zwei“ auf der Menge $\mathbb{N}_{\geq 1}$*
5. *„$x = y$“ auf einer beliebigen, nicht leeren Grundmenge M\antwort= Anwtort:*
6. *Die Menge der Äquivalenzklassen ist die Menge aller Klassen der Schule. Dabei ist jede Klasse als Menge aller Schüler modelliert, die diese Klasse besuchen.*
7. *Es gibt zwei Äquivalenzklassen: Die Menge $\{2,4,6,8,\ldots\}$ aller Zahlen, die restlos durch 2 geteilt werden können, und die Menge $\{1,3,5,7,\ldots\}$ aller Zahlen, die bei Division durch 2 den Rest 1 lassen. Damit zerfällt die Grundmenge $\mathbb{N}_{\geq 1}$ in die Menge der geraden und in die Menge der ungeraden Zahlen.*
8. *Jede Äquivalenzklasse ist einelementig. Die Grundmenge zerfällt also in die Menge $\{\{x\} \,|\, x \in M\}$ (Beachte, dass dies eine Menge von einelementigen Mengen ist. Die Zerlegungsmenge ist ungleich der Grundmenge)*

20.2.3. Zerlegung einer Menge

Oft haben wir bereits von der Zerlegung einer Menge gesprochen (welche in der Mengenlehre auch *Partition* genannt wird). Hier die Definition der Zerlegung einer Menge (im nächsten Abschnitt werden wir den Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelation und der durch ihr definierten Zerlegung untersuchen):
Definition 23. Zerlegung einer Menge

Eine Zerlegung einer Menge M ist eine Menge P von Teilmengen von M, so dass

- die Vereinigung aller Mengen von P die Menge M ergibt: $\bigcup_{A \in P} A = M$
- alle Mengen von P paarweise disjunkt sind: $\forall A, B \in P : A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$
- alle Mengen von P nicht leer sind: $\forall A \in P : A \neq \emptyset$

20.3. Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und der Zerlegung einer Menge

Wollen wir nun den Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und der Zerlegung einer Menge untersuchen. Im einführenden Beispiel haben wir gesehen, dass eine Äquivalenzrelation eine Zerlegung der Grundmenge definiert, indem man alle äquivalenten Elemente in einer Teilmenge, der Äquivalenzklasse, zusammenfasst. Eine solche Zerlegung einer Menge durch eine Äquivalenzrelation wird mit $M/\sim$ bezeichnet und in bestimmten Kontexten der Mathematik *Quotientenraum* oder *Faktorraum* genannt. Die Zerlegung $M/\sim$ der Grundmenge M ist also:

$$M/\sim := \{[x] \mid x \in M\}$$

Doch ist dies wirkliche eine Zerlegung im Sinne der obigen Definition? Beweisen wir es:
Satz 5. *Äquivalenzrelationen induzieren eine Zerlegung*

Sei R eine Äquivalenzrelation auf der Grundmenge M. Dann ist die Menge aller Äquivalenzklassen $M/\sim_R := \{[x]_R \mid x \in M\}$ eine Zerlegung der Grundmenge.
Beweis 17. *Äquivalenzrelationen induzieren eine Zerlegung*

Um zu zeigen, dass $M/\sim := \{[x] \mid x \in M\}$ eine Zerlegung von M ist, müssen wir folgende Behauptungen beweisen:

1. Behauptung: $\bigcup_{A \in P} A = M$
Es ist genau dann $\bigcup_{A \in P} A = M$, wenn $\bigcup_{A \in P} A \subseteq M$ und wenn $M \subseteq \bigcup_{A \in P} A$ ist.

1.1 Behauptung: $\bigcup_{A \in P} A \subseteq M$
Jede Äquivalenzklasse $A \in P$ ist nach Definition eine Teilmenge von M. Damit ist auch die Vereinigung aller Äquivalenzklassen $\bigcup_{A \in P} A$ eine Teilmenge von M.

1.2 Behauptung: $M \subseteq \bigcup_{A \in P} A$
Sei $x \in M$ beliebig. Da auf Grund der Reflexivität von R das Element x in Relation zu sich selbst steht, ist $x \in [x]$. Nun ist $[x] \in P$ und damit

$$x \in [x] \subseteq \bigcup_{A \in P} A \Rightarrow x \in \bigcup_{A \in P} A$$

Da x beliebig war, ist $M \subseteq \bigcup_{A \in P} A$.

2. Behauptung: $\forall A, B \in P : A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$
Seien $A, B \in P$ mit $A \neq B$. Dann ist $A = [x]$ und $B = [y]$ für ein $x, y \in M$.

Widerspruchsbeweis: Sei $A \cap B = [x] \cap [y] \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $a \in M$ mit $a \in [y]$ und $a \in [x]$. Damit ist $a \sim x$ und $a \sim y$. Aus der Transitivität folgt $x \sim y$ und damit $[x] = [y]$ aus dem Satz über den Zusammenhang zwischen Äquivalenzklassen und der Äquivalenz der Repräsentanten des vorherigem Abschnitts. Jedoch ist $A = [x] = [y] = B$ ein Widerspruch zu Annahme $A \neq B$, so dass $A \cap B = \emptyset$ sein muss.

3. Behauptung: $\forall A \in P : A \neq \emptyset$
Sei $A \in P$ beliebig. Dann ist $A = [x]$ für ein $x \in M$. Wegen der Reflexivität von der Äquivalenzrelation ist $x \sim x$ und damit $x \in [x]$. Daraus folgt, dass insbesondere $A = [x] \neq \emptyset$ ist.

Doch wie sieht es umgekehrt aus? Kannst du aus einer vorgegebenen Partition P einer Menge M so eine Äquivalenzrelation definieren, dass $M/\sim = P$ ist?

<u>Frage</u>: Wie kann eine solche Äquivalenzrelation aussehen?
Damit die induzierte Menge der Äquivalenzrelation gleich der Partitionsmenge P sein kann, muss für alle $x, y \in M$ gelten:

x und y geḧ

oren derselben Partitionsmenge an $\Rightarrow x \sim y$

Damit gibt es nur einen möglichen Kandidaten einer Äquivalenzrelation:

$x \sim y :\Leftrightarrow \exists A \in P : x, y \in A$

Satz 6. *Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation*

Sei M eine Menge und P eine Zerlegung dieser Menge. Dann gibt es genau eine Äquivalenzrelation $\sim$, die diese Zerlegung induziert, für die also $M/\sim = P$ ist. Diese Äquivalenzrelation ist definiert durch:

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists A \in P : x, y \in A$$

Beweis 18. *Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation*

Sei M eine Menge und P eine Zerlegung dieser Menge.

Existenz einer Äquivalenzrelation, die diese Zerlegung induziert
Wir definieren die Relation $\sim$ über folgende Definition:

$x \sim y :\Leftrightarrow \exists A \in P : x, y \in A$

1. Behauptung: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation

1.1 Behauptung: $\sim$ ist reflexiv
Sei $x \in M$ beliebig. Da die Vereinigung aller Mengen von P die Grundmenge ergibt, gibt es eine Menge $A \in P$ mit $x \in A$. Damit ist

$$(\exists A \in P : x, x \in A) \Rightarrow x \sim x$$

1.2 Behauptung: $\sim$ ist symmetrisch
Sei $x, y \in M$ beliebig. Es ist

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow \exists A \in P : x, y \in P \\ &\Leftrightarrow \exists A \in P : y, x \in P \\ &\Leftrightarrow y \sim x \end{aligned}$$

1.3 Behauptung: $\sim$ ist transitiv
Sei $x, y, z \in M$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gibt es ein $A \in P$ und ein $B \in P$ mit $x, y \in A$ und $y, z \in B$. Damit ist $A \cap B \neq \emptyset$, da y sowohl ein Element von A als auch ein Element von B ist. Da P eine Partition ist, muss $A = B$ sein. Daraus folgt $x, z \in A = B$ und damit $x \sim z$.

2. Behauptung: $\forall A \in P : \forall x \in A : [x] = A$
Sei $A \in P$ und $x \in A$ beliebig.

2.1 Behauptung: $[x] \subseteq A$
Sei $y \in [x]$ beliebig, also $x \sim y$. Dann gibt es ein $B \in P$ mit $x, y \in B$. Da $x \in A$ und $x \in B$ ist, ist $A \cap B \neq \emptyset$. Daraus folgt $A = B$, weil verschiedene Mengen von P disjunkt sind. Damit ist $y \in B = A$, was zu beweisen war.

2.2 Behauptung: $A \subseteq [x]$
Sei $y \in A$ beliebig. Damit ist sowohl x als auch y ein Element von A und damit $y \sim x$. Daraus folgt $y \in [x]$. Da $y \in A$ beliebig war, ist $A \subseteq [x]$.

Aus den Behauptungen (2.1) und (2.2) folgt, dass $[x] = A$ ist.

3. Behauptung: $M/\sim = P$

3.1 Behauptung: $M/\sim \subseteq P$
Sei $[x] \in M/\sim$ beliebig. Da $\bigcup_{A \in P} A = M$ ist, gibt es ein $A \in P$ mit $x \in A$. Aus der Behauptung (2) folgt, dass $[x] = A$ und damit $[x] = A \in P$ ist.

3.2 Behauptung: $P \subseteq M/\sim$
Sei $A \in P$ beliebig. Da alle Mengen aus P nach Definition nicht leer sind, gibt es ein $x \in M$ mit $x \in A$. Aus Behauptung (2) folgt, dass $A = [x]$ und damit $A = [x] \in M/\sim$ ist.

Die Behauptung (3) folgt direkt aus Behauptung (3.1) und (3.2).

Eindeutigkeit dieser Äquivalenzrelation
Sei $\sim_2$ eine weitere Äquivalenzrelation mit $P = M/\sim_2$. Sei $x, y \in M$ beliebig. Es gilt dann

$$\begin{aligned} x \sim_2 y &\Leftrightarrow \exists [a] \in M/\sim_2 : x, y \in [a] \\ &\downarrow P = M/\sim_2 \\ &\Leftrightarrow \exists A \in P : x, y \in A \end{aligned}$$

21. Ordnungsrelationen

21.1. Ordnungsrelation

Eine Ordnungsrelation ist wie die Äquivalenzrelation eine besondere Klasse binärer, homogener Relationen. Sie ist eine Verallgemeinerung der Kleiner-Gleich-Relation $\leq$, die du bereits auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kennst. Mit Hilfe von Ordnungsrelationen kannst du also Elemente einer Grundmenge ihrer Größe nach ordnen und miteinander vergleichen. Genau wie die Äquivalenzrelation werden Ordnungsrelationen über ihre Eigenschaften[1] definiert.

Frage: Welche Eigenschaft besitzt die Relation „$x \leq y$" auf der Grundmenge $\mathbb{R}$?
Die Kleiner-Gleich-Relation „$x \leq y$" besitzt folgende Eigenschaften:

- *reflexiv* (Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x \leq x$)
- *nicht irreflexiv* (Diese Relation ist reflexiv und die Grundmenge ist nicht leer)
- *nicht symmetrisch* (Gegenbeispiel: Es ist $23 \leq 42$ aber $42 \not\leq 23$ und damit kann die Relation nicht symmetrisch sein)
- *antisymmetrisch* (Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$)
- *transitiv* (Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$)
- *linear* (Für alle reellen Zahlen x und y ist entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$)

21.1.1. Totalordnung

Totalordnungen sind direkte Verallgemeinerungen der Kleiner-Gleich-Relation auf den reellen Zahlen, die genau diejenigen Eigenschaften besitzt, die auch die Kleiner-Gleich-Relation besitzt:
Definition 24. Totalordnung

Eine Totalordnung $R \subseteq M \times M$ ist eine binäre und homogene Relation auf der Grundmenge M, die folgende Eigenschaften besitzt:

- reflexiv
- antisymmetrisch
- transitiv
- linear

Beweis 19. *Totalordnung*

- Die $x \leq y$ Relation auf der Grundmenge $\mathbb{R}$ ist eine Totalordnung.
- Die $x \geq y$ Relation auf der Grundmenge $\mathbb{R}$ ist eine Totalordnung.
- Die lexikographische Ordnung der Wörter im Duden ist eine Totalordnung

1 Kapitel 20 auf Seite 155

21.1.2. Halbordnung

Es gibt Relationen, die bis auf die Linearität alle Eigenschaften der Totalordnung erfüllen. Damit verhalten sie sich fast wie Totalordnungen. Jedoch können bei diesen Relationen nicht alle Paare von Elemente der Grundmenge miteinander verglichen werden. Diese Relationen werden *Halbordnungen* oder *partielle Ordnungen* genannt (eben weil diese Ordnungen nur „zur Hälfte“ Totalordnungen sind):

Definition 25. Halbordnung

Eine Halbordnung $R \subseteq M \times M$ ist eine binäre und homogene Relation auf der Grundmenge M, die folgende Eigenschaften besitzt:

- reflexiv
- antisymmetrisch
- transitiv

Beweis 20. *Halbordnung*

- Die $x \leq y$ Relation auf der Grundmenge $\mathbb{R}$ ist eine Halbordnung.
- Die Teilmengenbeziehung auf jeder Menge von Mengen ist eine Halbordnung.

Aus der Definition folgt, dass jede Totalordnung eine Halbordnung ist, aber nicht jede Halbordnung ist eine Totalordnung (die Teilmengenbeziehung ist eine Halbordnung, die keine Totalordnung ist).

21.2. Nachweis von Ordnungsrelationen

Wenn du die Aufgabe hast zu entscheiden, ob eine gegebene Relation eine Totalordnung bzw. eine Halbordnung ist, so musst du schauen, ob diese Relation alle notwendigen Eigenschaften für diese Art von Relation erfüllt. Der folgende Entscheidungsbaum demonstriert dir die Vorgehensweise:

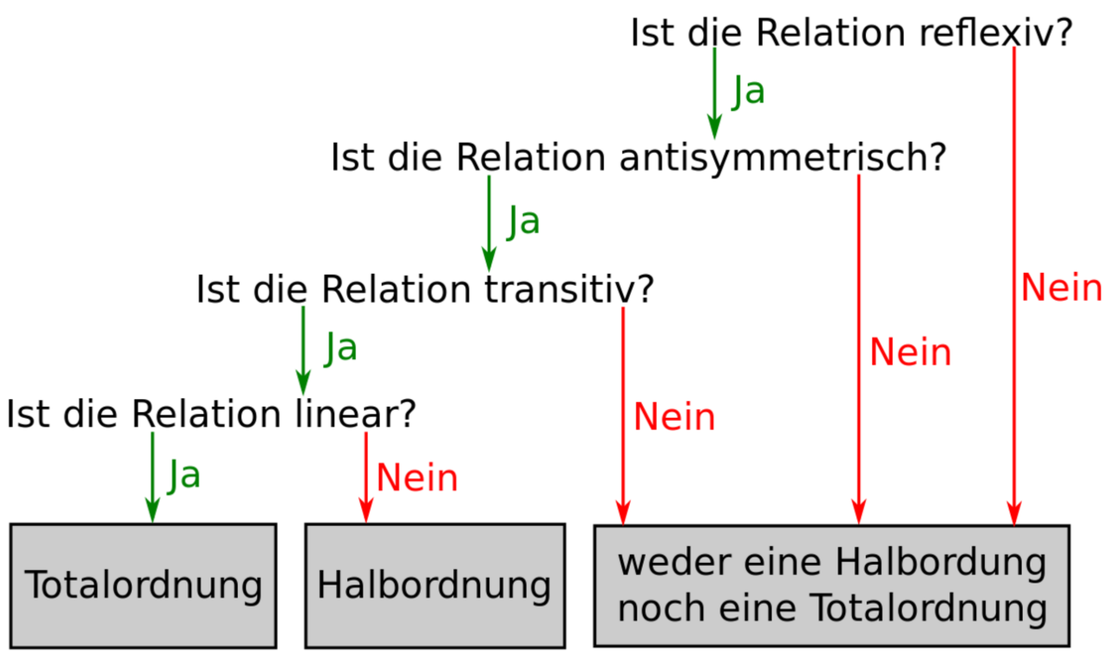


Abb. 61 zentriert

21.2.1. Beispielaufgabe

Stell dir vor, du musst folgende Aufgabe lösen:

> Ist die Relation „x ist eine Teilmenge von y“ auf der Grundmenge $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, der Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, eine Halbordnung bzw. eine Totalordnung?

Hier kannst du schrittweise vorgehen:

Beweis1

Überprüfung auf Ordnungsrelationen]UNKNOWN TEMPLATE Aufgabensammlung: Vorlage:Symbol

Beweis1

Überprüfung auf Ordnungsrelationen <onlyinclude>

UNKNOWN TEMPLATE ifeq:include

Aufgabenstellung

}|Aufgabenstellung|Welche der folgenden Relationen sind Totalordnungen bzw. Halbordnung?

1. „x ist eine Teilmenge von y“ auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ aller Teilmengen von $\mathbb{R}$
2. „$x > y$“ auf der Grundmenge $\mathbb{R}$
3. „$x \geq y$“ auf der Grundmenge $\mathbb{R}$
4. „x ist ein Teiler von y“ auf der Grundmenge $\mathbb{N}$|}}</onlyinclude>

UNKNOWN TEMPLATE Aufgabensammlung: Vorlage:Klapptext

Aufgabensammlung Mathematik: Überprüfung auf Ordnungsrelationen#Lösung zur ersten Teilaufgabe

Frage: Ist die Relation reflexiv?
Ja, die Relation ist reflexiv, denn jede Menge ist nach Definition eine Teilmenge von sich selbst (Für alle Mengen M gilt $M \subseteq M$).

Frage: Ist die Relation antisymmterisch?
Ja, die Relation ist antisymmetrisch, weil aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ die Gleichheit $A = B$ folgt.

Frage: Ist die Relation transitiv?
Ja, die Relation ist transitiv, weil aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ die Beziehung $A \subseteq C$ folgt.

Frage: Ist die Relation linear?
Nein, die Relation ist nicht linear. So ist weder $\{1,2,3\} \subseteq \{4,5,6\}$ noch ist $\{4,5,6\} \subseteq \{1,2,3\}$.

Frage: Ist die Relation eine Halbordnung bzw. eine Totalordnung?
Da die Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, ist sie eine Halbordnung. Da die Relation aber nicht linear ist, ist sie keine Totalordnung.

<onlyinclude>

UNKNOWN TEMPLATE ifeq:include

UNKNOWN TEMPLATE SEITENNAME

#Lösung zur ersten Teilaufgabe

}Lösung zur ersten Teilaufgabeh3

</onlyinclude>}}

UNKNOWN TEMPLATE Aufgabensammlung: Vorlage:Klapptext

Diese Relation ist weder eine Halbordnung noch eine Totalordnung, weil sie nicht reflexiv ist (So ist $1 \not\succeq 1$).Lösung zur zweiten Teilaufgabeh3

UNKNOWN TEMPLATE Aufgabensammlung: Vorlage:Klapptext

Diese Relation ist eine Totalordnung.Lösung zur dritten Teilaufgabeh3

UNKNOWN TEMPLATE Aufgabensammlung: Vorlage:Klapptext

Diese Relation ist eine Halbordnung, aber keine Totalordnung.Lösung zur vierten Teilaufgabeh3

22. Zusammenfassung

Mind Map

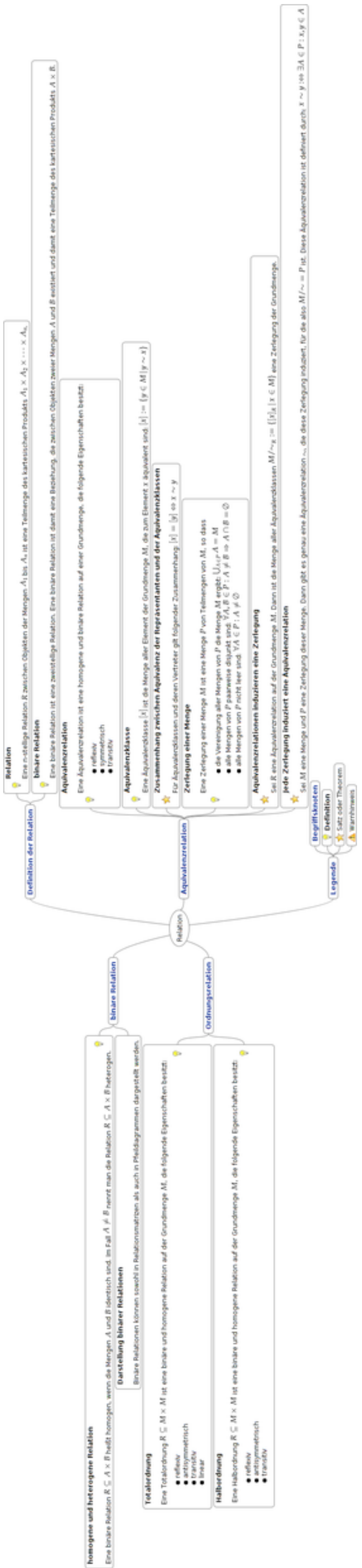


Abb. 62

22.1. Eigenschaften homogener, binärer Relationen

Im Folgenden sei R eine homogene Relation auf der Grundmenge A, also $R \subseteq A \times A$.

Eigenschaft	Definition	Definition in formaler Schreibweise	Merkmale
reflexiv	Jedes Objekt der Grundmenge steht mit sich selbst in Relation.	$\forall a \in A : aRa$	• Im Pfeildiagramm ist jedes Objekt mit sich selbst verbunden. • In der Relationsmatrix ist die Hauptdiagonale voll besetzt.
irreflexiv	Es gibt kein Objekt, welches mit sich selbst in Relation steht	$\forall a \in A : \neg aRa$	• Im Pfeildiagramm steht kein Objekt mit sich selbst in Relation • In der Relationsmatrix ist die Hauptdiagonale komplett unbesetzt.
symmetrisch	Steht ein Objekt a in Relation mit dem Objekt b, dann steht auch b in Relation mit a	$\forall a,b \in A : aRb \Rightarrow bRa$	• Die Relationsmatrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonale
antisymmetrisch	Zwei *verschiedene* Objekte a und b stehen nicht gegenseitig in Relation zueinander.	$\forall a,b \in A : aRbbRa \Rightarrow a = b$	• Die Relationsmatrix ist komplementär zu Hauptdiagonale.
transitiv	Steht a mit b und b mit c in Relation, dann steht auch a mit c in Relation.	$\forall a,b,c \in A : aRbbRc \Rightarrow aRc$	

Eigenschaft	**Definition**	**Definition in formaler Schreibweise**	**Merkmale**
linear	Für jeweils zwei Objekte a und b stehen a mit b und/oder b mit a in Relation.	$\forall a, b \in A : aRb \vee bRa$	

Teil VI.

Abbildungen

23. Abbildungen

23.1. Definition

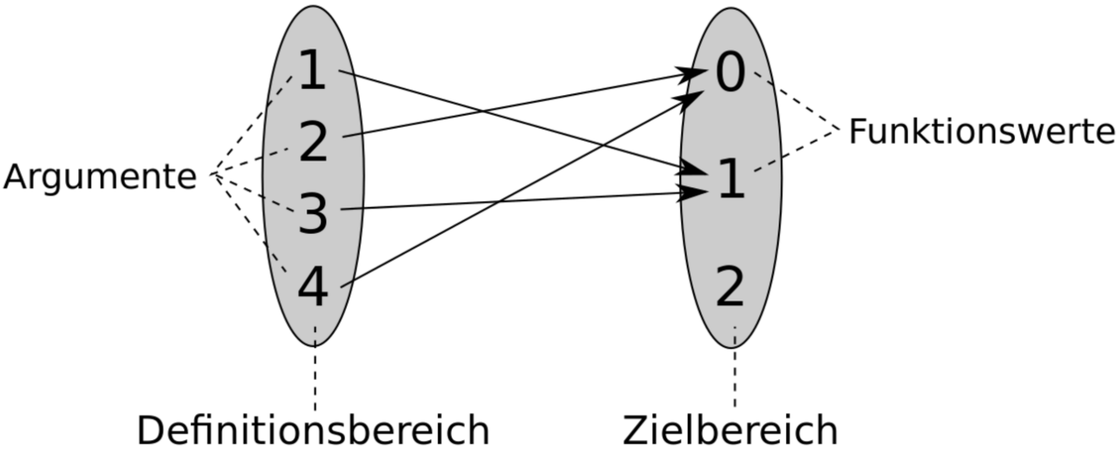


Abb. 63 Abbildung $f:\{1,2,3,4\} \to \{0,1,2\}$
$: x \mapsto$ Rest bei Division von x mit 2

Ein zentrales Konzept der Mathematik ist die *Abbildung*, die auch *Funktion* genannt wird. Abbildungen sind eindeutige Zuordnungen zwischen zwei Mengen D und Z. Dies bedeutet, dass jedem Element $x \in D$ durch die Abbildung f genau ein Element $f(x) \in Z$ zugeordnet wird. Ein Beispiel hierfür ist die Quadratfunktion zwischen der Menge $\mathbb{R}$ in die Menge $\mathbb{R}_0^+$, die jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ihre Quadratzahl $x^2 \in \mathbb{R}_0^+$ zuordnet.

Die Schreibweise für Abbildungen von D nach Z ist

$$f : D \to Z : x \mapsto f(x)$$

mit der Sprechweise

$$\underbrace{f}_{\text{Abbildung } f} \; : \; \underbrace{D \to Z}_{\text{von } D \text{ nach } Z,} \; : \; \underbrace{x \mapsto f(x)}_{\text{die } x \text{ auf } f(x) \text{ abbildet}}$$

Dabei ist D die *Definitionsmenge* und Z die *Zielmenge* der Abbildung. Jedes Element $x \in D$ der Definitionsmenge wird *Argument* und jedes durch die Abbildung getroffene Element $f(x) \in Z$ wird *Funktionswert* zum Argument x genannt:

$$f: \overbrace{D}^{\text{Definitionsbereich}} \rightarrow \overbrace{Z}^{\text{Zielmenge}} : \overbrace{x}^{\text{Argument}} \mapsto \overbrace{f(x)}^{\text{Funktionswert}}$$

Definition 26. Abbildung

Eine *Abbildung* $f : D \rightarrow Z$ ist eine eindeutige Zuordnung der Definitionsmenge D in die Zielmenge Z, also eine Zuordnung, die jedem Argument $x \in D$ einen eindeutigen Funktionswert $f(x) \in Z$ zuordnet.

Verständnisfrage: Welche der folgenden Pfeildiagramme stellen Abbildungen zwischen den Mengen X in die Menge Y dar?

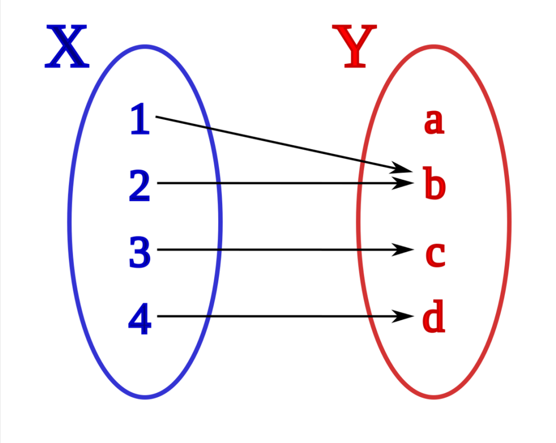


Abb. 64 *Pfeildiagramm 1*

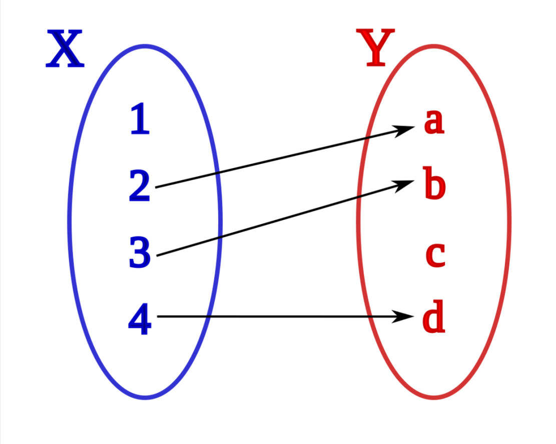


Abb. 65 *Pfeildiagramm 2*

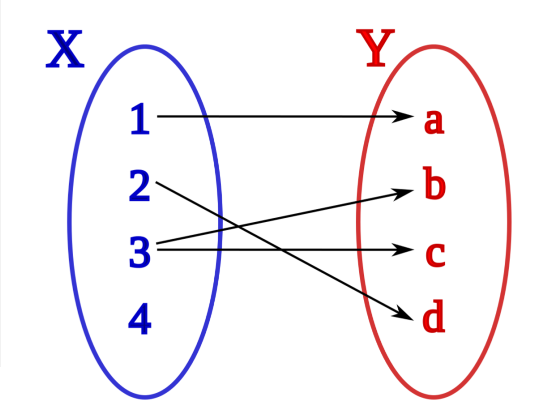


Abb. 66 *Pfeildiagramm 3*

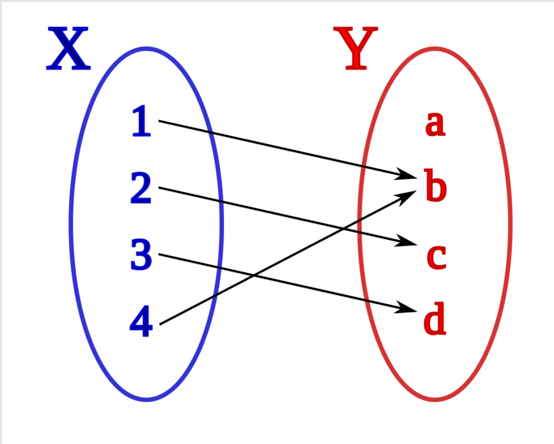


Abb. 67 *Pfeildiagramm 4*

- Pfeildiagramm 1: Abbildung
- Pfeildiagramm 2: keine Abbildung (dem Objekt $1 \in X$ wird kein Element aus Y zugeordnet)
- Pfeildiagramm 3: keine Abbildung (dem Objekt $4 \in X$ wird kein Element aus Y zugeordnet; dem Element $3 \in X$ werden mehrere Elemente aus Y zugeordnet)
- Pfeildiagramm 4: Abbildung

23.1.1. Bild und Urbild

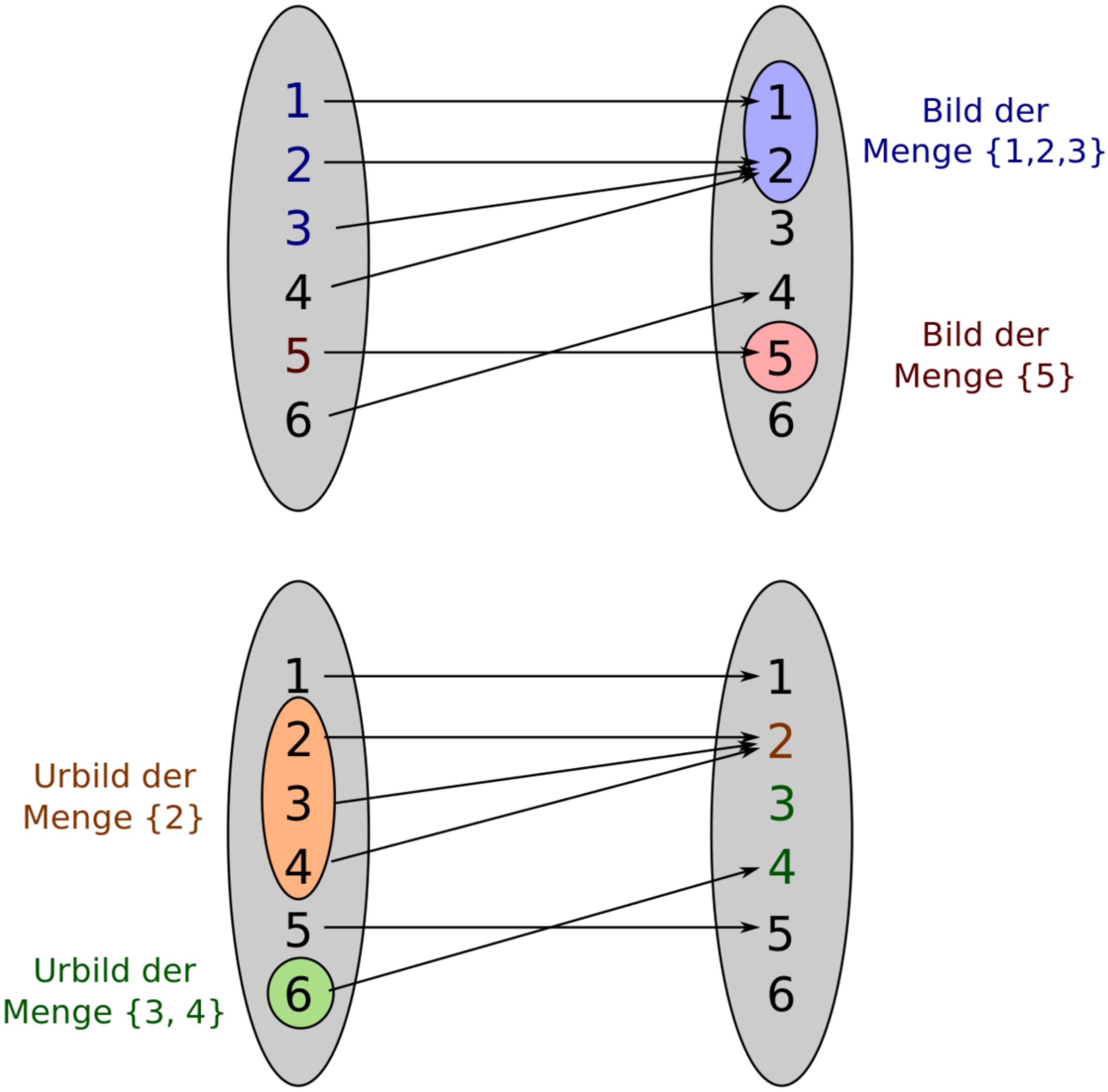


Abb. 68 Bild und Urbild

Zwei wesentliche Begriffe im Zusammenhang mit Abbildungen ist der Begriff des Bildes und der Begriff des Urbilds:
Definition 27. Bild

Das *Bild* $f(A)$ einer Abbildung $f : D \to Z$ und einer Menge $A \subseteq D$ ist die Menge aller Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in A$:

$$f(A) := \{f(x) \,|\, x \in A\} = \{y \,|\, \exists x \in A : y = f(x)\}$$

Beweis 21. *Bild*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Es ist

- $f(\{1,2\}) = \{1,4\}$
- $f(\{-3,-6,2\}) = \{9,36,4\}$
- $f(\{-5,5\}) = \{25\}$

Definition 28. Urbild

Das *Urbild* $f^{-1}(B)$ einer Abbildung $f : D \to Z$ und einer Menge $B \subseteq Z$ ist die Menge aller Argumente $x \in D$, die durch f in die Menge B abgebildet werden:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \,|\, f(x) \in B\}$$

Beachte, dass B auch Elemente enthalten kann, die durch f nicht getroffen werden. Betrachte dazu die Abbildung auf der rechten Skizze. Die Zahl 3 wird nicht getroffen und die Zahl 4 ist Funktionswert nur das Argument 6. Dementsprechend ist das Urbild von $\{3,4\}$ gleich die einelementige Menge $\{6\}$.

Beweis 22. *Urbild*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Es ist

- $f^{-1}(\{1,2,\,-4,\,-36\}) = \{1,\,-1,\,\sqrt{2},\,-\sqrt{2}\}$
- $f^{-1}(\{0,\,-1\}) = \{0\}$
- $f^{-1}(\{25\}) = \{5,\,-5\}$

> ⚠ **Warnung**
>
> Es besteht Verwechslungsgefahr zwischen dem Urbild $f^{-1}(B)$, der Umkehrfunktion f^{-1} und dem multiplikativen Inversen $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$.

Verständnisfrage: Sei

- $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
- $g : \{-1,\,0,\,1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$

  Bestimme folgende Bilder und Urbbilder (beachte die unterschiedlichen Definitions- und Zielmengen der Abbildungen!):

  1. $f\,(\mathbb{R} \setminus \{2\})$
  2. $g\,(\{-1,\,1\})$
  3. $h\,(\mathbb{Z})$
  4. $f\,(\emptyset)$
  5. $f^{-1}\,(\{4,\,6\})$
  6. $g^{-1}\,([0,5])$
  7. $h^{-1}\,([0,5])$
  8. $f^{-1}\,(\emptyset)$|*antwort=*
  9. $f\,(\mathbb{R} \setminus \{2\}) = \mathbb{R}_0^+$
  10. $g\,(\{-1,\,1\}) = \{1\}$
  11. $h\,(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0$
  12. $f\,(\emptyset) = \emptyset$
  13. $f^{-1}\,(\{4,\,6\}) = \{-2,\,\sqrt{6},\,-\sqrt{6}\}$

14. $g^{-1}([0,5]) = \{-1, 0, 1\}$
15. $h^{-1}([0,5]) = [-5,5]$
16. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

23.2. Definition durch Relationen

Eine Abbildung $f : D \to Z$ kann auch als Relation[1] zwischen der Definitionsmenge D und der Zielmenge Z aufgefasst werden. Dabei fasst man eine Zuordnung zwischen einem Argument $x \in D$ und dem dazugehörigen Funktionswert $f(x) \in Z$ als Relation zwischen x und $f(x)$ auf. Nach der Definition der Relation ist dann f eine Teilmenge des kartesischen Produkts $D \times Z$.

Jedoch erfüllt nicht jede Relation zwischen D und Z die Eigenschaft der Abbildung, dass jedem Argument $x \in D$ genau ein Funktionswert $f(x) \in Z$ zugeordnet wird. Dementsprechend muss eine Relation $f \subseteq D \times Z$ folgende zusätzliche Eigenschaften erfüllen, um eine Abbildung zu sein:

1. Jedes Element x des Definitionsbereichs D muss in mindestens einer Relation zu einem Element $y \in Z$ der Zielmenge stehen.
2. Für jedes Element x des Definitionsbereiches D gibt es höchstens ein Element $y \in Z$ der Zielmenge, mit dem x in Relation steht.

Frage: Wie lauten die obigen Aussagen in formaler, aussagenlogischer Schreibweise?

1. $\forall x \in D : \exists y \in Z : (x,y) \in f$
2. $\forall x \in D : \forall y_1, y_2 \in Z : (x,y_1) \in f(x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Definition 29. Definition von Abbildungen durch Relationen

Eine Abbildung $f : D \to Z$ ist eine Relation $f \subseteq D \times Z$ zwischen den Mengen D und Z, welche folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Jedes Element x des Definitionsbereichs D muss in mindestens einer Relation zu einem Element $y \in Z$ der Zielmenge stehen.
2. Für jedes Element x des Definitionsbereiches D gibt es höchstens ein Element $y \in Z$ der Zielmenge, mit dem x in Relation steht.

23.3. Eigenschaften von Abbildungen

Eigenschaft	Definition	Definition in formaler Schreibweise	Beispiel

1 Kapitel 18 auf Seite 137

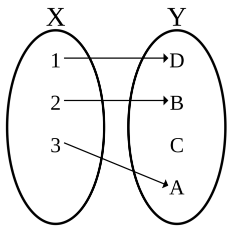
<table>
<tr><th>Eigenschaft</th><th>Definition</th><th>Definition in formaler Schreibweise</th><th>Beispiel</th></tr>
<tr><td>injektiv</td><td>• Verschiedene Argumente werden auf verschiedene Funktionswerte abgebildet.
• Jeder Funktionswert besitzt höchstens ein Urbild.
• Ist $f(x_1) = f(x_2)$, dann ist $x_1 = x_2$</td><td>• $\forall x_1, x_2 \in D : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
• $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$</td><td>

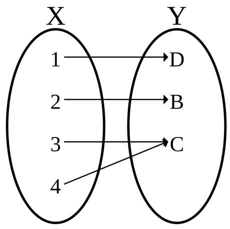
Abb. 69</td></tr>
<tr><td>surjektiv</td><td>• Jeder Funktionswert wird mindestens einmal durch die Abbildung getroffen.
• Jeder Funktionswert besitzt mindestens ein Urbild.</td><td>• $\forall y \in Z : \exists x \in D : y = f(x)$</td><td>

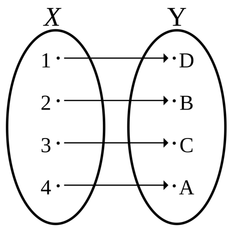
Abb. 70</td></tr>
<tr><td>bijektiv bzw. umkehrbar</td><td>• Die Abbildung ist surjektiv und injektiv.
• Jeder Funktionswert besitzt genau ein Urbild.
• Es gibt für die Funktion eine Umkehrfunktion.</td><td></td><td>

Abb. 71</td></tr>
</table>

23.3.1. Wieso sind Abbildungen mit obigen Eigenschaften cool?

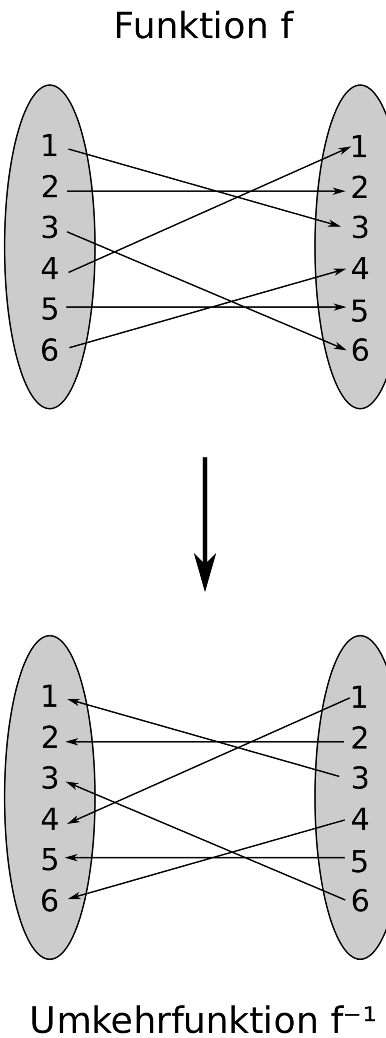


Abb. 72 Bildung der Umkehrfunktion

injektiv: Injektive Abbildungen f haben die schöne Eigenschaft, dass aus der Gleichung $f(a) = f(b)$ automatisch $a = b$ folgt. Dies ist insbesondere bei der Umformung von Gleichungen hilfreich.

bijektiv: Bijektive Abbildungen $f : D \to Z$ sind umkehrbar. Dies bedeutet, dass man eine neue Abbildung $f^{-1} : Z \to D$ von der ursprünglichen Zielmenge in die ursprüngliche Definitionsmenge definieren kann, so dass $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in D$ ist.

23.4. Identität von Abbildungen

Wann sind zwei Abbildungen identisch? Intuitiv könnte man antworten, dass zwei Abbildungen genau dann identisch sind, wenn sie dieselbe Zuordnungsvorschrift besitzen. Die Identität der Zuordnungsvorschrift ist aber nicht ausreichend. Dies werde ich dir an folgendem Beispiel zeigen:

Frage: Welche der folgenden Funktionen sind injektiv und welche sind surjektiv?

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
- $f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
- $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^2$
- $f_4 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^2$|*antwort=*
- *weder injektiv noch surjektiv*
- *injektiv aber nicht surjektiv*
- *nicht injektiv aber surjektiv*
- *injektiv und surjektiv*

Am obigen Beispiel erkennst du, dass die Abbildungen f_1 bis f_4 zwar dieselbe Zuordnungsvorschrift $x \mapsto x^2$, aber dennoch unterschiedliche Eigenschaften besitzen, da sie unterschiedliche Definitions- und Zielmengen haben. Dementsprechend können f_1 bis f_4 nicht identisch sein, da identische Abbildungen auch identische Eigenschaften haben sollten.

Die Zuordnungsvorschrift ist für die Identität zweier Abbildungen ein zu schwaches Kriterium. Es zeigt sich, dass für die Identität zweier Abbildungen neben der Zuordnungsvorschrift auch die Definitions- und die Zielmenge beider Abbildungen gleich sein müssen:
Definition 30. Identität von Abbildungen

Zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind genau dann identisch, wenn $A = C$, $B = D$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A = C$ ist.

23.5. Funktionskomposition

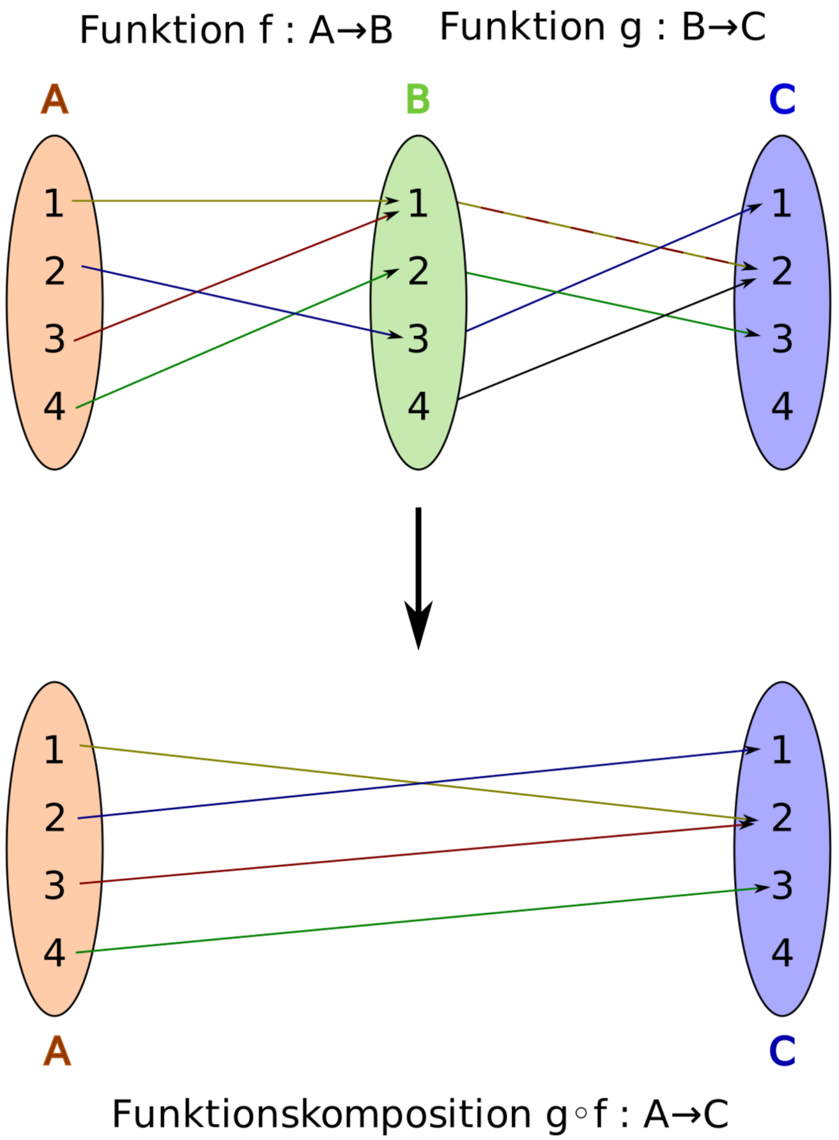


Abb. 73 Die Funktionskomposition

Seien zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gegeben. Die *Komposition* $g \circ f$ dieser beiden Abbildungen ist diejenige Abbildung von $A \to C$, die jedes $x \in A$ auf $g(f(x))$ abbildet:
Definition 31. Komposition von Abbildungen

Die Komposition zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist definiert durch

$$g \circ f : A \to C : x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

! **Hinweis**

Beachte dass in der Schreibweise für die Funktionskomposition $g \circ f$ diejenige Funktion, die zuerst angewandt wird, rechts steht (Hier musst du also „von rechts nach links“ lesen)

Ich möchte dir gerne noch den Unterschied in der Schreibweise $(g \circ f)(x)$ und $g(f(x))$ erklären. In der Schreibweise $(g \circ f)(x)$ wird zunächst die Abbildung f mit der Abbildung g verknüpft. Es entsteht eine neue Abbildung $g \circ f$. Diese Abbildung $g \circ f$ wird dann beim Argument x ausgewertet und man erhält den Funktionswert $(g \circ f)(x)$.

Beim Ausdruck $g(f(x))$ wird zunächst die Funktion f an der Stelle x ausgewertet und man erhält den Funktionswert $f(x)$. Dieser Funktionswert $f(x)$ wird dann als Argument in die Abbildung g reingesteckt und man erhält den Funktionswert $g(f(x))$.

Die Gleichung $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ der obigen Definition in kommentierter Version lautet dann:

$$\underbrace{(\underbrace{\underbrace{g}_{\text{Funktion } B\to C} \circ \underbrace{f}_{\text{Funktion } A\to B}}_{\text{Funktion } A\to C})(\underbrace{x}_{\text{Objekt aus } A})}_{\text{Objekt aus } C} \underbrace{:=}_{\text{ist definiert durch}} \underbrace{\underbrace{g}_{\text{Funktion } B\to C}(\underbrace{\underbrace{f}_{\text{Funktion } A\to B}(\underbrace{x}_{\text{Objekt aus } A})}_{\text{Objekt aus } B})}_{\text{Objekt aus } C}$$

Verständnisfrage: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - 2$. Berechne

- $(f \circ g)(3) =?$
- $(g \circ f)(3) =?$
- $(f \circ g)(-3) =?$
- $(g \circ f)(-3) =?$|*antwort*=
- $(f \circ g)(3) = |3 - 2| = 1$
- $(g \circ f)(3) = |3| - 2 = 1$
- $(f \circ g)(-3) = |-3 - 2| = 5$
- $(g \circ f)(-3) = |-3| - 2 = 1$

Verständnisfrage: Seien f und g zwei Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Gilt dann $f \circ g = g \circ f$? Wieso?
Nein, dies ist nicht der Fall. Sei zum Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 1$. Dann ist nämlich

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x+1)^2$$

und

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$$

Hier sieht man, dass $f \circ g \neq g \circ f$ ist. Beispielsweise ist $(f \circ g)(1) = (1+1)^2 = 4 \neq 2 = 1^2 + 1 = (g \circ f)(1)$.

24. Verknüpfungen

24.1. Definition

Verknüpfungen sind dir bereits aus der Schule bekannt. Beispiele hierfür sind die Addition und die Multiplikation. Diese Verknüpfungen können wir nun als spezielle Abbildungen betrachten. Schauen wir uns dazu als Beispiel die Verknüpfung der Addition auf den reellen Zahlen genauer an:

Die Addition verknüpft zwei Zahlen x und y zu einer neuen Zahl $x+y$. Wir können somit die Addition als Abbildung vom $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ auffassen. (Wiederholung: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die Menge aller geordneter Paare (x,y) mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$). Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}^2$, weil der bei Addition zwei reelle Zahlen miteinander verknüpft werden. Die Zielmenge ist $\mathbb{R}$, da das Ergebnis der Addition zweier reeller Zahlen wieder eine reelle Zahl ist. Damit ist die Addition eine Abbildung $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x+y$. Analog lässt sich auch die Multiplikation als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $(x,y) \mapsto x \cdot y$ auffassen.

Das obige Beispiel können wir nun verallgemeinern. Anstatt $\mathbb{R}$ betrachten wir jetzt irgendeine Grundmenge A. Die Addition ist eine Verknüpfung, die zwei Objekte zu einem neuen Objekt der Grundmenge verknüpft - wir wollen jetzt aber den allgemeineren Fall betrachten, dass wir eine Verknüpfung haben, die n Objekte zu einem neuen Objekt verknüpft. Analog zu unserem Beispiel ist dann eine solche Verknüpfung eine Abbildung $A^n \to A$. Eine solche Verknüpfung wird auch n-stellige Verknüpfung genannt. Ein Synonym für das Wort „Verknüpfung" ist der Begriff „Operation".
Definition 32. Verknüpfung

Eine n-stellige Verknüpfung auf der Grundmenge A ist eine Abbildung $A^n \to A$.

Für zweistellige Verknüpfungen wird auch der Begriff der *binären Verknüpfung* gebraucht.
Definition 33. binäre Verknüpfung

Eine *binäre Verknüpfung* ist eine zweistellige Verknüpfung. Eine binäre Verknüpfung auf der Grundmenge A ist damit eine Abbildung $A^2 \to A$.

Für binäre Verknüpfungen wird oft die Schreibweise $x \circ y$ verwendet. Hier steht $\circ$ stellvertretend für eine beliebige Verknüpfung wie die Addition $+$ oder die Multiplikation $\cdot$. Diese Schreibweise sollte nicht mit der Funktionskomposition verwechselt werden, die auch das Symbol $\circ$ verwendet (Zwar ist die Funktionskomposition eine binäre Verknüpfung, aber nicht jede binäre Verknüpfung ist eine Funktionskomposition).

Verständnisfrage: Zähle Beispiele für Verknüpfungen auf.

- Addition $(x,y) \mapsto x+y$, Multiplikation $(x,y) \mapsto x \cdot y$ und Potenzbildung $(x,y) \mapsto x^y$ sind binäre Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$.

- Quadratfunktion $x \mapsto x^2$, Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ und Sinusfunktion $x \mapsto sin(x)$ sind einstellige Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$.
- Funktionskomposition von reellwertigen Funktion ist eine binäre Verknüpfung auf der Menge aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Vereinigung, Differenz, Durchschnitt sind binäre Verknüpfungen auf der Potenzmenge einer gegebenen Grundmenge.
- Komplementbildung ist eine einstellige Verknüpfungen auf der Potenzmenge einer gegebenen Grundmenge.

24.2. Eigenschaften binärer Verknüpfungen

Die folgende Tabelle von Eigenschaften bezieht sich auf binäre Verknüpfungen auf der Grundmenge A, also auf Abbildungen $A^2 \to A$.

Eigenschaft	**Definition**	**Definition in formaler Schreibweise**
assoziativ	Werden mehrere Verknüpfungen hintereinander ausgeführt, ist die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Verknüpfungen ausgerechnet werden, für das Ergebnis egal	$\forall x,y,z \in A : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
kommutativ	Für das Ergebnis ist die Reihenfolge der Operanden egal	$\forall x,y \in A : x \circ y = y \circ x$

Verständnisfrage: *Welche der folgenden Abbildungen sind kommutativ und welche sind assoziativ?*

- *Addition* $(x,y) \mapsto x+y$ *auf* $\mathbb{R}$
- *Subtraktion* $(x,y) \mapsto x-y$ *auf* $\mathbb{R}$
- *Multiplikation* $(x,y) \mapsto x \cdot y$ *auf* $\mathbb{R}$
- *Potenzbildung* $(x,y) \mapsto x^y$ *auf* $\mathbb{R}$
- *Funktionskomposition*
- *Durchschnitt auf der Potenzmenge einer Menge\antwort=*

binäre Verknüpfung	***assoziativ***	***kommutativ***
Addition $(x,y) \mapsto x+y$ *auf* $\mathbb{R}$	*X*	*X*
Subtraktion $(x,y) \mapsto x-y$ *auf* $\mathbb{R}$	*X*	
Multiplikation $(x,y) \mapsto x \cdot y$ *auf* $\mathbb{R}$	*X*	*X*

Potenzbildung $(x,y) \mapsto x^y$ *auf* $\mathbb{R}$		
Funktionskomposition	X	
Durchschnitt auf der Potenzmenge einer Menge	X	X

25. Zusammenfassung

__FORCETOC__

Mind Map

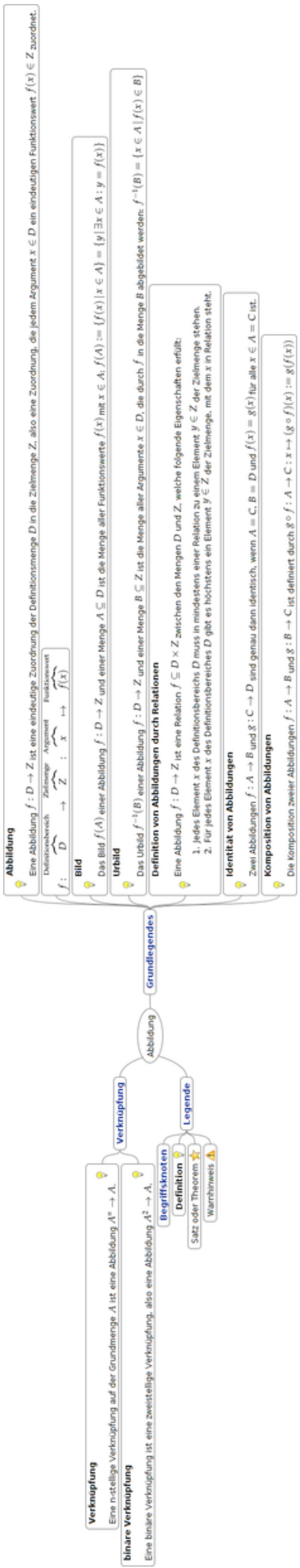
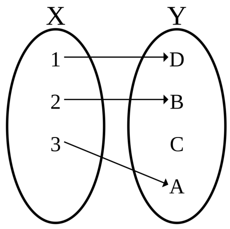
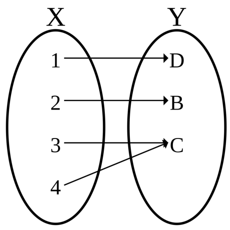
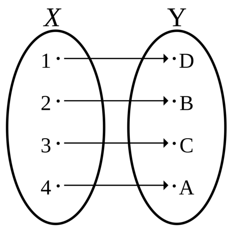

Verknüpfung
Eine n-stellige Verknüpfung auf der Grundmenge A ist eine Abbildung $A^n \to A$.
binäre Verknüpfung
Eine binäre Verknüpfung ist eine zweistellige Verknüpfung, also eine Abbildung $A^2 \to A$.
Verknüpfung
Begriffsknoten
Definition
Satz oder Theorem
Warnhinweis
Legende
Abbildung
Grundlegendes
Abbildung
Eine Abbildung $f: D \to Z$ ist eine eindeutige Zuordnung der Definitionsmenge D in die Zielmenge Z, also eine Zuordnung, die jedem Argument $x \in D$ ein eindeutigen Funktionswert $f(x) \in Z$ zuordnet.
$f: \overbrace{D}^{\text{Definitionsbereich}} \to \overbrace{Z}^{\text{Zielmenge}} : \overbrace{x}^{\text{Argument}} \mapsto \overbrace{f(x)}^{\text{Funktionswert}}$
Bild
Das Bild $f(A)$ einer Abbildung $f: D \to Z$ und einer Menge $A \subseteq D$ ist die Menge aller Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in A$: $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$
Urbild
Das Urbild $f^{-1}(B)$ einer Abbildung $f: D \to Z$ und einer Menge $B \subseteq Z$ ist die Menge aller Argumente $x \in D$, die durch f in die Menge B abgebildet werden: $f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$
Definition von Abbildungen durch Relationen
Eine Abbildung $f: D \to Z$ ist eine Relation $f \subseteq D \times Z$ zwischen den Mengen D und Z, welche folgende Eigenschaften erfüllt:
1. Jedes Element x des Definitionsbereichs D muss in mindestens einer Relation zu einem Element $y \in Z$ der Zielmenge stehen.
2. Für jedes Element x des Definitionsbereiches D gibt es höchstens ein Element $y \in Z$ der Zielmenge, mit dem x in Relation steht.
Identität von Abbildungen
Zwei Abbildungen $f: A \to B$ und $g: C \to D$ sind genau dann identisch, wenn $A = C$, $B = D$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A = C$ ist.
Komposition von Abbildungen
Die Komposition zweier Abbildungen $f: A \to B$ und $g: B \to C$ ist definiert durch $g \circ f: A \to C: x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$

Abb. 74

25.1. Eigenschaften von Abbildungen

Die folgende Tabelle bezieht sich auf Abbildungen $f : D \to Z$.

Eigenschaft	**Definition**	**Definition in formaler Schreibweise**	**Beispiel**
injektiv	• Verschiedene Argumente werden auf verschiedene Funktionswerte abgebildet. • Jeder Funktionswert besitzt höchstens ein Urbild. • Ist $f(x_1) = f(x_2)$, dann ist $x_1 = x_2$	• $\forall x_1, x_2 \in D$: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ • $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	 **Abb. 75**
surjektiv	• Jeder Funktionswert wird mindestens einmal durch die Abbildung getroffen. • Jeder Funktionswert besitzt mindestens ein Urbild.	• $\forall y \in Z : \exists x \in D$: $y = f(x)$	 **Abb. 76**
bijektiv bzw. *umkehrbar*	• Die Abbildung ist surjektiv und injektiv. • Jeder Funktionswert besitzt genau ein Urbild. • Es gibt für die Funktion eine Umkehrfunktion.		 **Abb. 77**

25.2. Eigenschaften binärer Verknüpfungen

Die folgende Tabelle bezieht sich auf binäre Verknüpfungen auf der Grundmenge A.

Eigenschaft	**Definition**	**Definition in formaler Schreibweise**
assoziativ	Werden mehrere Verknüpfungen hintereinander ausgeführt, ist die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Verknüpfungen ausgerechnet werden, für das Ergebnis egal	$\forall x,y,z \in A : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
kommutativ	Für das Ergebnis ist die Reihenfolge der Operanden egal	$\forall x,y \in A : x \circ y = y \circ x$

Teil VII.

Mächtigkeit von Mengen

26. Mächtigkeit von Mengen

> ⚠ **Warnung**
>
> Das folgende Kapitel enthält stark kontraintuitive Aussagen. Beim Lesen kann es zu Erstaunen und Verblüffung kommen. Ihr Körper wird sich mit der Zeit an diese Aussagen gewöhnen.

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Frage beschäftigen, wann zwei Mengen gleich groß sind. Hier werden wir insbesondere *unendliche* Mengen auf ihre Größe untersuchen. Dabei werden wir auf Ergebnisse stoßen, die scheinbar Paradox sind und unserer Erwartung widersprechen. Dies ist auch der Grund, warum viele Mathematiker die Frage nach der Größe unendlicher Mengen vermieden haben oder ihre erste Beantwortung durch w:Georg Cantor[1] (1845-1918) abgelehnt haben. So schrieb w:Carl Friedrich Gauß[2] (1777-1855):

> *„Ich verabscheue es, wenn ein unendliches Objekt wie ein vollständig gegebenes Objekt verwendet wird. In der Mathematik ist diese Operation verboten; das Unendliche ist eine Redensart“*[3]

Wir werden in diesem Kapitel sehr ausführlich das Unendliche untersuchen.

Bevor wir aber der Frage nach der Größe unendlicher Mengen nachgehen, möchte ich, dass du folgende Fragen für dich beantwortest (du kannst auch „aus dem Bauch“ antworten):

Beantworte intuitiv: Welche der folgenden Mengen ist größer? Welche der folgenden Mengen besitzt mehr Elemente?

- *Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder die Menge der Quadratzahlen $Q = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$*
- *Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$*
- *Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$*
- *Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$|antwort= Diese Fragen werden wir in diesem Kapitel beantworten.*

1 `http://de.wikipedia.org/wiki/Georg%20Cantor`
2 `http://de.wikipedia.org/wiki/Carl%20Friedrich%20Gau%DF`
3 Spektrum der Wissenschaft Spezial: Das Unendliche (Mai 2001). Seite 14. ISSN 0943-7096

26.1. Wann sind zwei Mengen gleich groß?

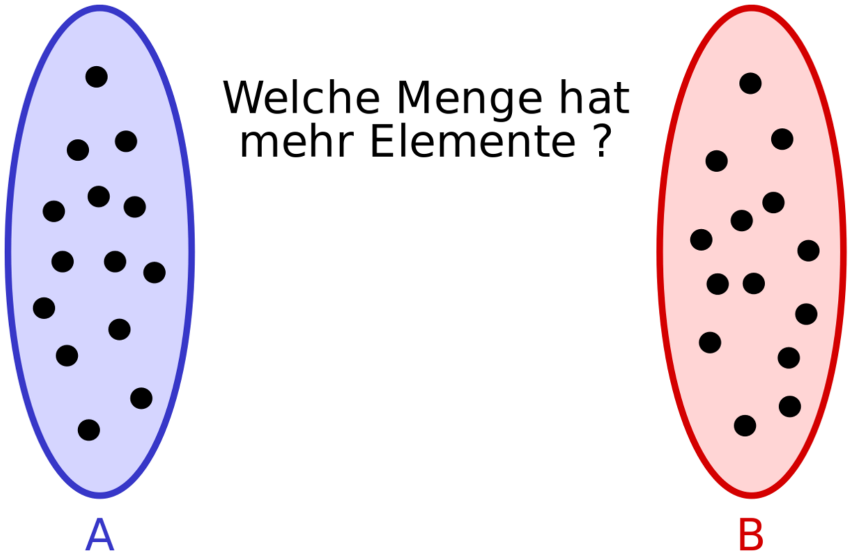


Abb. 78 Die Grundfrage

Wann besitzen zwei Mengen A und B gleich viele Elemente? Im Fall, dass A und B endliche Mengen sind, ist diese Frage einfach zu beantworten: Man zählt die Elemente beider Mengen und vergleicht diese Anzahl miteinander. Doch diese Methode kann nicht auf den Fall übertragen werden, dass eine der beiden Mengen unendlich ist.

Nun könnte man annehmen, dass alle unendlichen Mengen gleich groß sind. Schließlich bezeichnen wir die Größe dieser Menge in unserer Alltagssprache mit demselben Wort: „unendlich“. Wir werden aber sehen, dass diese Annahme zu nicht sinnvollen Ergebnissen führen würde und dass es unterschiedliche Arten der Unendlichkeit gibt.

Da das Zählen der Elemente bei unendlichen Mengen fehlschlägt, müssen wir eine andere Methode finden, Mengen miteinander zu vergleichen. Schauen wir uns ein Beispiel aus der endlichen Welt an: Stell dir vor, dass du zwei Kisten mit unterschiedlich großen Steinen hast und wissen willst, in welcher Kiste mehr Steine sind. Leider hast du keinerlei Messgeräte und zählen kannst du auch nicht. Wie kannst du vorgehen?

Frage: Wie kannst feststellen, in welcher Kiste mit unterschiedlich großen Steinen mehr Steine sind, ohne dass du zählst oder irgendwelche Hilfsmittel benutzt?

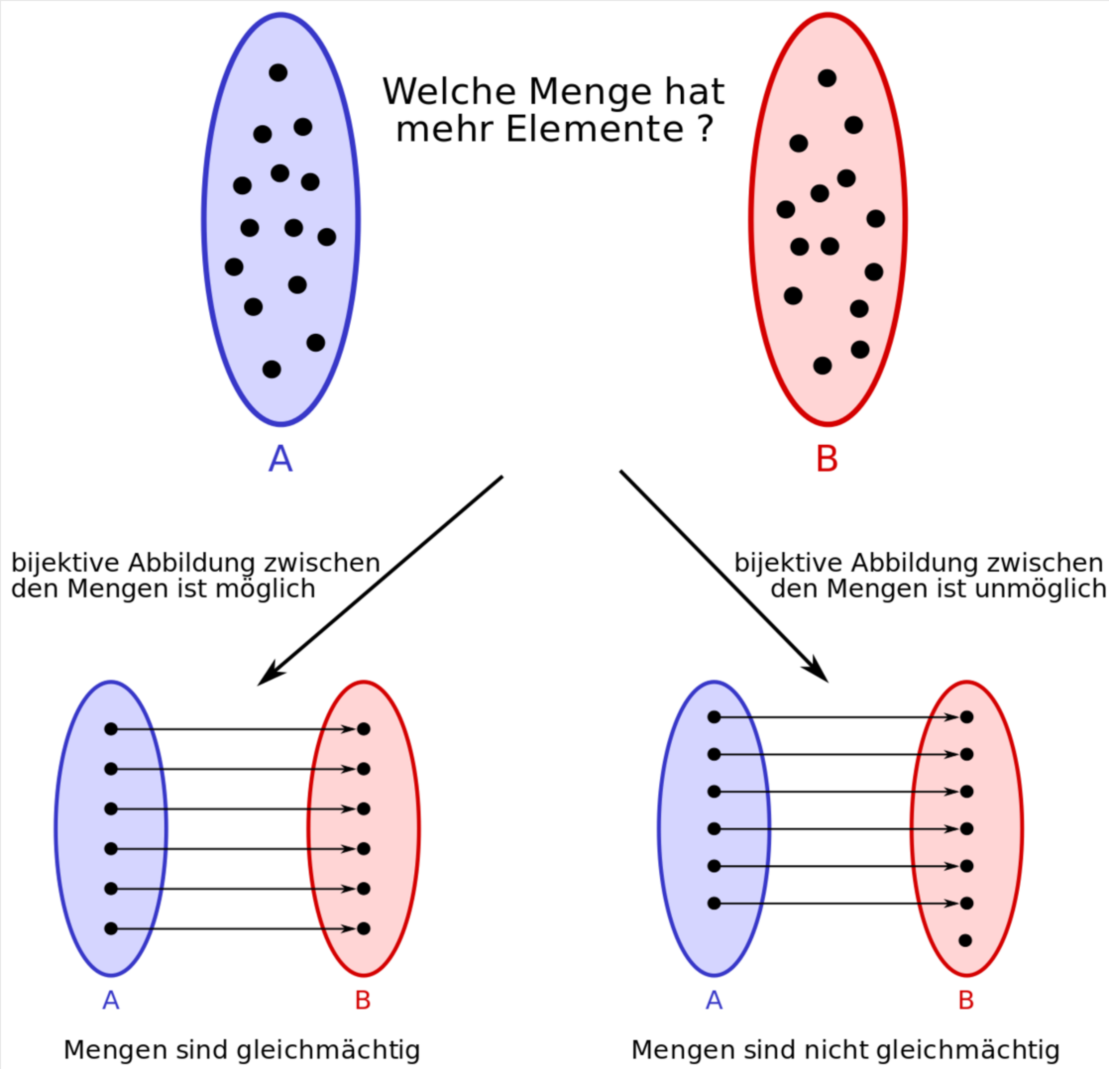


Abb. 79 Die Antwort auf die Grundfrage

Eine Möglichkeit ist Folgende: Du kannst die Steine beider Kisten in zwei Reihen so nebeneinander anordnen, dass jeweils ein Stein der einen Kiste neben ein Stein der anderen Kiste liegt. Ist eine Reihe von Steinen länger als die andere, so besitzt sie auch mehr Steine als die andere. Kann jeweils ein Stein der einen Kiste neben ein Stein der anderen Kiste gelegt werden und umgekehrt, so waren in den beiden Kisten dieselbe Anzahl von Steinen.

Was haben wir hier gemacht? Wir haben zwei endliche Mengen A und B, die wir vergleichen wollen. Nun haben wir nacheinander jeweils ein Element $a \in A$ und ein Element $b \in B$ einander zugeordnet. Dabei war diese Zuordnung eineindeutig. „eineindeutig" bedeutet, dass dem Element a ein eindeutiges b und dem Element b ein eindeutiges Element a zugeordnet wird. Waren wir damit in dem Sinn erfolgreich, dass wir *jedem* $a \in A$ ein eindeutiges $b \in B$ und *jedem* $b \in B$ ein eindeutiges $a \in A$ zuordnen konnten, dann sind beide Mengen gleich groß. Ist eine solche eineindeutige Zuordnung zwischen den Mengen A und B unmöglich, sind beide Mengen unterschiedlich groß.

Eine solche eineindeutige Zuordnung zwischen zwei Mengen ist aber nichts anderes als eine bijektive (umkehrbare)[4] Abbildung[5] zwischen den diesen beiden Mengen. Dementsprechend sind zwei endliche Mengen genau dann gleich groß, wenn es zwischen ihnen eine bijektive Abbildung gibt. Dieses Merkmal gleich großer endlicher Mengen kann auch auf unendliche Mengen übertragen werden.

So haben wir eine Methode gefunden, zwei Mengen miteinander zu vergleichen: Zwei Mengen sind genau dann gleich groß, wenn eine bijektive Abbildung zwischen ihnen möglich ist. An dieser Stelle möchte ich noch darauf hinweisen, dass in der Mathematik eher von der *Mächtigkeit* als von der Größe von Mengen die Rede ist. So würde ein Mathematiker anstatt „zwei Mengen sind gleich groß" eher „zwei Mengen sind gleich mächtig" sagen. Ich werde in diesem Kapitel auf beide Begriffe zurückgreifen.

Definition 34. Mächtigkeit von Mengen

Zwei Mengen A und B sind dann und nur dann gleich mächtig, wenn es möglich ist, zwischen ihnen eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ zu definieren.

26.2. Beispiele

Schauen wir uns nun die obigen Beispiele an, bei denen du dich intuitiv entscheiden solltest, welche Menge mehr Elemente enthält.

26.2.1. Menge der natürlichen Zahlen und Menge der Quadratzahlen

Welche Menge ist nun größer: die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder die Menge der Quadratzahlen $Q = \{n^2 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$? Ist es möglich eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und Q zu finden?

Ja, es gibt eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und Q, nämlich die Abbildung $f : \mathbb{N} \to Q : n \mapsto n^2$. Also die Abbildung

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & \cdots \end{array}$$

Es gibt also eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl eine eineindeutige Quadratzahl zuordnet. So sieht man, dass es genauso so viele natürliche Zahlen gibt, wie es Quadratzahlen gibt. Dies ist ein erstes überraschendes Ergebnis: Denn aus der Tatsache, dass die Menge der Quadratzahlen eine echte Teilmenge der natürlichen Zahlen ist und dass es in fast jeder endlichen Teilmenge der natürlichen Zahlen mehr natürliche Zahlen als Quadratzahlen gibt, könnte man vermuten, dass die Menge der natürlichen Zahlen mehr Elemente enthält als die Menge der Quadratzahlen. Dies ist aber, wie wir gerade gesehen haben, nicht der Fall.

Du siehst: Für unendliche Mengen ist der in der endlichen Welt gültige Satz „Ist A eine echte Teilmenge der Menge B, dann besitzt B mehr Elemente als A" nicht mehr anwendbar.

4 Kapitel 23.3.1 auf Seite 182
5 Kapitel 23 auf Seite 175

26.2.2. Menge der natürlichen Zahlen und Menge der ganzen Zahlen

Kommen wir zum nächsten Beispiel:

Frage: Ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ gleich groß?
Auch diese beiden Mengen sind gleich groß. Eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\
0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & \cdots
\end{array}
$$

oder in einer Formel

$$
f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : n \mapsto \begin{cases} \frac{n-1}{2} & n \text{ ist ungerade} \\ -\frac{n}{2} & n \text{ ist gerade} \end{cases}
$$

26.2.3. Menge der natürlichen Zahlen und Menge der rationalen Zahlen

Auch die Menge der rationalen Zahlen ist gleich mächtig mit der Menge der natürlichen Zahlen. Hier ist es jedoch nicht so einfach, selbst auf den Beweis zu kommen. Zunächst musst du die rationalen Zahlen in eine geschickte zweidimensionale Anordnung bringen:

$$
\begin{array}{cccccccc}
\cdots & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{1} & 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\
\cdots & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{2} & -\frac{2}{1} & & \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots \\
\cdots & -\frac{3}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{1} & & \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Nun kannst du bei 0 beginnend die obige Anordnung der rationalen Zahlen so abzählen, dass jeder rationalen Zahl im Schema genau eine eindeutige natürliche Zahl zugeordnet wird:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
\cdots & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\,(6) & \leftarrow & -\frac{1}{1}\,(5) & & 0\,(1) & \rightarrow & \frac{1}{1}\,(2) & & \frac{1}{2}\,(13) & \rightarrow & \frac{1}{3}\,(14) & \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{2}\,(7) & & -\frac{2}{1}\,(4) & \leftarrow & - & - & \frac{2}{1}\,(3) & & \frac{2}{2}\,(12) & & \frac{2}{3}\,(15) & \cdots \\
 & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & -\frac{3}{3} & -\frac{3}{2}\,(8) & \rightarrow & -\frac{3}{1}\,(9) & - & - & \rightarrow & \frac{3}{1}\,(10) & \rightarrow & \frac{3}{2}\,(11) & & \frac{3}{3}\,\cdots & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \downarrow &
\end{array}
$$

So erhältst du folgende Abbildung der natürlichen Zahlen in die Menge der rationalen Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} & -\frac{1}{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{1} & \frac{3}{1} & \cdots \end{array}$$

Durch diese Abbildung werden zwar alle rationalen Zahlen mindestens einmal getroffen (die Abbildung ist surjektiv), aber es gibt verschiedene natürliche Zahlen, die auf dieselbe rationale Zahl abgebildet werden (die Abbildung ist nicht injektiv). So wird der 5 und der 7 dieselbe rationale Zahl -1 zugeordnet. Um nun auch die Abbildung injektiv (und damit insgesamt bijektiv) zu machen, überspringen wir beim Abzählen diejenigen rationalen Zahlen, die nicht vollständig gekürzt sind:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \cdots & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\ (6) & \leftarrow & -\frac{1}{1}\ (5) & & 0\ (1) & \rightarrow & \frac{1}{1}\ (2) & & \frac{1}{2}\ (11) & \rightarrow & \frac{1}{3}\ (12) & \cdots \\ & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\ \cdots & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{2}\ (\cdot) & & -\frac{2}{1}\ (4) & \leftarrow & - & - & \frac{2}{1}\ (3) & & \frac{2}{2}\ (\cdot) & & \frac{2}{3}\ (13) & \cdots \\ & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \\ \cdots & -\frac{3}{3} & -\frac{3}{2}\ (7) & \rightarrow & -\frac{3}{1}\ (8) & - & - & \rightarrow & \frac{3}{1}\ (9) & \rightarrow & \frac{3}{2}\ (10) & & \frac{3}{3}\ \cdots & \cdots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \downarrow & \end{array}$$

So erhalten wir folgende bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} & -\frac{1}{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{1} & \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \cdots \end{array}$$

Es ist also möglich $\mathbb{N}$ bijektiv auf $\mathbb{Q}$ abzubilden. Dies beweist, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleich mächtig sind, also dieselbe Anzahl an Elemente besitzen. Auch dies ist eine stark kontraintuitive Feststellung, denn allein im Intervall $[0, 1]$ gibt es unendlich viele rationale aber nur zwei natürliche Zahlen.

Zur Übung kannst du nun folgende Aufgabe lösen:

Frage: Welche Menge ist größer: $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Q}^+$, die Menge der positiven rationalen Zahlen?
Auch die beiden Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}^+$ sind gleich mächtig. Um dies zu Zeigen, wählen wir folgendes Schema zur Anordnung der positiven rationalen Zahlen:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\ \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\ \frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Um eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$ zu erhalten, zählen wir die rationalen Zahlen im Schema diagonal beginnend bei $\frac{1}{1}$ ab, wobei wir nicht vollständig gekürzte Brüche überspringen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1}\ (1) & \rightarrow & \frac{1}{2}\ (2) & & \frac{1}{3}\ (5) & \rightarrow & \frac{1}{4}\ (6) & & \frac{1}{5}\ (11) & \rightarrow \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{2}{1}\ (3) & & \frac{2}{2}\ (\cdot) & & \frac{2}{3}\ (7) & & \frac{2}{4}\ (\cdot) & & \frac{2}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
\frac{3}{1}\ (4) & & \frac{3}{2}\ (8) & & \frac{3}{3}\ (\cdot) & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
\frac{4}{1}\ (9) & & \frac{4}{2}\ (\cdot) & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
\frac{5}{1}\ (10) & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & \cdots \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

So haben wir folgende bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gefunden, die beweist, dass beide Mengen gleich mächtig sind:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & \frac{1}{2} & 2 & 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 4 & 5 & \frac{1}{5} & \cdots
\end{array}$$

Das hier vorgestellte Vefahren wird auch w:Cantors erstes Diagonalargument[6] genannt.

26.2.4. Menge der natürlichen Zahlen und Menge der reellen Zahlen

Als letztes Beispiel vergleichen wir die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Hier werden wir sehen, dass es mehr reelle als natürliche Zahlen gibt. Doch wie kann man beweisen, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ nicht gleich mächtig sind?

Wir werden diesen Beweis in zwei Schritten führen: Zunächst zeigen wir, dass die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und das offene Intervall $(0,1)$ gleich mächtig sind. Danach zeigen wir, dass $\mathbb{N}$ und $(0,1)$ nicht gleich mächtig sein können. So haben wir gezeigt, dass auch $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ nicht gleich mächtig sein können (wäre $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ gleich mächtig, so wäre auch $\mathbb{N}$ und $(0,1)$ gleich mächtig, was wir aber widerlegt haben).

Frage: Wieso sind $\mathbb{R}$ und $(0,1)$ gleich mächtig? Wie sieht eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{R}$ und $(0,1)$ aus?
Wir wissen, dass der w:Tangens[7] eine bijektive Abbildung von $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ nach $\mathbb{R}$ ist. Diese Funktion können wir nutzen, um eine bijektive Abbildung $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ zu basteln. Durch die Zuordnung $x\mapsto \pi\cdot x-\frac{\pi}{2}$ wird das Intervall $(0,1)$ bijektiv auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ verschoben. Wenn man nun noch den Tangens anwendet, entsteht eine bijektive Abbildung f:

$$f:(0,1)\to\mathbb{R}:x\mapsto\tan\left(\pi\cdot x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Alternativ können wir mit dem w:Arkustangens[8] eine bijektive Abbildung $g:\mathbb{R}\to(0,1)$ konstruieren:

$$g:\mathbb{R}\to(0,1):x\mapsto\frac{\arctan(x)}{\pi}+\frac{1}{2}$$

Nun müssen wir beweisen, dass $\mathbb{N}$ und $(0,1)$ nicht gleich mächtig sein können. Dies werden wir durch einen Widerspruchsbeweis[9] beweisen. Dazu nehmen wir an, dass $\mathbb{N}$ und $(0,1)$ gleich mächtig sind, dass es also eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ gibt. Diese Annahme führen wir dann zu einem Widerspruch.

Sei also $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ eine beliebige bijektive Abbildung. Wir können nun die einzelnen Funktionswerte dieser Funktion in ihrer Dezimalentwicklung in einer unendlich langen Liste untereinander schreiben:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ldots \\ f(2) &= 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ldots \\ f(3) &= 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ldots \\ f(4) &= 0,\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dabei steht die Variable a_{ij} für die Ziffer aus der Menge $\{1,2,3,\ldots,9,0\}$, die bei der Dezimalentwicklung der Zahl $f(i)$ an der j-ten Nachkommastelle auftritt. Sollte eine Dezimalentwicklung einer reellen Zahl abbrechen, so füllen wir diese mit Nullen auf. So wird aus der Dezimalentwicklung 0,25 der Zahl $\frac{1}{4}$ die Dezimalentwicklung $0,2500000000\ldots$.

Wäre beispielsweise $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{3}{4}$, $f(3) = \frac{1}{3}$ und $f(4) = \pi - 3$, so würden die ersten vier Zeilen unserer Liste so aussehen:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0,\ 5\,0\,0\,0\ldots \\ f(2) &= 0,\ 7\,5\,0\,0\ldots \\ f(3) &= 0,\ 3\,3\,3\,3\ldots \\ f(4) &= 0,\ 1\,4\,1\,5\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nun konstruieren wir mit Hilfe der Liste eine neue Zahl $x = 0,x_1 x_2 x_3 x_4\ldots$, welche im offenen Intervall $(0,1)$ liegt und nicht in der Liste enthalten ist. Dabei gehen wir nach folgendem Algorithmus vor:

- Wir setzen $x_1 = 5$, wenn $a_{11} \neq 5$ und $x_1 = 4$, wenn $a_{11} = 5$ ist. Damit ist $x \neq f(1)$.
- Wir setzen $x_2 = 5$, wenn $a_{22} \neq 5$ und $x_2 = 4$, wenn $a_{22} = 5$ ist. Damit ist $x \neq f(2)$.
- Wir setzen $x_3 = 5$, wenn $a_{33} \neq 5$ und $x_3 = 4$, wenn $a_{33} = 5$ ist. Damit ist $x \neq f(3)$.
- …

Die allgemeine Regel zur Konstruktion von x lautet dabei:

9 Kapitel 8.2 auf Seite 58

- Setze $x_i = 5$, wenn $a_{ii} \neq 5$ ist und setze ansonsten $x_i = 4$.

Diese Regel garantiert, dass x sich von jedem $f(i)$ für $i \in \mathbb{N}$ unterscheidet, da sich x in seiner Dezimalbruchentwicklung an der i-ten Nachkommastelle von $f(i)$ unterscheidet.

Hinweis

Es gibt eine Möglichkeit, bei der zwei unterschiedliche Dezimalbruchentwicklungen dieselbe Zahl bezeichnen. Dies kann nämlich dann und nur dann auftreten, wenn eine der beiden Dezimalbruchentwicklungen mit lauter 9er endet. So ist beispielsweise:

$$0,999999\ldots = 3 \cdot 0,333333\ldots = 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 1 = 1,000000\ldots$$

Da wir aber die Unterscheidung in $a_{ii} = 5$ und $a_{ii} \neq 5$ machen und in der Dezimalbruchentwicklung von x nur 5er und 4er nach dem Komma auftreten, kann dieser Fall in unserem Beweis nicht auftreten.

In unserem obigen Beispiel würden die ersten 4 Nachkommastellen von x lauten:

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0,\ {\color{red}5}\,0\,0\,0\ldots\\
f(2) &= 0,\ 7\,{\color{blue}5}\,0\,0\ldots\\
f(3) &= 0,\ 3\,3\,3\,3\ldots\\
f(4) &= 0,\ 1\,4\,1\,5\ldots\\
&\ \ \vdots\\
x &= 0,\ {\color{red}4}\,{\color{blue}4}\,5\,4\ldots
\end{aligned}$$

Außerdem ist x eine reelle Zahl im Intervall $(0,1)$, da als Nachkommastellen nur 4er und 5er auftreten und da x keine Vorkommastellen ungleich Null besitzt. x ist auch nicht in unserer Liste enthalten, was bedeutet, dass sie nicht durch die Funktion f getroffen wird. Dies bedeutet aber, dass f nicht surjektiv ist, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht, dass f bijektiv sein soll .

Wir haben gerade bewiesen, dass es keine bijektive Abbildung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der reellen Zahlen geben kann. Dies beweist, dass beide Mengen nicht gleich mächtig sind, dass es also unterschiedliche Arten der Unendlichkeit gibt.

Der obige Beweis wurde im Übrigen von w:Georg Cantor[10] 1877 entdeckt und wird nach ihm w:Cantors zweites Diagonalargument[11] genannt.

26.3. Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit

Es gibt zwei wichtige Begriffe der Mathematik, die eng mit dem Begriff der Mächtigkeit von Mengen verknüpft sind: *Abzählbarkeit* und *Überabzählbarkeit*.

10 http://de.wikipedia.org/wiki/Georg%20Cantor
11 http://de.wikipedia.org/wiki/Cantors%20zweites%20Diagonalargument

Wir nennen eine Menge *abzählbar unendlich*, wenn sie gleich mächtig mit der Menge $\mathbb{N}$ ist. Dies bedeutet, dass alle Elemente diese Menge in einer unendlichen Liste aufgeschrieben werden können. Dies ist gleichwertig damit, dass man alle Elemente dieser Menge abzählen kann (ihr also eine eineindeutige Indexnummer zuordnen kann).

Eine *höchstens abzählbare* ist eine Menge, die entweder endlich oder abzählbar unendlich ist. Eine *überabzählbare* Menge ist eine Menge, die nicht *höchstens abzählbar*, also mächtiger als die Menge der natürlichen Zahlen ist. Eine solche Menge kann nicht in einer unendlichen Liste aufgeschrieben werden. Dafür ist sie einfach zu groß.

! Hinweis

In der Literatur wird der Begriff „abzählbar“ nicht eindeutig verwendet. Manchmal bedeutet dieser Begriff „abzählbar unendlich“ und manchmal „höchstens abzählbar“. In diesem Buch wird deshalb auf den Begriff „abzählbar“ weitestgehend verzichtet.

Die Begriffe dieses Abschnitts treten in der Mathematik oft und an verschiedenen Stellen auf. Deshalb ist es wichtig, dass du lernst, mit diesen Begriffen umzugehen.
Beweis 23. *abzählbar unendliche und überabzählbar unendliche Mengen*

- Die Menge $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich.
- Die Menge $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind überabzählbar unendlich.

26.4. Vertiefung zum Thema Mächtigkeit

Vertiefung:
Der Inhalt des folgenden Abschnitts ist eine Vertiefung des Stoffes. Für die nächsten Kapitel ist es nicht notwendig, dass du dieses Kapitel gelesen hast.

Wir haben definiert, dass zwei Mengen A und B genau dann gleich mächtig sind, wenn es möglich ist, zwischen ihnen eine bijektive Abbildung zu definieren. Nun ist es möglich auf einer beliebigen Menge von Mengen eine Relation[12] zu definieren, die besagt: „zwei Mengen x und y stehen genau dann in Relation zueinander, wenn es eine bijektive Abbildung $f : x \to y$ gibt“ Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation[13].

Frage: Wieso ist die obige Relation eine Äquivalenzrelation?
Um zu überprüfen, ob die Relation „zwei Mengen x und y stehen genau dann in Relation zueinander, wenn es eine bijektive Abbildung $f : x \to y$ gibt“ eine Äquivalenzrelation ist, müssen wir überprüfen, ob sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

reflexiv: Zur Überprüfung der Reflexivität müssen wir zeigen, dass jede Menge A in Relation zu sich selbst steht, dass es also für jede Menge A eine bijektive Abbildung $f : A \to A$ gibt. Eine solche bijektive Abbildung ist beispielsweise die Identitätsabbildung $f : A \to A : x \mapsto x$.

12 `http://de.wikibooks.org/wiki/%3AMathe%20f%FCr%20Nicht-Freaks%3A%20Relation`
13 Kapitel 20 auf Seite 155

symmetrisch: Sei A und B zwei Mengen, so dass A mit B in Relation steht. Somit gibt es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$. Wir müssen nun zeigen, dass dann auch B mit A in Relation steht, dass es also eine bijektive Abbildung $g : B \to A$ gibt. Eine solche bijektive Abbildung ist die Umkehrabbildung von f, also $g = f^{-1} : B \to A$.

transitiv: Seien A, B und C Mengen, so dass A mit B und B mit C in Relation steht. Es gibt also bijektive Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Wir müssen nun zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen auch A mit C in Relation zueinander stehen, dass es also eine bijektive Abbildung $h : A \to C$ gibt. Eine solche Abbildung ist die Komposition der beiden Funktionen f mit g, also $h = g \circ f : A \to C$. Diese Funktionskomposition ist bijektiv, weil die Komposition zweier bijektiver Abbildungen bijektiv ist.

Da die obige Relation eine Äquivalenzrelation ist, zerfällt jede Menge von Mengen unter dieser Relation in Äquivalenzklassen. Man kann also jede Menge von Mengen so in disjunkte, nichtleere Teilmengen zerlegen, dass alle Mengen der gleichen Mächtigkeit in einer diese Teilmengen zusammengefasst sind.

Diese Teilmengen werden in der Mathematik durch Kardinalzahlen beschrieben. Kardinalzahlen sind verallgemeinerte natürliche Zahlen, die die Mächtigkeit einer Menge beschreiben. Im Fall einer endlichen Menge ist ihre Kardinalzahl nichts anderes als die Anzahl ihrer Elemente. Im unendlichen sieht es anders aus: Allen abzählbar unendlichen Mengen, also Mengen mit Mächtigkeit gleich der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen, wird die Kardinalzahl $\aleph_0$ zugeordnet (Der Buchstabe w:Aleph[14] $\aleph$ ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets). Allgemein werden unendlichen Mengen Kardinalzahlen der Form $\aleph_i$ zugeordnet.

Die Schreibweise für die Kardinalzahl einer Menge A ist $|A|$ (nicht verwechseln mit den Betragsstrichen oder der Determinantenfunktion aus der Linearen Algebra!). So ist $|\{3,4\}| = 2$, $|\{\}| = 0$ und $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Durch folgende Definition kann man auch entscheiden, wann eine Menge mächtiger ist als eine andere ist:
Definition 35. Vergleich der Mächtigkeit

Eine Menge A heißt *höchstens gleichmächtig* zu einer Menge B, wenn es möglich ist eine Bijektion zwischen A und einer beliebigen Teilmenge von B zu definieren. Die Schreibweise für „A ist höchstens gleichmächtig zu B“ ist $|A| \leq |B|$.

Die Relation $A\ B \Leftrightarrow |A| \leq |B|$ definiert eine totale Ordnungsrelation[15] auf jeder Menge von Mengen. Man kann demnach jede Menge von Mengen nach ihrer Mächtigkeit sortieren.

$\aleph_0$ ist die kleinste Mächtigkeit, die eine unendliche Menge haben kann (Man kann zeigen, dass jede unendliche Menge eine Mächtigkeit größer gleich $|\mathbb{N}|$ besitzt). Außerdem hat Cantor im w:Satz von Cantor[16] gezeigt, dass jede Potenzmenge $P(A)$ mächtiger als ihre zugrunde liegende Menge A ist. Da im Fall, dass A eine endliche Menge mit n Elementen ist, die Potenzmenge $\mathscr{P}(A)$ genau 2^n Elemente

14 `http://de.wikipedia.org/wiki/Aleph`
15 Kapitel 21 auf Seite 165
16 `http://de.wikipedia.org/wiki/Satz%20von%20Cantor`

besitzt (Beweis siehe Abschnitt „Folgerung des binomischen Lehrsatz“[17]), schreibt man auch bei unendlichen Mengen A für die Mächtigkeit der Potenzmenge $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Man kann zeigen, dass $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|} = |\mathbb{R}|$ ist. Es stellt sich nun die Frage, ob es eine Menge gibt, die mächtiger als $\mathbb{N}$, aber weniger mächtig als $\mathbb{R}$ ist. Cantor vermutete, dass dies nicht der Fall ist, konnte seine Vermutung aber nicht beweisen. Diese Vermutung wird w:Kontinuumshypothese[18] genannt. Es stellte sich jedoch heraus, dass diese Hypothese in der Mengenlehre (so wie sie bis heute erklärt ist) unbeweisbar ist.

26.5. Einzelnachweise

17 Kapitel 35 auf Seite 253
18 `http://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuumshypothese`

27. Zusammenfassung

Mind Map


Mächtigkeit von Mengen
Zwei Mengen A und B sind dann und nur dann gleich mächtig, wenn es möglich ist, zwischen ihnen eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ zu definieren.
abzählbar unendlich
Eine Menge ist abzählbar unendlich, wenn sie gleich mächtig zu $\mathbb{N}$ ist.
höchstens abzählbar
Eine Menge ist höchstens abzählbar, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.
überabzählbar
Eine Menge ist überabzählbar, wenn sie mächtiger als die Menge der natürlichen Zahlen ist.
Begriffe
Mächtigkeit von Mengen
Beispiele
Legende
Beispiele
Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich.
Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.
Begriffsknoten
Definition
Satz oder Theorem
Warnhinweis

Abb. 80

Teil VIII.

Grundlegendes

28. Termumformungen

Der Begriff **Term** ist dir sicherlich schon aus der Schule bekannt. Terme sind mathematische Ausdrücke, die aus Zahlen, Funktionszeichen (wie $+$, $\div$ usw.), Variablen und Klammern gebildet werden können. Terme können durch w:Termumformungen[1] verändert werden.

28.1. Notwendige Termumformungen finden

28.1.1. Aufgabe

Finde die notwendigen Termumformungen, um den Term $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6}+2n\cdot(n+1)+(n+1)$ in den Term $\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(4n+3)}{6}$ umzuwandeln.

28.1.2. Lösung der Aufgabe

Eine solche Problemstellung wird dir sicherlich häufig im Studium begegnen. Oftmals bekommst du, während du ein Beweis für einen Satz suchst, ein Term 1 raus und stehst vor dem Problem, zu beweisen, dass dieser gleich einem gewissen Term 2 ist (so wie ihn zum Beispiel die Aufgabe fordert). Du musst also eine Kette von Termumformungen finden, so dass

$$\text{Term } 1 = \ldots = \ldots\ldots\ldots = \ldots = \text{Term } 2$$

Um dieses Problem zu lösen, kannst du folgendermaßen vorgehen: Du schreibst beide Terme nebeneinander und versuchst beide durch Termumformungen auf die gleiche Gestalt zu bringen. Also in etwa so:

Term 1		**Term 2**
$\vdots$		$\vdots$
(Termumformungen)		(Termumformungen)
$\vdots$		$\vdots$
Term aus Term 1	=	**Term aus Term 2**

1 http://de.wikipedia.org/wiki/Termumformungen

Die Lösung ergibt sich dann indem du aufschreibst:

Term 1 = (Termumformungen linker Seite) = **Term aus Term 1** = (Termumformungen rechte Seite) = **Term 2**

<u>*Aufgabe*</u>*: Finde die notwendigen Termumformungen für die obige Aufgabe heraus.*
Mit der obigen Methode erhältst du folgende Lösung:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6}+2n\cdot(n+1)+(n+1) & & \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(4n+3)}{6} \\
\frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6}+(n+1)\cdot(2n+1) & & \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(4n+3)}{6} \\
\frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)+6\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} & & \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(4n+3)}{6} \\
\frac{(n+1)\cdot(n\cdot(4n-1)+6\cdot(2n+1))}{6} & & \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(4n+3)}{6} \\
\frac{(n+1)\cdot(4n^2-n+12n+6)}{6} & & \frac{(n+1)\cdot(4n^2+3n+8n+6)}{6} \\
\frac{(n+1)\cdot(4n^2+11n+6)}{6} & = & \frac{(n+1)\cdot(4n^2+11n+6)}{6}
\end{array}$$

Damit ergibt sich folgende Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6}+2n\cdot(n+1)+(n+1) &= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6}+(n+1)\cdot(2n+1) \\
&= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)+6\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(n\cdot(4n-1)+6\cdot(2n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(4n^2-n+12n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(4n^2+3n+8n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(4n+3)}{6}
\end{aligned}$$

29. Gleichungsumformungen

Gleichungen sind Aussagen[1], die die Gleichheit zwischen zwei Termen ausdrücken. Die allgemeine Form von Gleichungen ist

$$T_1 = T_2$$

wobei T_1 und T_2 Terme sind.

Ungleichungen machen vergleichende Aussagen über zwei Terme. Hier steht an der Stelle des Gleichheitszeichens „=“ eines der Ordnungsrelationen $\geq$, $\leq$, $<$ oder $>$.

29.1. Umformungen

Durch Umformungen kann eine Gleichung $T_1 = T_2$ in eine neue Gleichung $S_1 = S_2$ umgeformt werden. Dabei muss gelten, dass immer dann, wenn $T_1 = T_2$ erfüllt ist, zwangsläufig auch die Gleichung $S_1 = S_2$ erfüllt sein muss. Man schließt also aus der Annahme der Gleichung $T_1 = T_2$ auf die neue Gleichung $S_1 = S_2$.

Eine Gleichungsumformung von $T_1 = T_2$ nach $S_1 = S_2$ ist also nichts anderes als die Implikation[2] $T_1 = T_2 \Rightarrow S_1 = S_2$, welche wahr sein muss (also eine Tautologie[3] sein muss).

Ein Beispiel: Immer dann, wenn $2x = 8$ ist, ist $(2x)^2 = 64$ (es ist $2x = 8 \Rightarrow (2x)^2 = 64$). Damit kann die Gleichung $(2x)^2 = 64$ aus der Gleichung $2x = 8$ geschlossen werden beziehungsweise $2x = 8$ in $(2x)^2 = 64$ umgeformt werden.

Ein häufiges Problem ist das Separieren einer Variablen aus einer Ausgangsgleichung. Hier hat man eine Ausgangsgleichung mit mindestens einer Variablen gegeben, von der man weiß, dass sie erfüllt sein muss (Beispiel: $3s + t = s - t$). Nun möchte man wissen, welche Werte eine bestimmte Variable (in Abhängigkeit der anderen Variablen) annehmen kann, so dass die Ausgangsgleichung mit diesen Werten erfüllt ist (Welche Werte für s erfüllen die Ausgangsgleichung $3s + t = s - t$?). Hier kann man schrittweise die Ausgangsgleichung in andere Gleichungen umformen, bis man eine Gleichung erhält, in der die gewünschte Variable auf einer Seite separiert ist. So können wir $3s + t = s - t$ folgendermaßen nach s umformen:

---

1 Kapitel 1.1 auf Seite 5
2 Kapitel 2.7 auf Seite 17
3 Kapitel 4 auf Seite 29

$$\begin{aligned} & 3s+t = s-t && \mid -t \text{ auf beiden Seiten} \\ \Rightarrow\ & 3s = s-2t && \mid -s \text{ auf beiden Seiten} \\ \Rightarrow\ & 2s = -2t && \mid \cdot \tfrac{1}{2} \text{ auf beiden Seiten} \\ \Rightarrow\ & s = -t && \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir so die Implikation $3s+t = s-t \Rightarrow s = -t$ bewiesen. Wir wissen damit, dass immer dann, wenn $3s+t = s-t$ ist, auch die Gleichung $s = -t$ erfüllt sein muss. Doch haben wir damit auch bewiesen, dass unter der Annahme von $s = -t$ die ursprüngliche Ausgangsgleichung $3s+t = s-t$ erfüllt ist?

Nein, dies haben wir nicht. Genauso, wie Implikationen im Allgemeinen nicht umkehrbar sind, sind auch Gleichungsumformungen im Allgemeinen nicht umkehrbar. So ist $2x = 8 \Rightarrow (2x)^2 = 64$ eine nicht umkehrbare Gleichung. Es ist also $(2x)^2 = 64 \not\Rightarrow 2x = 8$.

Frage: Wieso ist die Umformung $2x = 8 \Rightarrow (2x)^2 = 64$ nicht umkehrbar?
Nicht immer dann, wenn $(2x)^2 = 64$ gilt, gilt auch die Gleichung $2x = 8$. So ist für $x = -4$ zwar $(2x)^2 = (2\cdot(-2))^2 = 64$, aber $2x = 2\cdot(-2) = -8 \neq 8$. Damit ist die Implikation $(2x)^2 = 64 \Rightarrow 2x = 8$ falsch, also $(2x)^2 = 64$ nicht in $2x = 8$ umformbar.

Oben haben wir gezeigt, dass $3s+t = s-t$ in $s = -t$ umformbar ist, aber noch nicht, dass aus $s = -t$ auch immer die Gleichung $3s+t = s-t$ folgt. Dies müssen wir nachholen (obige Umformung in umgekehrter Reihenfolge, da jeder Einzelschritt umkehrbar ist):

$$\begin{aligned} & s = -t && \mid \cdot 2 \text{ auf beiden Seiten} \\ \Rightarrow\ & 2s = -2t && \mid +s \text{ auf beiden Seiten} \\ \Rightarrow\ & 3s = s-2t && \mid +t \text{ auf beiden Seiten} \\ \Rightarrow\ & 3s+t = s-t && \end{aligned}$$

Als Quintessenz dieses Abschnitts solltest du dir merken:

! Hinweis

Gleichungsumformungen $T_1 = T_2 \Rightarrow S_1 = S_2$ sind im Allgemeinen *nicht umkehrbar*.

Frage: Du hast die Ausgangsgleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ($T_1(x)$ und $T_2(x)$ sind Terme, bei denen in mindestens einem Term die Variable x vorkommt. Aus ihr hast du die Lösungen $x = S_1$, $x = S_2$ bis $x = S_n$ durch einfache Gleichungsumformungen gewonnen ($S_1, \ldots S_n$ sind Terme ohne Variable x). Du hast also gezeigt $T_1(x) = T_2(x) \Rightarrow x = S_1 \vee x = S_2 \vee \cdots \vee x = S_n$. Sind dann S_1 bis S_n alle Lösungen der Ausgangsgleichung $T_1(x) = T_2(x)$ für die Variable x? Wieso?
Nein, dies ist nicht der Fall. Zwar folgt aus $T_1(x) = T_2(x)$ die Aussage $x = S_1 \vee x = S_2 \vee \cdots \vee x = S_n$ und damit sind $x = S_1$ bis $x = S_n$ mögliche Kandidaten für Lösungen. Jedoch müssen sie die Ausgangsgleichung nicht lösen.

Ein Beispiel: Du weißt, dass es keine reelle Zahl x gibt, die die Gleichung $x^2 = -1$ löst. Jedoch kannst aus der Ausgangsgleichung $x^2 = -1$ Gleichungsumformungen durchführen, die dich auf die Pseudolösungen $x = 1$ und $x = -1$ führen:

$$\begin{array}{lll} & x^2 = -1 & \mid \text{Quadrieren} \\ \Rightarrow & x^4 = 1 & \mid \text{4te Wurzel ziehen} \\ \Rightarrow & x = \sqrt[4]{1} \vee x = -\sqrt[4]{1} & \\ \Rightarrow & x = 1 \vee x = -1 & \end{array}$$

Wenn du nur einfache Gleichungsumformungen verwendest, musst du also immer überprüfen, ob deine gefunden Lösungen auch wirklich die Ausgangsgleichung lösen.

29.2. Äquivalenzumformungen

Oben hast du gesehen, dass nicht alle Gleichungsumformungen umkehrbar sind. Deswegen werden all denjenigen Umformungen, die umkehrbar sind, unter dem Begriff *Äquivalenzumformung* zusammengefasst. Äquivalenzumformungen sind also diejenigen Umformungen $T_1 = T_2 \Rightarrow S_1 = S_2$, bei denen auch die Umkehrung $S_1 = S_2 \Rightarrow T_1 = T_2$ erfüllt ist. Es gilt so insgesamt die Äquivalenz[4] $T_1 = T_2 \Leftrightarrow S_1 = S_2$ (daher der Name „Äquivalenzumformung").

Wir können die Lösungen für s aus der Gleichung $3s + t = s - t$ direkt durch Äquivalenzumformung gewinnen (und sparen uns so den sonst notwendigen Rückweg):

$$\begin{array}{lll} & 3s + t = s - t & \mid -t \text{ auf beiden Seiten} \\ \Leftrightarrow & 3s = s - 2t & \mid -s \text{ auf beiden Seiten} \\ \Leftrightarrow & 2s = -2t & \mid \cdot \frac{1}{2} \text{ auf beiden Seiten} \\ \Leftrightarrow & s = -t & \end{array}$$

Frage: Welche der folgenden Gleichungsumformungen sind Äquivalenzumformungen?

- *Addition mit einem beliebigen Term auf beiden Seiten*
- *Subtraktion mit einem beliebigen Term auf beiden Seiten*
- *Multiplikation mit einem beliebigen Term auf beiden Seiten*
- *Division mit einem beliebigen Term ungleich Null auf beiden Seiten*
- *beide Seiten quadrieren*
- *beide Seiten hoch drei nehmen*
- *auf beiden Seiten den Betrag nehmen|antwort=*

Umformung	***Äquivalenzumformung***	***keine Äquivalenzumformung***
Addition mit einem beliebigen Term auf beiden Seiten	*X*	

4 Kapitel 2.7 auf Seite 17

Subtraktion mit einem beliebigen Term auf beiden Seiten	*X*	
*Multiplikation mit einem beliebigen Term auf beiden Seiten**		*X*
Division mit einem beliebigen Term ungleich Null auf beiden Seiten	*X*	
beide Seiten quadrieren		*X*
beide Seiten hoch drei nehmen	*X*	
auf beiden Seiten den Betrag nehmen		*X*

** Du wunderst dich vielleicht, warum die Multiplikation mit einem Term keine Äquivalenzumformung ist. Überlege mal ^^.*

Frage: Wieso ist die Multiplikation mit einem Term keine Äquivalenzumformung?
Wenn man beide Seiten einer Gleichung mit Null multipliziert, so ist die resultierende Gleichung stets $0=0$, also immer wahr. Dies ist auch dann der Fall, wenn die ursprüngliche Gleichung falsch ist bzw. nicht erfüllbar ist.
Beispiel: Es gibt keine reelle Zahl x mit $x^2=-1$. So ist $x^2=-1$ nicht aus $0=0$ herleitbar (aus einer wahren Aussage können keine falschen Aussagen hergeleitet werden). Jedoch ist $x^2=-1 \Rightarrow 0\cdot x^2 = 0\cdot(-1) \Rightarrow 0=0$ eine gültige Gleichungsumformung. Diese ist aber nicht umkehrbar, da ihre Umkehrung $0=0 \Rightarrow x^2=-1$ lauten würde, was aber für alle $x\in\mathbb{R}$ eine falsche Aussage ist.

Frage: Welche Eigenschaften muss eine Funktion f erfüllen, damit

- *$T_1=T_2 \Rightarrow f(T_1)=f(T_2)$ eine gültige Gleichungsumformung ist?*
- *$T_1=T_2 \Rightarrow f(T_1)=f(T_2)$ eine Äquivalenzumformung ist?\antwort= Für jede Funktion f ist $T_1=T_2 \Rightarrow f(T_1)=f(T_2)$ eine gültige Gleichungsumformung. Denn eine Funktion ordnet jedem Argument x einen eindeutigen Funktionswert $f(x)$ zu. Dies bedeutet insbesondere, dass wenn $T_1=T_2$ ist, auch $f(T_1)=f(T_2)$ sein muss, also $T_1=T_2 \Rightarrow f(T_1)=f(T_2)$ erfüllt ist.*
  Für eine Funktion f ist $T_1=T_2 \Rightarrow f(T_1)=f(T_2)$ genau dann eine Äquivalenzumformung, wenn f injektiv ist. Gerade haben wir gesehen, dass $T_1=T_2 \Rightarrow f(T_1)=f(T_2)$ eine gültige Gleichungsumformung ist. Sie ist eine Äquivalenzumformung, wenn auch $f(T_1)=f(T_2) \Rightarrow T_1=T_2$ eine gültige Gleichungsumformung ist. Diese Forderung ist aber nichts anderes als die Definition der Injektivität[5] für die Funktion f.

Teil IX.

Summe und Produkt

30. Summe und Produkt

30.1. Motivation

Wenn eine Summe viele Summanden hat, ist es unpraktikabel alle Summanden aufzuschreiben. Hier brauchst du eine abkürzende Schreibweise. Analoges gilt auch für Produkte, die viele Faktoren besitzen. Möglichkeiten solcher verkürzenden Summen- und Produktschreibweisen werden dir in diesem Kaptiel vorgestellt.

Eine Möglichkeit, Summen (und Produkte) abzukürzen, ist die Pünktchen-Schreibweise. Stell dir vor, du möchtest die Summe der Zahlen 1,2,3, ... 100 aufschreiben, etwa so:

$$1+2+3+\ldots+100$$

Diese Schreibweise hat den Vorteil, dass sie intuitiv ist. Du kannst sie verwenden, ohne sie dem Leser extra erklären zu müssen. Auch der Umgang mit ihr ist im Regelfall nicht schwer. Dies sind die Gründe, weswegen ich im Folgendem des Öfteren auf diese Schreibweise zurückgreifen werde. Jedoch hat sie einen entscheidenden Nachteil: Sie ist nicht eindeutig. Betrachte dazu folgendes Beispiel:

Beispiel: Wie lautet die Summe $1+2+\ldots+8$ *ausgeschrieben?*
Ein mögliches Ergebnis ist $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ (Summe der ersten acht natürlichen Zahlen). Ein weiteres mögliches Ergebnis ist $1+2+4+8=2^0+2^1+2^2+2^3=15$ (Summe der ersten vier Potenzen von zwei). Da nicht eindeutig definiert ist, wie die Pünktchen in der obigen Summe zu ersetzen sind, könnte man auch $1+2+5+6+8=22$ und $1+2+20+(-3)+8=28$ als richtige Ergebnisse ansehen.

Wie das obige Beispiel zeigt, ist die Pünktchen-Schreibweise ungenau: Es ist nicht eindeutig definiert, wie die Pünktchen in dieser Schreibweise zu ersetzen sind. Deswegen ist sie in den Augen der Mathematik kein guter Kandidat, um sie als abkürzende Schreibweise für lange Summen und Produkte einzusetzen. Es gibt jedoch eine andere Schreibweise für Summen und Produkt, die das Problem der Ungenauigkeit nicht hat. Diese Schreibweise werde ich dir in den nächsten Abschnitten vorstellen.

30.2. Die Summenschreibweise

Hier ein Beispiel einer Summenschreibweise mit Hilfe des *Summenzeichens*:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

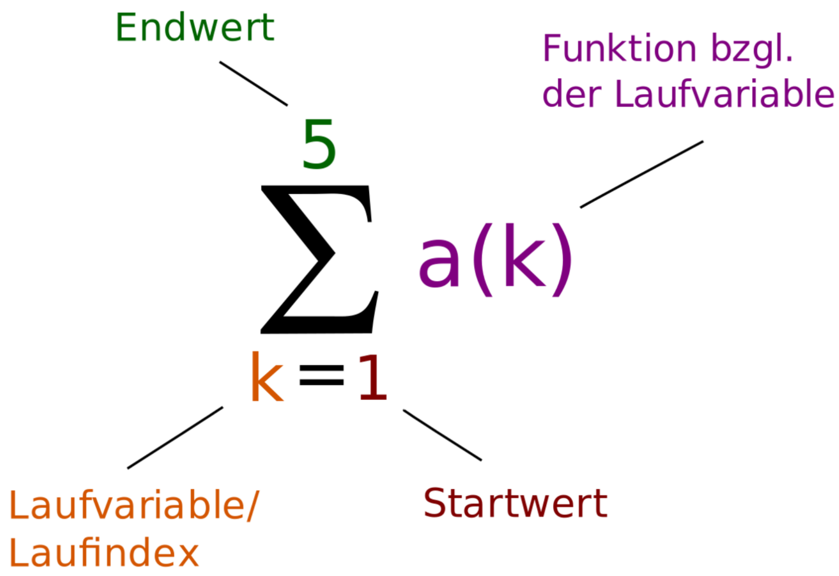


Abb. 81 Die Summenschreibweise

Diese Schreibweise besteht aus dem großen griechischen Buchstaben (w:Sigma[1]). Dem Summenzeichen folgt ein Funktionsterm (hier ist es k^2). Unter dem Summenzeichen steht eine neue, zuvor noch nicht benutzte Variable, die als *Laufindex*, *Laufvariable* oder *Summationsvariable* bezeichnet wird. Unter dem Summenzeichen steht außerdem der *Startwert der Laufvariablen*. Dies ist der kleinste Wert, den die Laufvariable annehmen kann und ist eine ganze Zahl. Über dem Summenzeichen steht der *Endwert der Laufvariablen*. Auch dieser Endwert ist eine ganze Zahl und steht für den größten Wert, den die Laufvariable annehmen kann. Der Laufindex läuft nun vom Start- zum Endwert und nimmt nacheinander jede ganze Zahl zwischen diesen beiden Werten an (daher der Name „Laufindex“ beziehungsweise „Laufvariable“). Für jeden der Werte, den die Laufvariable annimmt, wird ein Summand geschrieben. Der Funktionsterm nach dem Summenzeichen gibt dabei an, welcher Wert für diesen Summanden aufgeschrieben werden soll. Dazu wird der aktuelle Wert der Laufvariablen in den Funktionsterm eingesetzt und das Ergebnis als Summand notiert.

In unserem Beispiel ist die Laufvariable k. Diese läuft vom Startwert 1 bis zum Endwert 5 und nimmt dabei nacheinander die Werte $k=1,\ k=2,\ k=3,\ k=4$ und $k=5$ an. an. Der Funktionsterm, der angibt, welcher Summand aufgeschrieben werden soll, ist k^2. Wir erhalten für $k=1$ den Summanden $k^2=1^2=1$, für $k=2$ den Summanden $k^2=2^2=4$, für $k=3$ den Summanden $k^2=3^2=9$ und so weiter... Insgesamt erhalten wir so die Summe:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1+4+9+16+25 = 55$$

In der folgenden Animation siehst du nochmals die Funktionsweise der Summenschreibweise $\sum_{k=1}^{5} k^2$:

1 http://de.wikipedia.org/wiki/Sigma

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

Abb. 82

Damit ergibt sich folgende Definition der Summe
Definition 36. Summenschreibweise

$\sum_{k=n}^{m} a(k)$ ist eine Kurzschreibweise für die Summe $a(n)+a(n+1)+a(n+2)+\ldots+a(m-1)+a(m)$

> **Hinweis**
>
> In der Literatur findest du häufig die Schreibweise $\sum_{k=n}^{m} a_k$ anstelle von $\sum_{k=n}^{m} a(k)$. Hier ist a_k eine Kurzschreibweise für $a(k)$. Die Schreibweise a_k meint wie $a(k)$ eine Zuordnungsvorschrift, die der Laufvariablen k den Wert a_k für den aktuellen Summanden zuordnet.

Übungsaufgabe/Beispiele: Wie lauten folgende Summen ausgeschrieben?

1. $\sum_{s=20}^{25} s$
2. $\sum_{k=0}^{3} \frac{k^3\cdot(k+1)}{2}$
3. $\sum_{l=-3}^{0} 2l$
4. $\sum_{n=-2}^{2} \frac{n^2\cdot k}{p}$
5. $\sum_{p=-10}^{-8} \lambda$|*antwort= Wir erhalten folgende Summen:*
6. $\sum_{s=20}^{25} s = 20+21+22+23+24+25$
7. $\sum_{k=0}^{3} \frac{k^3\cdot(k+1)}{2} = \frac{0^3\cdot(0+1)}{2} + \frac{1^3\cdot(1+1)}{2} + \frac{2^3\cdot(2+1)}{2} + \frac{3^3\cdot(3+1)}{2}$
8. $\sum_{l=-3}^{0} 2l = 2\cdot(-3)+2\cdot(-2)+2\cdot(-1)+2\cdot 0$
9. $\sum_{n=-2}^{2} \frac{n^2\cdot k}{p} = \frac{(-2)^2\cdot k}{p} + \frac{(-1)^2\cdot k}{p} + \frac{0^2\cdot k}{p} + \frac{1^2\cdot k}{p} + \frac{2^2\cdot k}{p}$
10. $\sum_{p=-10}^{-8} \lambda = \lambda+\lambda+\lambda$

30.3. Die Produktschreibweise

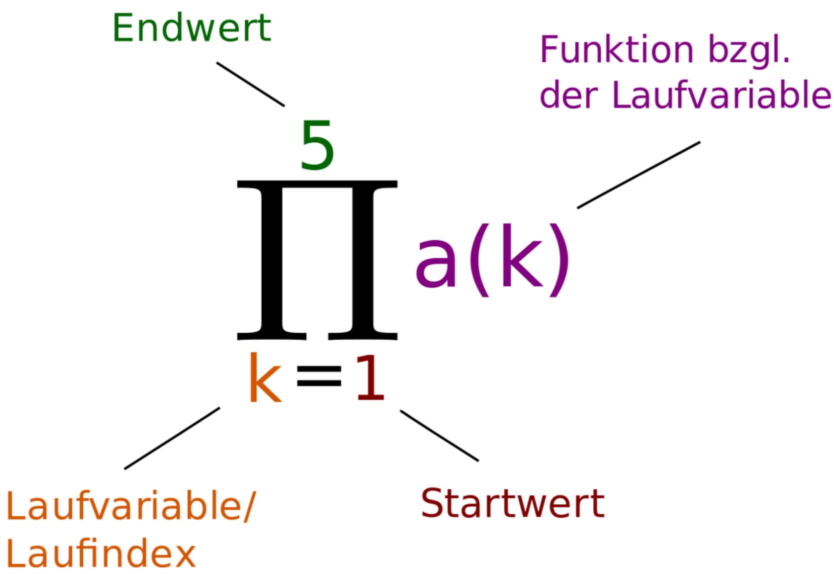


Abb. 83 Die Produktschreibweise

Die Produktschreibweise funktioniert analog zur Summenschreibweise. Der Unterschied ist, dass anstatt summiert, multipiliziert wird - insgesamt also anstatt einer Summe ein Produkt beschrieben wird. Anstelle des Sigmazeichens wird ein großes w:Pi (Buchstabe)[2] „“ verwendet. In der Produktschreibweise ist zum Beispiel:

$$\prod_{k=1}^{5} k^2 = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25$$

In der folgenden Animation ist die Wirkungsweise der Produktschreibweise dargestellt, welche analog zur Summenschreibweise ist:

2 `http://de.wikipedia.org/wiki/Pi%20%28Buchstabe%29`

$$\prod_{k=1}^{5} k^2$$

Abb. 84

Definition 37. Produktschreibweise

$\prod_{k=n}^{m} a(k)$ ist eine Kurzschreibweise für das Produkt $a(n) \cdot a(n+1) \cdot a(n+2) \cdot \ldots \cdot a(m-1) \cdot a(m)$

Auch hier findest du in der Literatur häufig die Schreibweise $\prod_{k=n}^{m} a_k$ an Stelle von $\prod_{k=n}^{m} a(k)$.

Übungsaufgabe/Beispiele: Wie lauten folgende Produkte ausgeschrieben?

1. $\prod_{k=1}^{5} k$
2. $\prod_{l=-3}^{-1} l^m$
3. $\prod_{n=-2}^{2} (k+n)$|antwort= *Wir erhalten folgende Produkte:*
4. $\prod_{k=1}^{5} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
5. $\prod_{l=-3}^{-1} l^m = (-3)^m \cdot (-2)^m \cdot (-1)^m$
6. $\prod_{n=-2}^{2} (k+n) = (k-2) \cdot (k-1) \cdot (k+0) \cdot (k+1) \cdot (k+2)$

30.4. Leere Summe / Leeres Produkt

Doch was passiert, wenn man die Summe beziehungsweise das Produkt nicht auschreiben kann, weil der Startwert für die Laufvariable größer als der Endwert ist? Summen, die einen größeren Startwert als Endwert haben, nennt man *leere Summe* und Produkte mit größerem Start- als Endwert nennt man *leeres Produkt* (weil die Indexmenge „leer“ ist). Im Fall leerer Produkte und Summen gibt es in der Mathematik eine Konvention, die sich in ihrer Anwendung als sinnvoll erwiesen hat. Man ordnet einer Summe, bei der der Startwert größer dem Endwert ist, die Zahl 0 zu. Einem Produkt mit größerem Start- als Endwert wird die Zahl 1 zugeordnet. Du kannst dir hier als Eselsbrücke merken: Leeren Produkten/Summen wird eine solche Zahl zugeordnet, die das Ergebnis bei der entsprechenden Verknüpfung nicht verändert (Wenn man 0 auf eine Zahl addiert, ändert sich diese Zahl nicht und auch die Multiplikation mit 1 verändert eine Zahl nicht)
Definition 38. Leere Summe

Eine Summe, deren Startwert für die Laufvariable größer dem Endwert ist, nennt man *leere Summe*. Ihr wird der Wert 0 zugeordnet.

Definition 39. Leeres Produkt

Einem Produkt, dessen Startwert für die Laufvariable größer dem Endwert ist, nennt man *leeres Produkt*. Ihm wird der Wert 1 zugeordnet.
Beweis 24.

- $\sum_{n=4}^{3} n^3 = 0$ und $\sum_{k=-2}^{-6} \frac{k}{n} = 0$
- $\prod_{l=0}^{-1} l = 1$ und $\prod_{h=-10}^{-11} l = 1$

30.5. Doppelsumme und Doppelprodukt

Doppelsummen und -produkte entstehen, wenn in der Summe oder dem Produkt wieder eine Summe oder ein Produkt definiert ist. Diese kannst du auflösen, indem du von außen nach innen die einzelnen Summen und Produkte auflöst:

$$\sum_{k=4}^{6} \sum_{l=4}^{k} l^k \quad a\beta\text{ere Summe aufl}^{\cdot}$$

$$\downarrow^{\cdot\cdot}$$

osen
$= \sum_{l=4}^{4} l^4 + \sum_{l=4}^{5} l^5 + \sum_{l=4}^{6} l^6$
$\downarrow$ innere Summen aufl˙

osen
$= 4^4 + \left(4^5 + 5^5\right) + \left(4^6 + 5^6 + 6^6\right)$

Verständnisfrage: *Schreibe folgende Doppelsummen und -produkte aus.*

- $\sum_{k=1}^{3} \prod_{l=1}^{3} a_{kl}$
- $\prod_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} a_{kl}$
- $\sum_{k=1}^{3} \sum_{l=0}^{k} a_l \cdot b_{k-l}$ \antwort=
- $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \prod_{l=1}^{3} a_{kl} &= \prod_{l=1}^{3} a_{1l} + \prod_{l=1}^{3} a_{2l} + \prod_{l=1}^{3} a_{3l} \\ &= a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13} + a_{21} \cdot a_{22} \cdot a_{23} + a_{31} \cdot a_{32} \cdot a_{33} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} a_{kl} &= \left(\sum_{l=1}^{3} a_{1l}\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{3} a_{2l}\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{3} a_{3l}\right) \\ &= (a_{11} + a_{12} + a_{13}) \cdot (a_{21} + a_{22} + a_{23}) \cdot (a_{31} + a_{32} + a_{33}) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=0}^{k} a_l \cdot b_{k-l} &= \sum_{l=0}^{1} a_l \cdot b_{1-l} + \sum_{l=0}^{2} a_l \cdot b_{2-l} + \sum_{l=0}^{3} a_l \cdot b_{3-l} \\ &= (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0) + (a_0 \cdot b_3 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_0) \end{aligned}$$

30.6. Rekursive Definition der Summe und des Produkts

Es gibt ein Problem mit den obigen Definitionen für Summen und Produkte, welches ich dir nicht verschweigen möchte. Wie dir vielleicht bereits aufgefallen ist, habe ich zur Definition der Summen- und Produktschreibweise die Pünktchen-Schreibweise verwendet, obwohl wir bereits festgestellt haben, dass sie ungenau ist. Um uns nun von dieser Ungenauigkeit befreien zu können, müssen wir eine Definition der Summen- und Produktschreibweise finden, die ohne Pünktchen-Schreibweise auskommt.

Hier bietet sich die rekursive Definition an. Diese Definition vollzieht sich in zwei Schritten: dem Rekursionsschritt und dem Rekursionsanfang. Bevor ich dir erkläre, wie diese Definition funktioniert, nenne ich dir zunächst die rekursive Definition der Summe und des Produkts:
Definition 40.

Die Summe $\sum_{k=m}^{n} a(k)$ ist definiert durch:

- Rekursionsschritt: Für $n \geq m$ ist $\sum_{k=m}^{n} a(k) = \left(\sum_{k=m}^{n-1} a(k)\right) + a(n)$
- Rekursionsanfang: Für $n < m$ ist $\sum_{k=m}^{n} a(k) = 0$

Definition 41.

Das Produkt $\prod_{k=m}^{n} a(k)$ ist definiert durch:

- Rekursionsschritt: Für $n \geq m$ ist $\prod_{k=m}^{n} a(k) = \left(\prod_{k=m}^{n-1} a(k)\right) \cdot a(n)$
- Rekursionsanfang: Für $n < m$ ist $\prod_{k=m}^{n} a(k) = 1$

Zunächst fällt auf, dass die Definition des Rekursionsanfangs bei Summe und Produkt der obigen Definition der leeren Summe bzw. des leeren Produkts entspricht. Du siehst hier also eine erste Anwendung dieser Definition.

Um die rekursive Definition einer Summe (und eines Produkts) zu verstehen, kann man sich anschauen, wie mit Hilfe dieser Definition eine konkrete Summe ausgerechnet wird. Betrachten wir hierzu die Summe $\sum_{k=1}^{3} k^3$. Nach dem, was wir im Abschnitt zur Summenschreibweise[3] gelernt haben, erwarten wir für diese Summe das Ergebnis

$$\sum_{k=1}^{3} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$

Wie lässt sich diese Summe aus der rekursiven Definition der Summe gewinnen? Hierzu muss solange der Rekurionsschritt auf die Summe angewandt werden, bis der Rekursionsanfang verwendet werden kann. Dieses Vorgehen ist im Einzelnen in der folgenden Animation dargestellt:

3 Kapitel 30.8 auf Seite 230

$$\sum_{k=1}^{3} k^3$$

Abb. 85

Man sieht: Zunächst wird die Summe mit dem Endwert 3 auf eine Summe mit dem Endwert 2 zurückgeführt, indem die Definition $\sum_{k=1}^{n} a(k) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a(k)\right) + a(n)$ des Rekurionsschrittes angewandt wird (setze $n = 3$ und $m = 1$). Auf die verbleibende Summe mit Endwert 2 wird nochmals der Rekurionsschritt angewandt und es entsteht eine Summe mit Endwert 1. Auf diese Summe wird nochmals der Rekursionsschritt angewandt. Die so entstandene Summe hat den Endwert 0, also einen kleineren Endwert als der Startwert 1. So ist die Bedingung für den Rekursionsanfang erfüllt und wir können die restliche Summe durch 0 ersetzen. Die Rekursion bricht ab.

Analog funktioniert die rekursive Definition des Produkts: Wenn wir ein Produkt gegeben haben, so wird mit Hilfe des Rekursionschritts das Produkt schrittweise auf ein Produkt mit immer kleinerem Endwert zurückgeführt. Irgendwann ist der Endwert des verbleibenden Produkts kleiner als der Startwert. Der Rekursionsanfang kann angewendet werden, womit die Rekursion abbricht.

Beispiele/Übungsaufgaben: Wende die rekursive Definition auf folgende Summen/Produkte an:

- $\prod_{l=-1}^{0}(l-1)$
- $\sum_{n=1}^{-1} n^2$
- $\prod_{m=5}^{5}(m-n)^k$

Beim ersten Produkt erhält man:

$\prod_{l=-1}^{0}(l-1)$	$\prod_{l=-1}^{0}(l-1) = \left(\prod_{l=-1}^{-1}(l-1)\right)\cdot(0-1)$ (Rekursionsschritt)
$= \left(\prod_{l=-1}^{-1}(l-1)\right)\cdot(0-1)$	$\prod_{l=-1}^{-1}(l-1) = \left(\prod_{l=-1}^{-2}(l-1)\right)\cdot(-1-1)$ (Rekursionsschritt)
$= \left(\prod_{l=-1}^{-2}(l-1)\right)\cdot(-1-1)\cdot(0-1)$	$\prod_{l=-1}^{-2}(l-1) = 1$ (Rekursionsanfang)
$= 1\cdot(-1-1)\cdot(0-1)$	
$= 1\cdot(-2)\cdot(-1) = 2$	

Die Summe ist bereits leer und du erhälst:

$\sum_{n=1}^{-1} n^2 = 0 |$ (Rekursionsanfang - leere Summe)

Und beim letzten Produkt ist das Ergebnis:

$$\begin{array}{l|l}
\prod_{m=5}^{5} (m-n)^k & \prod_{m=5}^{5} (m-n)^k = \left(\prod_{m=5}^{4} (m-n)^k \right) \cdot (5-n)^k \text{ (Rekursionsschritt)} \\
= \left(\prod_{m=5}^{4} (m-n)^k \right) \cdot (5-n)^k & \prod_{m=5}^{4} (m-n)^k = 1 \text{ (Rekursionsanfang)} \\
= 1 \cdot (5-n)^k & \\
= (5-n)^k &
\end{array}$$

30.7. Alternative Summen-/Produktschreibweise

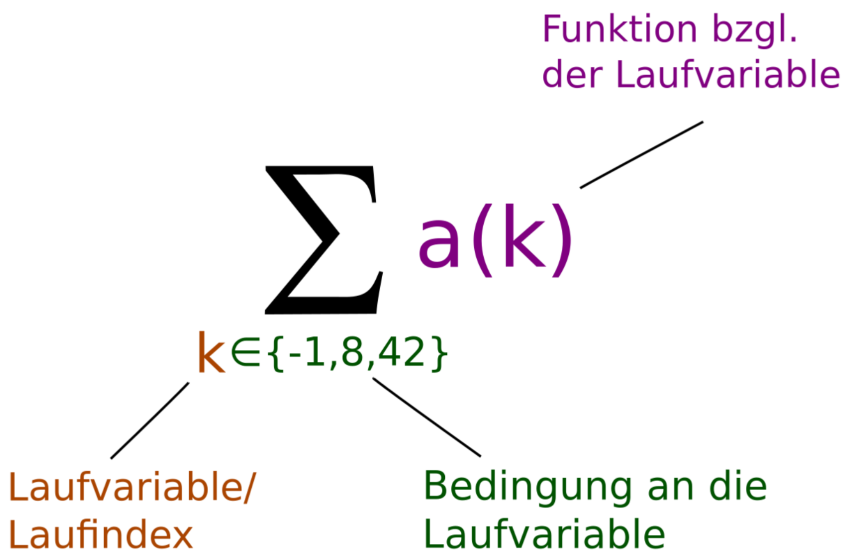


Abb. 86 Die alternative Summenschreibweise

Es gibt auch eine alternative Schreibweise für Summen und Produkte, die mächtiger ist, als die oben vorgestellte Schreibweise. Auf die Nennung des Start- und Endwertes wird bei dieser Schreibweise verzichtet. Stattdessen definiert man unter der Summe eine Bedingung, welche als (mathematische) Aussage[4] formuliert wird. Als Laufvariable dient in dieser Schreibweise diejenige Variable, die in der Bedingung neu eingeführt wird (demzufolge muss in der Bedingungsaussage genau eine Variable neu eingeführt werden). Die Laufvariable nimmt nun in einer beliebigen Reihenfolge alle ganzzahligen Werte an, die die gestellte Bedingung erfüllen. Nun wird wie in der oben definierten Summen-/Produktschreibweise für jeden Wert der Laufvariablen ein Summand aufgeschrieben. Auch

4 Kapitel 1.1 auf Seite 5

hier gibt der Funktionsterm bzw. die Zuordnungsvorschrift nach der Summe an, welcher Wert als Summand für welchen Wert der Laufvariable aufgeschrieben wird.

$$\prod_{n\in\{-1;2;10;0\}} (n+2)$$

Abb. 87

30.8. Wichtige Summenformeln

Nachdem ich dir die Summen- und Produktschreibweise vorgestellt habe, möchte ich dir hier Summenformeln zeigen, die dir in der Mathematik häufiger über den Weg laufen werden. Dies ist die gaußsche und die geometrische Summenformel.

30.8.1. Gaußsche Summenformel

Die *Gaußsche Summenformel* (auch *Kleiner Gauß* genannt) ist eine Formel für die Summe $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n$, der ersten n natürlichen Zahlen. Wie Gauß nach w:Gaußsche Summenformel#Herkunft der Bezeichnung[5] im zarten Alter von 9 Jahren selbst herausgefunden hat, lässt sich diese Summe vereinfachen zu $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Eine Möglichkeit, diese Formel zu beweisen, ist die vollständige Induktion[6] (einen Beweis dazu findest du in der einführenden Beispielaufgabe[7] zur vollständigen Induktion). Ich möchte dir in diesen Abschnitt einen weiteren Beweis dieser Summenformel vorstellen. Einen geometrischen Beweis zur gaußschen Summenformel findest du im Video Der kleine Gauß[8] auf Vimeo.

Satz 7. *Gaußsche Summenformel*

Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Beweis 25. *Gaußsche Summenformel*

Um die gaußsche Summelformel zu beweisen betrachten wir zunächst zwei Summen $\sum_{k=1}^{n} k$:

5 http://de.wikipedia.org/wiki/Gau%DFsche%20Summenformel%23Herkunft%20der%20Bezeichnung
6 Kapitel 11 auf Seite 71
7 Kapitel 11.1 auf Seite 72
8 http://vimeo.com/10014698

$$\begin{aligned}
2\cdot\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} k \\
&= 1+2+\ldots+(n-1)+n+1+2+\ldots+(n-1)+n \quad \mid \text{Summe umsortieren} \\
&= \underbrace{(1+n)}_{=\,n+1}+\underbrace{(2+n-1)}_{=\,n+1}+\ldots+\underbrace{(n-1+2)}_{=\,n+1}+\underbrace{(n+1)}_{=\,n+1} \\
&= \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)}_{n\text{-mal } n+1} \\
&= n\cdot(n+1)
\end{aligned}$$

Damit ist $2\cdot\sum_{k=1}^{n} k = n\cdot(n+1)$ und somit (nach Division auf beiden Seiten mit 2) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

30.8.2. Geometrische Summenformel

Eine weitere wichtige Summenformel ist die *geometrische Summenformel*. Sie lautet: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, wobei q eine beliebige reelle Zahl ungleich 1 ist.

Satz 8. *Geometrische Summenformel*

Für alle reellen $q \neq 1$ ist $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Beweis 26. *Geometrische Summenformel*

Es ist

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} q^k &&= 1+q+q^2+\ldots+q^n && \mid \cdot q \\
\Rightarrow\ & q\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k &&= q+q^2+q^3+\ldots+q^{n+1} && \\
\Rightarrow\ & \sum_{k=0}^{n} q^k - q\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k &&= (1+q+q^2+\ldots+q^n)-(q+q^2+q^3+\ldots+q^{n+1}) = 1-q^{n+1} && \mid \textstyle\sum_{k=0}^{n} q^k \text{ ausklammer} \\
\Rightarrow\ & (1-q)\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k &&= 1-q^{n+1} && \mid \cdot \tfrac{1}{1-q} \\
\Rightarrow\ & \sum_{k=0}^{n} q^k &&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} &&
\end{aligned}$$

30.9. Eigenschaften der Summen- und Produktschreibweise

Aus der Definition der Summen- und Produktschreibweise ergeben sich einige Eigenschaften. Sie lauten für die Summe:

Eigenschaften der Summe	
Eigenschaft	**Erklärung**
$\sum_{k=m}^{n} a(k) = \sum_{l=m}^{n} a(l)$	*Indexumbennungsregel:* Die Indizes können beliebig umbenannt werden, solange die neu eingeführte Laufvariable nicht in Konflikt mit einer bereits definierten Variable tritt.
$\sum_{k=m}^{n} a(k) = \sum_{k=m}^{l} a(k) + \sum_{k=l+1}^{n} a(k)$	Summen können in zwei Summen aufgeteilt werden.
$\sum_{k=m}^{n+1} a(k) = \sum_{k=m}^{n} a(k) + a(n+1)$	Spezialfall der obigen Eigenschaften bzw. Rekursionsschritt bei der rekursiven Definition der Summe.

Eigenschaften der Summe	
Eigenschaft	**Erklärung**
$\sum_{k=m}^{n} a(k) = \sum_{k=m}^{n} a(m+n-k)$	*Umkehrung der Reihenfolge der Summanden*
$\sum_{k=m}^{n} a(k) = \sum_{k=m+l}^{n+l} a(k-l)$	*Indexverschiebung*
$\sum_{k=m}^{n} \lambda \cdot a(k) = \lambda \cdot \sum_{k=m}^{n} a(k)$	*Konstantenregel:* Konstanten können aus Summen rausgezogen werden.
$\sum_{k=m}^{n} (a(k)+b(k)) = (\sum_{k=m}^{n} a(k)) + (\sum_{k=m}^{n} b(k))$	
$\sum_{l=r}^{s} \sum_{k=m}^{n} a(l,k) = \sum_{k=m}^{n} \sum_{l=r}^{s} a(l,k)$	*Allgemeines Kommutativgesetz:* Die Reihenfolge der Summen bei Doppel- und damit auch bei Mehrfachsummen ist egal.
$(\sum_{k=m}^{n} a(k)) \cdot (\sum_{l=r}^{s} b(l)) = \sum_{k=m}^{n} \sum_{l=r}^{s} a(k) \cdot b(l)$	*Allgemeines Distributivgesetz*

Die Produktschreibweise besitzt ähnliche Eigenschaften

Eigenschaften des Produkts	
Eigenschaft	**Erklärung**
$\prod_{k=m}^{n} a(k) = \prod_{l=m}^{n} a(l)$	*Indexumbennungsregel:* Die Indizes können beliebig umbenannt werden, solange die neu eingeführte Laufvariable nicht in Konflikt mit einer bereits definierten Variable tritt.
$\prod_{k=m}^{n} a(k) = \left(\prod_{k=m}^{l} a(k)\right) \cdot \left(\prod_{k=l+1}^{n} a(k)\right)$	Produkte können in mehrere Produkte aufgeteilt werden.
$\prod_{k=m}^{n+1} a(k) = a(n+1) \cdot \prod_{k=m}^{n} a(k)$	Spezialfall der obigen Eigenschaften bzw. Rekursionsschritt bei der rekursiven Definition des Produkts.
$\prod_{k=m}^{n} a(k) = \prod_{k=m}^{n} a(m+n-k)$	*Umkehrung der Reihenfolge der Faktoren*
$\prod_{k=m}^{n} a(k) = \prod_{k=m+l}^{n+l} a(k-l)$	*Indexverschiebung*
$\prod_{k=m}^{n} \lambda \cdot a(k) = \lambda^{n-m+1} \cdot \prod_{k=m}^{n} a(k)$	*Konstantenregel:* Konstanten können aus Produkten rausgezogen werden (Beachte den dabei entstehenden Exponenten $n-m+1$).
$\prod_{k=m}^{n} (a(k) \cdot b(k)) = (\prod_{k=m}^{n} a(k)) \cdot (\prod_{k=m}^{n} b(k))$	
$\prod_{l=r}^{s} \prod_{k=m}^{n} a(l,k) = \prod_{k=m}^{n} \prod_{l=r}^{s} a(l,k)$	*Allgemeines Kommutativgesetz:* Die Reihenfolge der Produkte bei Doppel- und damit auch bei Mehrfachsummen ist egal.

Die obigen Eigenschaften ergeben sich direkt aus der Definition der Summe. Die Beweise für die Eigenschaften kannst du dadurch finden, dass du die Pünktchenschreibweise für die Summen beziehungsweise die Produkte einsetzt. So kannst du die Eigenschaft

$$\sum_{k=m}^{n} a(k) = \sum_{k=m}^{l} a(k) + \sum_{k=l+1}^{n} a(k)$$

beweisen durch

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a(k) &= a(m)+a(m+1)+\cdots+a(n-1)+a(n) \\
&= a(m)+a(m+1)+\ldots a(l)+a(l+1)+\cdots+a(n-1)+a(n) \\
&= a(m)+a(m+1)+\ldots a(l)+a(l+1)+\cdots+a(n-1)+a(n) \\
&= \sum_{k=m}^{l} a(k)+\sum_{k=l+1}^{n} a(k)
\end{aligned}$$

Die anderen Eigenschaften kannst du auf einem ähnlichen Weg beweisen.

31. Fakultät

31.1. Definition

Ein wichtiges Produkt in der Mathematik ist die **Fakultät** $n!$ („n Fakultät“ ausgesprochen). Sie tritt unter anderem häufig in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik auf. Die Fakultät $n!$ ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer natürlichen Zahl n. Dementsprechend ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$. Einige Beispiele:
Beweis 27. *Beispiele zur Fakultät*

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$1! = 1$

Es ist sinnvoll, die Fakultät auch für die 0 zu definieren. Nach obiger Definition ist $0! = \prod_{k=1}^{0} k$. Dies ist ein leeres Produkt[1] und hat dementsprechend den Wert 1. Deshalb ist $0! = 1$. Damit ergibt sich folgende Definition der Fakultät:
Definition 42. Fakultät

Für eine natürliche Zahl $n \geq 0$ ist ihre Fakultät $n!$ definiert durch:

$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$

Es ist $0! = 1$.

31.2. Rekursive Definition

Die Fakultät lässt sich rekursiv definieren. Wie bei der rekursiven Definition des Produkts[2] muss dazu der Rekursionsschritt und -anfang angegeben werden:
Definition 43. Rekursive Definition der Fakultät

Die Fakultät $n!$ ist rekursiv definiert durch:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \text{ (Rekursionsanfang)} \\ n \cdot (n-1)! & \text{falls } n > 0 \text{ (Rekursionsschritt)} \end{cases}$$

Die Wirkungsweise der rekursiven Definition lässt sich an einem Beispiel nachvollziehen. Hier wird schrittweise die obige rekursive Definition angewandt:

1 Kapitel 30.8 auf Seite 230
2 Kapitel 30.8 auf Seite 230

Abb. 88

31.3. Anwendungen der Fakultät

Wie bereits erwähnt, tritt die Fakultät häufig bei Wahrscheinlichkeitsrechnungen und in der Statistik auf. Die Ursache dafür liegt an folgendem Satz aus der Kombinatorik (die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Frage nach der Anzahl möglicher Anordnungen und bildet damit die Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung).

Satz 9. *Anordnungen einer endlichen Menge*

Die Anzahl aller Anordnungen einer endlichen Menge mit n Elementen ist $n!$.

Mit Hilfe der Fakultät lassen sich so folgende Fragen beantworten: Wie viele mögliche Anordnungen von 52 Spielkarten gibt es? Wenn ich 20 Bierflaschen habe, wie viele Reihenfolgen gibt es, diese Bierflaschen zu trinken. Auf wie viele unterschiedliche Touren kann man 11 Sehenswürdigkeiten besichtigen?

31.3.1. Beweis des Satzes

Schauen wir uns zunächst einige Beispiele an. Betrachte dazu die Menge $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Frage: Wie viele Anordnungen dieser beiden Mengen gibt es und welche sind das?
Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen dieser beiden Mengen lässt sich am besten dadurch bestimmen, indem wir alle möglichen Anordnungen systematisch aufschreiben. Fangen wir mit der Menge A an. Die Menge $\{1, 2, 3\}$ besitzt folgende mögliche Anordnungen:

$$\begin{array}{lll} 123, & 213, & 312, \\ 132, & 231, & 321, \end{array}$$

Wir haben 6 mögliche Anordnungen gefunden (was 3! entspricht). Analog können wir alle möglichen Anordnungen der 4-elementigen Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ finden:

$$\begin{array}{llll} 1234, & 2134 & 3124 & 4123 \\ 1243, & 2143 & 3142 & 4132 \\ 1324, & 2314 & 3214 & 4213 \\ 1342, & 2341 & 3241 & 4231 \\ 1423, & 2413 & 3412 & 4312 \\ 1432, & 2431 & 3421 & 4321 \end{array}$$

Wir haben 24 verschiedene Möglichkeiten der Anordnung gefunden (was 4! entspricht). Wenn man sich nun die gefundene Systematik zum Notieren aller Anordnungen anschaut, kann man ein induktives Prinzip erkennen (*Weißt du schon, wie du die Aufgabe mit Hilfe vollständiger Induktion lösen kannst?*).

Schauen wir uns die Anordnungen der zweiten Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ an. Zunächst haben wir vier Möglichkeiten die erste Zahl zu bestimmen (*jede Spalte*). Danach haben wir in den Zeilen jeder Spalte alle Kombinationsmöglichkeiten der restlichen 3 Zahlen systematisch aufgeschrieben. Da es für 3 Zahlen genau 6 Möglichkeiten gibt (wie bei Menge A bestimmt), kommen wir auf insgesamt $4 \cdot 6 = 24$ Möglichkeiten.

Aufgabe: Versuche nun den Satz mit Hilfe vollständiger Induktion zu beweisen
Zu beweisende Aussageform: $A(n)$: Es gibt $n!$ Möglichkeiten eine n-elementige Menge anzuordnen.

Induktionsanfang: Für eine einelementige Menge gibt es nur eine Anordnungsmöglichkeit. Da außerdem $1! = 1$ ist, ist die Aussageform für $n = 1$ wahr.

Induktionsschritt: Für eine $(n+1)$-elementige Menge gibt es $n+1$ Möglichkeiten die erste Position zu besetzen. Für jede dieser Möglichkeiten müssen die restlichen n Positionen besetzt werden, wobei es nach Induktionsvoraussetzung dafür genau $n!$ Möglichkeiten gibt. Damit ist die Gesamtzahl aller möglichen Anordnungen einer $(n+1)$-elementigen Menge genau $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$. nice.

Der obige Satz ist im Übrigen äquivalent mit dem folgendem Satz:
Satz 10. *Anzahl Permutationen einer endlichen Menge*

Die Anzahl der Permutationen einer endlichen n-elementigen Menge ist $n!$.

Jetzt können wir auch unsere obigen Fragen beantworten: Es gibt $52! \approx 8{,}06 \cdot 10^{67}$ verschiedene Anordnungen von 52 Spielkarten, $20! \approx 2{,}43 \cdot 10^{18}$ verschiedene Reihenfolgen, 20 Bierflaschen zu trinken und $11! = 39.916.800$ verschiedene Touren, um 11 Sehenswürdigkeiten zu besuchen.

32. Zusammenfassung

__FORCETOC__

Mind Map

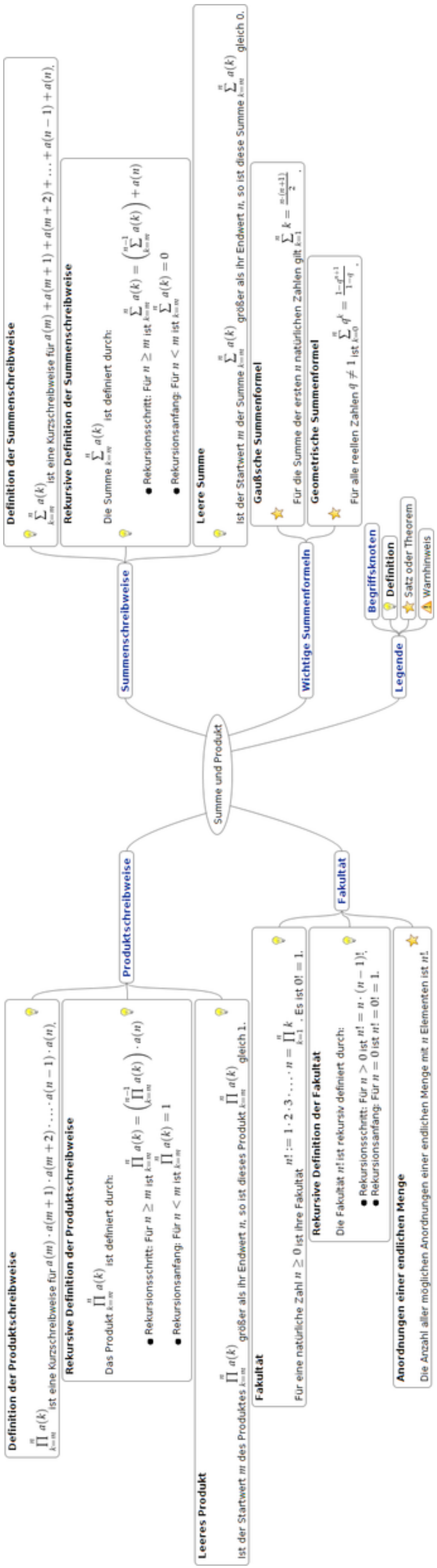

Summe und Produkt
Summenschreibweise
Definition der Summenschreibweise
$\sum_{k=m}^{n} a(k)$ ist eine Kurzschreibweise für $a(m)+a(m+1)+a(m+2)+\ldots+a(n-1)+a(n)$.
Rekursive Definition der Summenschreibweise
Die Summe $\sum_{k=m}^{n} a(k)$ ist definiert durch:
Rekursionsschritt: Für $n \geq m$ ist $\sum_{k=m}^{n} a(k) = \left(\sum_{k=m}^{n-1} a(k)\right) + a(n)$
Rekursionsanfang: Für $n < m$ ist $\sum_{k=m}^{n} a(k) = 0$
Leere Summe
Ist der Startwert m der Summe $\sum_{k=m}^{n} a(k)$ größer als ihr Endwert n, so ist diese Summe $\sum_{k=m}^{n} a(k)$ gleich 0.
Wichtige Summenformeln
Gaußsche Summenformel
Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.
Geometrische Summenformel
Für alle reellen Zahlen $q \neq 1$ ist $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Legende
Begriffsknoten
Definition
Satz oder Theorem
Warnhinweis
Produktschreibweise
Definition der Produktschreibweise
$\prod_{k=m}^{n} a(k)$ ist eine Kurzschreibweise für $a(m)\cdot a(m+1)\cdot a(m+2)\cdot\ldots\cdot a(n-1)\cdot a(n)$.
Rekursive Definition der Produktschreibweise
Das Produkt $\prod_{k=m}^{n} a(k)$ ist definiert durch:
Rekursionsschritt: Für $n \geq m$ ist $\prod_{k=m}^{n} a(k) = \left(\prod_{k=m}^{n-1} a(k)\right)\cdot a(n)$
Rekursionsanfang: Für $n < m$ ist $\prod_{k=m}^{n} a(k) = 1$
Leeres Produkt
Ist der Startwert m des Produktes $\prod_{k=m}^{n} a(k)$ größer als ihr Endwert n, so ist dieses Produkt $\prod_{k=m}^{n} a(k)$ gleich 1.
Fakultät
Fakultät
Für eine natürliche Zahl $n \geq 0$ ist ihre Fakultät $n! := 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$. Es ist $0! = 1$.
Rekursive Definition der Fakultät
Die Fakultät $n!$ ist rekursiv definiert durch:
Rekursionsschritt: Für $n > 0$ ist $n! = n\cdot(n-1)!$.
Rekursionsanfang: Für $n = 0$ ist $n! = 0! = 1$.
Anordnungen einer endlichen Menge
Die Anzahl aller möglichen Anordnungen einer endlichen Menge mit n Elementen ist $n!$.

Abb. 89

32.1. Eigenschaften der Summen- und Produktschreibweise

Eigenschaften der Summe	
Eigenschaft	**Erklärung**
$\sum_{k=m}^{n} a(k) = \sum_{l=m}^{n} a(l)$	*Indexumbennungsregel:* Die Indizes können beliebig umbenannt werden, solange die neu eingeführte Laufvariable nicht in Konflikt mit einer bereits definierten Variable tritt.
$\sum_{k=m}^{n} a(k) = \sum_{k=m}^{l} a(k) + \sum_{k=l+1}^{n} a(k)$	Summen können in zwei Summen aufgeteilt werden.
$\sum_{k=m}^{n+1} a(k) = \sum_{k=m}^{n} a(k) + a(n+1)$	Spezialfall der obigen Eigenschaften bzw. Rekursionsschritt bei der rekursiven Definition der Summe.
$\sum_{k=m}^{n} \lambda \cdot a(k) = \lambda \cdot \sum_{k=m}^{n} a(k)$	*Konstantenregel:* Konstanten können aus Summen rausgezogen werden.
$\sum_{k=m}^{n} (a(k) + b(k)) = (\sum_{k=m}^{n} a(k)) + (\sum_{k=m}^{n} b(k))$	
$\sum_{l=r}^{s} \sum_{k=m}^{n} a(l,k) = \sum_{k=m}^{n} \sum_{l=r}^{s} a(l,k)$	*Allgemeines Kommutativgesetz:* Die Reihenfolge der Summen bei Doppel- und damit auch bei Mehrfachsummen ist egal.
$(\sum_{k=m}^{n} a(k)) \cdot (\sum_{l=r}^{s} b(l)) = \sum_{k=m}^{n} \sum_{l=r}^{s} a(k) \cdot b(l)$	*Allgemeines Distributivgesetz*

Eigenschaften des Produkts	
Eigenschaft	**Erklärung**
$\prod_{k=m}^{n} a(k) = \prod_{l=m}^{n} a(l)$	*Indexumbennungsregel:* Die Indizes können beliebig umbenannt werden, solange die neu eingeführte Laufvariable nicht in Konflikt mit einer bereits definierten Variable tritt.
$\prod_{k=m}^{n} a(k) = \prod_{k=m}^{l} a(k) + \prod_{k=l+1}^{n} a(k)$	Produkte können in mehrere Produkte aufgeteilt werden.
$\prod_{k=m}^{n+1} a(k) = \prod_{k=m}^{n} a(k) + a(n+1)$	Spezialfall der obigen Eigenschaften bzw. Rekursionsschritt bei der rekursiven Definition des Produkts.
$\prod_{k=m}^{n} \lambda \cdot a(k) = \lambda^{n-m+1} \cdot \prod_{k=m}^{n} a(k)$	*Konstantenregel:* Konstanten können aus Produkten rausgezogen werden (Beachte den dabei entstehenden Exponenten $n-m+1$).
$\prod_{k=m}^{n} (a(k) \cdot b(k)) = (\prod_{k=m}^{n} a(k)) \cdot (\prod_{k=m}^{n} b(k))$	
$\prod_{l=r}^{s} \prod_{k=m}^{n} a(l,k) = \prod_{k=m}^{n} \prod_{l=r}^{s} a(l,k)$	*Allgemeines Kommutativgesetz:* Die Reihenfolge der Produkte bei Doppel- und damit auch bei Mehrfachsummen ist egal.

Teil X.

Binomialkoeffizient

33. Binomialkoeffizient

33.1. Herleitung und Definition

Frage: Was ist wahrscheinlicher: Beim Lotto zu gewinnen oder vom Blitz getroffen zu werden?
Das wirst du nach Lektüre dieses Kapitels beantworten können.

Damit du diese Frage beantworten kannst, musst du erst einmal die Wahrscheinlichkeit eines Lottogewinns wissen. Wie groß ist also die Wahrscheinlichkeit, 6 Richtige aus 49 Möglichkeiten zu raten? Zur Antwort dieser Frage benötigen wir die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, 6 Zahlen aus 49 mögliche zu wählen. Hier kommt der **Binomialkoeffizient** ins Spiel. Er ist nämlich definiert als:
Definition 44. Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt für natürliche Zahlen n und k an, wie viele Möglichkeiten es gibt, k Objekte aus n Objekten auszuwählen. Damit gibt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ an, wie viele k-elementigen Teilmengen aus einer n-elementigen Menge gebildet werden können.

Man schreibt für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$. Dieser wird „n über k“ oder „k aus n“ ausgesprochen (Die deutsche Lotterie wird auch *6 aus 49* genannt). Der Binomialkoeffizient verdankt seinen Namen der Tatsache, dass er als Koeffizient im binomischen Lehrsatz[1] auftritt. Aber dazu im nächsten Kapitel mehr.

Unsere Aufgabe ist es, den Binomialkoeffizienten $\binom{49}{6}$ zu bestimmen. Gehen wir dazu schrittweise vor: Zunächst ist es wichtig, dass du streng zwischen den Begriffen *Anordnung* und *Kombination* unterscheidest. Der Unterschied zwischen diesen zwei Begriffen ist der, dass bei einer Anordnung auf die Reihenfolge der Objekte geachtet wird, bei einer Kombination nicht. So sind zwar die Anordnungen $\{3, 48, 23, 12, 35, 42\}$ und $\{12, 42, 35, 23, 48, 3\}$ verschieden, die Kombinationen $\{3, 48, 23, 12, 35, 42\}$ und $\{12, 42, 35, 23, 48, 3\}$ aber gleich.

Frage: Wie viele Anordnungen von 6 Zahlen aus 49 Möglichkeiten gibt es?
An der ersten Stelle können 49 verschiedene Zahlen stehen. Wenn die erste Stelle besetzt ist, gibt es für jede dieser Besetzung 48 verschiedene Möglichkeiten, die zweite Stelle zu besetzen. Dementsprechend gibt es $49 \cdot 48 = 2352$ verschiedene Möglichkeiten die ersten zwei Stellen zu belegen. Analog gibt es für die ersten drei Stellen $49 \cdot 48 \cdot 47$ verschiedene Möglichkeiten der Belegung und so weiter. Damit gibt es für sechs Stellen $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10.068.347.520$ verschiedene Belegungen, also 10.068.347.520 verschiedene Anordnungen.

Jedoch ist beim Lotto die Reihenfolge der gezogenen Zahlen irrelevant. In den oben gefundenen Anordnungen gibt es viele, die zur gleichen Kombination gehören. Dementsprechend die Frage:

1 Kapitel 34 auf Seite 249

Frage: Wie viele Kombinationen von 6 Zahlen aus 49 Möglichkeiten gibt es?
Für jede Kombination kommt jede unterschiedliche Anordnung dieser Kombination in der oben berechneten Gesamtzahl aller Anordnungen genau einmal vor. Nach dem Satz[2] über die Anzahl der Anordnungen einer endlichen Menge gibt es für eine Kombination/ Menge mit 6 Elementen $6! = 720$ verschiedene Anordnungen. Man muss also die obige Gesamtzahl aller Anordnungen durch 720 teilen und erhält das gewünschte Ergebnis. Es gibt damit $\frac{10.068.347.520}{720} = 13.983.816$ verschiedene Kombinationen von 6 Zahlen aus 49.

Mit Hilfe des obigen Lösungswegs können wir auch eine allgemeine Formel für die Berechnung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ finden. Hierzu benötigen wir eine Fallunterscheidung in $k \leq n$ und $k > n$. Betrachten wir zunächst den Fall, dass k größer als n ist:

Frage: Was ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$, wenn $k > n$ ist?
Nach obiger Definition entspricht der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ der Anzahl der verschiedenen Kombinationen von k Objekten aus n verschiedenen Objekten. Da k größer als n ist, gibt es keine Kombination von k Objekten aus n möglichen (*So kannst du keine Kombination von 11 Elementen aus 4 dir zur Verfügung stehenden bilden*). Damit ist für $k > n$ der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = 0$.

Und nun zum Fall, dass $k \leq n$ und $k \neq 0$ ist:

Aufgabe: Berechne allgemein $\binom{n}{k}$ für $k \leq n$ und $k \neq 0$, indem du analog zur obigen Herleitung für $\binom{49}{6}$ vorgehst.
Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen von k Elementen aus einer n-elementigen Menge entspricht nach obiger Herleitung dem Produkt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$, also dem Produkt $\prod_{j=1}^{k} n - j + 1$. Dieses Produkt muss noch durch die Anzahl der verschiedenen Anordnungen einer Kombination geteilt werden, die $k! = \prod_{j=1}^{k} j$ ist (siehe Anordnungssatz[3] aus dem Kapitel „Fakultät“). Damit erhalten wir:

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{j=1}^{k} n-j+1}{\prod_{j=1}^{k} j} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}$$

Wenn wir dieses Ergebnis mit $(n-k)!$ erweitern, erhalten wir die in Lehrbüchern übliche Definition des Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{j=1}^{k} n-j+1}{\prod_{j=1}^{k} j} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots(n-k+1)\cdot(n-k)!}^{=\,n!}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}_{=\,k!}\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Frage: Der letzte Fall: Wie sieht es im Fall $k = 0$ aus?
Es gibt nur eine 0-elementige Menge, die leere Menge $\{\}$. Per Definition ist die leere Menge Teilmenge jeder Menge, insbesondere jeder n-elementigen Menge. Damit ist Anzahl der 0-elementigen Kombinationen einer n-elementigen Menge gleich 1 (es gibt nur die leere Kombination $\{\}$). Es ist also $\binom{n}{0} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dies erhält man auch, wenn man $\binom{n}{0}$ mit der obigen Definition $\binom{n}{0} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ ausrechnet (siehe Binomialkoeffizient - Rechenregeln[4]).

Zusammengefasst erhalten wir folgende alternative Definition des Binomialkoeffizienten:
Definition 45. Lehrbuchdefinition des Binomialkoeffizienten

Für zwei natürliche Zahlen $n,k \geq 0$ mit $k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient definiert durch:

$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Für $k > n$ ist $\binom{n}{k} = 0$

Hier einige Beispiele:
Beweis 28. *Beispiele zum Binomialkoeffizienten*

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \cdot (12-4)!} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = 495$

$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0! \cdot (1-0)!} = \frac{1!}{0! \cdot 1!} = 1$

> **Hinweis**
>
> Es gibt auch eine w:Binomialkoeffizient#Verallgemeinerung[5] des Binomialkoeffizienten. Mit diesem wirst du aber am Anfang des Studiums kaum in Berührung kommen, weswegen ich ihn weglasse.

33.2. Und was ist nun wahrscheinlicher: Blitzschlag oder Lottogewinn?

Wie oben berechnet, gibt es 13.983.816 verschiedene Kombination von 6 Zahlen beim Lottospiel.

> *Frage: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit beim Lottospielen 6 Richtige zu bekommen?*
> Die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto zu gewinnen, ist $\frac{1}{13983816} = 7,15 \cdot 10^{-8} = 0,0000000715 = 0,00000715\%$

Und wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit vom Blitz getroffen zu werden? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir sie konkretisieren: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit in Deutschland innerhalb eines Jahres vom Blitz getroffen zu werden?. Nach dem Wikipedia-Artikel[6] gibt es durchschnittlich 3 bis 7 Todesfälle durch Blitzschlag in Deutschland pro Jahr. In diesem Artikel[7] ist die Rede von 4 bis 5 Todesfällen und Herr Krämer[8] nennt so um die 10 Todesfälle jährlich (*Leider konnte ich nur Angaben zu den jährlichen Todesfällen finden. Es wird sicherlich mehrere Menschen geben, die vom Blitz getroffen, aber nicht gestorben sind*). Bei gut 82 Millionen Einwohner in Deutschland ergibt dies mit durchschnittlich 5 Todesfällen im Jahr, eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{82000000} = 6,09 \cdot 10^{-8}$ in Deutschland innerhalb eines Jahres vom Blitz tödlich getroffen zu

6 http://de.wikipedia.org/wiki/Blitz#Wirkung_auf_Menschen
7 http://www.welt.de/welt_print/article950520/Maenner_trifft_der_Blitz_doppelt_so_haeufig_wie_Frauen.html
8 http://www.welt.de/vermischtes/article4090473/Beim-Lotto-koennen-kluge-Spieler-mehr-herausho html

werden, also ungefähr die Wahrscheinlichkeit im Lotto zu gewinnen. Wenn man noch annimmt, dass die Anzahl der nicht-tödlichen Blitzschläge auf Menschen mindestens genauso hoch ist wie die Anzahl der jährlichen Todesfälle, ergibt dies eine Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{10}{82000000} = 1,2 \cdot 10^{-7}$ im Jahr vom Blitz getroffen zu werden. Dementsprechend ist es wahrscheinlicher in Deutschland innerhalb eines Jahres vom Blitz getroffen zu werden, als bei einem *einzigen* Tipp 6 Richtige im Lotto zu haben. Beachte, dass wir in der obigen Rechnung nur die Wahrscheinlichkeit eines einzigen Lottotips berechnet haben. Wenn jemand im Jahr öfters Lotto spielt, dann ist seine Gewinnwahrscheinlichkeit auch größer als $7,15 \cdot 10^{-8}$.

34. Der binomische Lehrsatz

34.1. Der Binomische Lehrsatz

Sicherlich sind dir die w:Binomische Formel[1] noch aus der Schule bekannt. Ich kann mir gut vorstellen, dass dein Mathe-Lehrer sie in seinen Unterrichtsstunden hoch und runter gebetet hat. Nicht ohne Grund! Denn immer wieder helfen sie dir die binomischen Formeln geschickt umzuformen und Beweise einfach zu führen. Hier zur Wiederholung die 3 binomischen Formeln für alle a,b aus $\mathbb{R}$ gilt:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Denk immer an diese Formeln. Wenn du zum Beispiel auf Terme wie $4-16x^2$ triffst, kannst du sie auch als $(2+4x)\cdot(2-4x)$ schreiben. Manchmal kannst du so schwierige Terme vereinfachen oder zusammenfassen. Doch nun zum Thema dieses Kapitels: Wie lauten die binomischen Formeln für größere Potenzen als der 2?. Wir wollen also eine allgemeine Lösungsformel für den Term $(x+y)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ finden.

(!) Hinweis

Denk daran, wenn wir wissen, was $(x+y)^n$ ist, wissen wir auch, was $(x-y)^n$ ist. Denn wir können $(x-y)^n$ als $(x+(-y))^n$ schreiben und für $(x+(-y))^n$ können wir die gefundene Formel anwenden. Dies gilt insbesondere auch für die obigen binomischen Formeln. So folgt wegen $(a-b)^2 = (a+(-b))^2$ die zweite binomische Formel direkt aus der ersten.

Schauen wir uns ein Beispiel an: Wir wollen wissen, was $(x+y)^3$ ist. Hierzu müssen wir den Term $(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$ ausmultiplizieren, wie es in der folgenden Animation gezeigt wird:

1 `http://de.wikipedia.org/wiki/Binomische%20Formel`

$$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$$

Abb. 90

Wir erhalten so den Term $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. Es fällt auf, dass für jeden Summanden der Gesamtsumme die Summe der Exponenten von x und y gleich 3 ist. Dies leuchtet ein. Wir nehmen nämlich, wenn wir das Produkt $(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$ ausmultiplizieren, aus jeden der Terme $(x+y)$ entweder ein x oder ein y (in jeden Summanden kommen insgesamt 3 Faktoren x oder y vor). Die Summe der Exponenten beider Variablen muss also gleich 3 sein. Es müssen so nur noch die Koeffizienten der einzelnen Summanden bestimmt werden.

Wir sind nun bereit für den allgemeinen Fall. Wir wollen wissen:

$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n \text{ mal}} = ?$

Wir wissen, dass das Ergebnis eine Summe von Potenzen in x und y ist. Die Summe der Exponenten in jedem Summanden ist gleich n. Alle Potenzen besitzen also die Form $x^k y^{n-k}$, wobei $k \leq n$ eine natürliche Zahl ist (die 0 ist mit eingeschlossen). Wir müssen noch die Koeffizienten dieser Potenzen bestimmen. Betrachten wir einige Beispiele. Der Koeffizient von x^n muss 1 sein. Denn wenn wir diese Potenz erhalten wollen, müssen wir aus allen Termen $(x+y)$ die Variable x wählen:

$$\underbrace{({\color{red}x}+y)\cdot({\color{red}x}+y)\cdot\ldots\cdot({\color{red}x}+y)}_{\text{man erhält } {\color{red}x^n}}$$

Analog ist auch der Koeffizient für y^n 1. Doch wie lautet allgemein der Koeffizient für den Term $x^k y^{n-k}$? Dazu müssen wir aus den n Termen $(x+y)$ k-mal die Variable x und $(n-k)$-mal die Variable y wählen. Doch wie viele Möglichkeiten gibt es aus n Termen k-Mal eine Variable auszuwählen? Fällt dir etwas auf? Genau, dies ist der im vorherigen Abschnitt diskutierte Binomialkoeffizient[2] $\binom{n}{k}$!

2 Kapitel 33 auf Seite 245

Dementsprechend ist der Koeffizient von $x^k y^{n-k}$ gleich $\binom{n}{k}$ (Deshalb auch der Name: Binomialkoeffizient!). Wir erhalten:

Satz 11. *Der binomische Lehrsatz*

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (x+y)^n = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

34.2. Folgerungen aus dem binomischen Lehrsatz

Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes kannst du nun weitere Antworten auf Fragen der Kombinatorik finden. Stell dir vor, du hast eine beliebige, endliche Menge M gegeben. Wie viele Teilmengen kannst du aus dieser Menge bilden? Wir wissen bereits, dass die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M dem Binomialkoeffizienten $\binom{|M|}{k}$ entspricht ($|M|$ ist die Anzahl der Elemente der Menge M). Um die Gesamtzahl aller Teilmengen der Menge M zu finden, müssen wir die Summe[3] über die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen von M mit $0 \leq k \leq |M|$ bilden. Wir erhalten (Anmerkung: $\mathscr{P}(M)$ ist Potenzmenge[4] von M, also die Menge aller Teilmengen von M. Dementsprechend ist $|\mathscr{P}(M)|$ die Anzahl aller Teilmengen von M.):

$$|\mathscr{P}(M)| = \binom{|M|}{0} + \binom{|M|}{1} + \binom{|M|}{2} + \ldots + \binom{|M|}{|M|} = \sum_{k=0}^{|M|} \binom{|M|}{k}$$

Frage: Was ist das Ergebnis der obigen Summe? Vergleiche dazu die obige Summe mit dem binomischen Lehrsatz!
Die obige Summe entsteht aus dem binomischen Lehrsatz für $x = 1$ und $y = 1$. Dementsprechend ist $|\mathscr{P}(M)| = \sum_{k=0}^{|M|} \binom{|M|}{k} = (1+1)^{|M|} = 2^{|M|}$.

Satz 12. *Größe der Potenzmenge einer endlichen Menge*

Sei M eine beliebige endliche Menge. Dann ist $|\mathscr{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Und wie sieht es mit der folgenden Summe aus?

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots (+ \text{ oder } -) \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = ?$$

Frage: Wie lautet das Ergebnis der obigen Summe?
Die obige Summe entsteht aus dem binomischen Lehrsatz für $x = -1$ und $y = 1$. Das Ergebnis der Summe lautet dementsprechend:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0^n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \neq 0 \\ 1, & \text{wenn } n = 0 \end{cases}$$

3 Kapitel 30 auf Seite 221
4 Kapitel 15 auf Seite 107

35. Rechenregeln

Hier sind die wichtigsten Rechenregel zum Binomialkoeffizienten[1]. Es sei im Folgendem $0 \leq k \leq n$ vorausgesetzt.

35.0.1. Regel 1

$\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{n} = 1$

Aufgabe: Versuche obige Gleichungen zu beweisen (Wenn du nicht weißt, wie du anfangen sollst, schreib den Binomialkoeffizient erst einmal aus).
Die obigen Gleichungen ergeben sich durch Ausnutzung der Lehrbuchdefinition des Binomialkoeffizienten[2]:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$$

35.0.2. Regel 2

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Aufgabe: Versuche diese Gleichung zu beweisen.
Bei diesem Beweis musst du einige Umformungen durchführen:

- Du vertauscht $(n-k)!$ mit $k!$ (Du wendest also das w:Kommutativgesetz[3] der Multiplikation an):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

- Du subtrahierst n von k und addierst n zu k und setzt eine Klammer:

1 Kapitel 33 auf Seite 245

$$\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-n+k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}$$

- Nun musst du den Term noch in die Definition einsetzen:

$$\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}=\binom{n}{n-k}$$

- Insgesamt erhälst du folgenden Lösungsweg:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-n+k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}=\binom{n}{n-k}$$

35.0.3. Regel 3

Sei für diese Regel n und k größer als 0 (wobei immer noch $k \leq n$ ist). Es gilt:

$k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$

Aufgabe: Versuche diese Gleichung zu beweisen.
Auch bei diesem Beweis musst du einige kleine Umformungen durchführen:

- Zuerst schreibst du den Binomialkoeffizienten aus:

$$k\cdot\binom{n}{k}=k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

- Dann klammerst du ein n aus und kürzt ein k

$$k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}$$

- Nun musst du 1 im Nenner addieren und wieder subtrahieren und den Ausdruck wieder als Binomialkoeffizient schreiben

$$n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-k+1)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-(k-1))!}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

- Gesamter Lösungsweg:

$$k\cdot\binom{n}{k}=k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-k+1)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-(k-1))!}=n$$

35.0.4. Regel 4

$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Da auf der rechten Seite der Term $\binom{n}{k+1}$ auftritt, müssen wir zwischen $k < n$ und $k = n$ unterscheiden:

Aufgabe: Beweise obige Regeln für $k = n$.
Für $k = n$ ist:

$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = 1 + 0 = 1$, also $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Sei nun $k < n$:

Frage: Wie lautet obige Gleichung nach dem Einsetzen der Lehrbuchdefinition des Binomialkoeffizienten[4]?
$\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}$

Aufgabe: Versuche durch Termumformungen die obige Gleichung zu beweisen

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}$$

$\downarrow$ Brüche gleichnamig machen

$$= \frac{n!\cdot(k+1)}{(k+1)!\cdot(n-k)!} + \frac{n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{n!\cdot(k+1)+n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}$$

$\downarrow$ Zähler zusammenfassen

$$= \frac{n!\cdot(k+1+n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}$$

Mit den obigen Rechenregeln lassen sich die Binomialkoeffizienten im w:Pascalsches Dreieck[5] anordnen und ausrechnen. Regel 4 sagt, dass die Summen zweier nebeneinander stehenden Koeffizienten in die nächste Zeile rutscht, mittig unter die beiden:

5 http://de.wikipedia.org/wiki/Pascalsches%20Dreieck

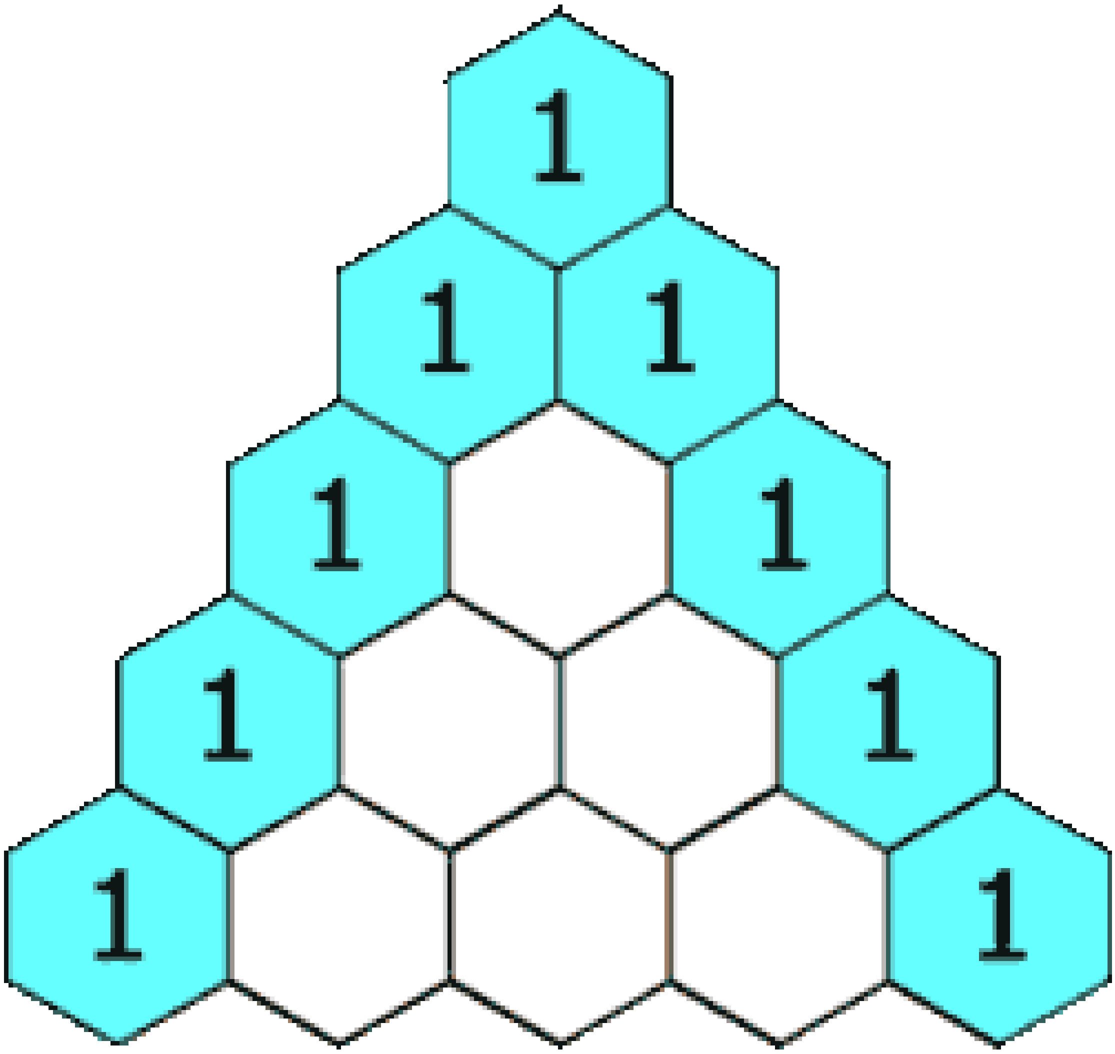


Abb. 91

36. Zusammenfassung

__FORCETOC__

Mind Map

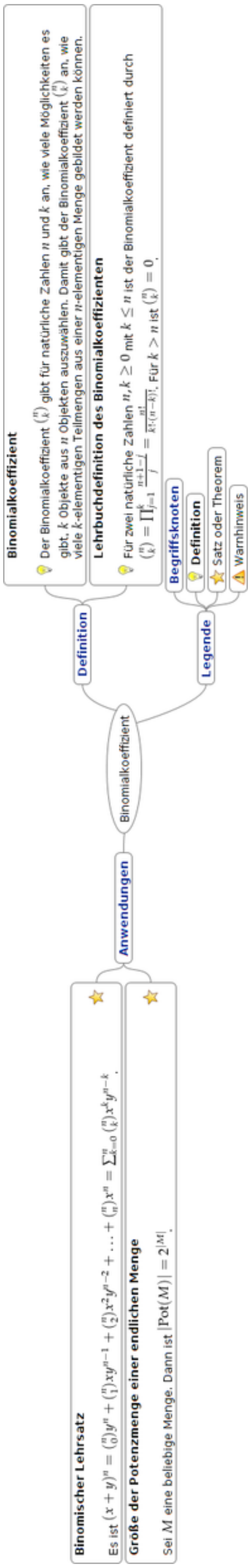

Binomialkoeffizient
Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt für natürliche Zahlen n und k an, wie viele Möglichkeiten es gibt, k Objekte aus n Objekten auszuwählen. Damit gibt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ an, wie viele k-elementigen Teilmengen aus einer n-elementigen Menge gebildet werden können.
Lehrbuchdefinition des Binomialkoeffizienten
Für zwei natürliche Zahlen $n, k \geq 0$ mit $k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient definiert durch $\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Für $k > n$ ist $\binom{n}{k} = 0$.
Definition
Legende
Begriffsknoten
Definition
Satz oder Theorem
Warnhinweis
Binomialkoeffizient
Anwendungen
Binomischer Lehrsatz
Es ist $(x+y)^n = \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
Größe der Potenzmenge einer endlichen Menge
Sei M eine beliebige Menge. Dann ist $|\mathrm{Pot}(M)| = 2^{|M|}$.

Abb. 92

36.1. Rechenregeln

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

37. Autoren

Edits	User
4	4g[1]
2	4tilden[2]
2	Braun[3]
1	Cgqyyflz[4]
1	CommonsDelinker[5]
1	Daniel5Ko[6]
2	Dirk Huenniger[7]
1	Fr4gde4l0r[8]
20	Griever[9]
8	Juetho[10]
1	Klaus Eifert[11]
33	Morrison69[12]
7	MrScoville[13]
1	Nornenfreund[14]
15	Noxgandhi[15]
2	Pcm[16]
15	Pseudo-nym[17]
1	Stefanhuglfing[18]
479	Stephan Kulla[19]
4	ThePacker[20]
1	Timwi[21]

1 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:4g
2 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:4tilden
3 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Braun
4 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Cgqyyflz
5 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:CommonsDelinker
6 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Daniel5Ko
7 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Dirk_Huenniger
8 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Fr4gde4l0r
9 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Griever
10 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Juetho
11 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Klaus_Eifert
12 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Morrison69
13 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:MrScoville
14 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Nornenfreund
15 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Noxgandhi
16 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Pcm
17 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Pseudo-nym
18 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Stefanhuglfing
19 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Stephan_Kulla
20 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:ThePacker
21 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:Timwi

26 W.e.r.n[22]

22 http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Benutzer:W.e.r.n

Abbildungsverzeichnis

- GFDL: Gnu Free Documentation License. `http://www.gnu.org/licenses/fdl.html`
- cc-by-sa-3.0: Creative Commons Attribution ShareAlike 3.0 License. `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`
- cc-by-sa-2.5: Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 License. `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/`
- cc-by-sa-2.0: Creative Commons Attribution ShareAlike 2.0 License. `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/`
- cc-by-sa-1.0: Creative Commons Attribution ShareAlike 1.0 License. `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/1.0/`
- cc-by-2.0: Creative Commons Attribution 2.0 License. `http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/`
- cc-by-2.0: Creative Commons Attribution 2.0 License. `http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/deed.en`
- cc-by-2.5: Creative Commons Attribution 2.5 License. `http://creativecommons.org/licenses/by/2.5/deed.en`
- cc-by-3.0: Creative Commons Attribution 3.0 License. `http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.en`
- GPL: GNU General Public License. `http://www.gnu.org/licenses/gpl-2.0.txt`
- LGPL: GNU Lesser General Public License. `http://www.gnu.org/licenses/lgpl.html`
- PD: This image is in the public domain.
- ATTR: The copyright holder of this file allows anyone to use it for any purpose, provided that the copyright holder is properly attributed. Redistribution, derivative work, commercial use, and all other use is permitted.
- EURO: This is the common (reverse) face of a euro coin. The copyright on the design of the common face of the euro coins belongs to the European Commission. Authorised is reproduction in a format without relief (drawings, paintings, films) provided they are not detrimental to the image of the euro.
- LFK: Lizenz Freie Kunst. `http://artlibre.org/licence/lal/de`
- CFR: Copyright free use.

- EPL: Eclipse Public License. http://www.eclipse.org/org/documents/epl-v10.php

Copies of the GPL, the LGPL as well as a GFDL are included in chapter Licenses[23]. Please note that images in the public domain do not require attribution. You may click on the image numbers in the following table to open the webpage of the images in your webbrower.

23 Kapitel 38 auf Seite 275

1	Stephan Kulla[24] (User:Stephan Kulla[25])	cc-by-sa-3.0
2		GFDL
3		
4	Stephan Kulla[26] (User:Stephan Kulla[27])	GFDL
5	Stephan Kulla[28] (User:Stephan Kulla[29])	cc-by-sa-3.0
6	Stephan Kulla[30] (User:Stephan Kulla[31])	cc-by-sa-3.0
7	Stephan Kulla[32] (User:Stephan Kulla[33])	cc-by-sa-3.0
8	Everaldo Coeher[34] and Yellowicon[35], traced by User:Stannered[36]	LGPL
9		
10	Stephan Kulla[37] (User:Stephan Kulla[38])	GFDL
11	Stephan Kulla[39] (User:Stephan Kulla[40])	cc-by-sa-3.0
12	Stephan Kulla[41] (User:Stephan Kulla[42])	cc-by-sa-3.0
13	Gottlieb Biermann A. Wittmann (photo)	PD
14	UNKNOWN TEMPLATE user at project Enoch Laiwikipediaen	GFDL
15	aussiegall[43]	cc-by-2.0
16	Stephan Kulla[44] (User:Stephan Kulla[45])	GFDL
17	Immi[46]	GFDL

24 http://kulla.me/
25 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
26 http://kulla.me/
27 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
28 http://kulla.me/
29 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
30 http://kulla.me/
31 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
32 http://kulla.me/
33 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
34 http://www.everaldo.com/
35 http://www.yellowicon.com/
36 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStannered
37 http://kulla.me/
38 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
39 http://kulla.me/
40 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
41 http://kulla.me/
42 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
43 http://flickr.com/people/aussiegall/
44 http://kulla.me/
45 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
46 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AImmi

18	• Veranschaulichung_einer_Menge.svg[47]:
	  • Basketball.svg[48]: Stellaris @ Open Clip Art Library.[49]
	  • Bordered_h_6.svg[50]: Nicu Buculei
	  • Acoustic_guitar1.svg[51]: narrowhouse[52]
	  • Bass_drum.svg[53]: ArtFavor[54]
	  • Big_Book.svg[55]: Jimmiet[56]
	  • Digital-camera_aj_ashton_01.svg[57]: AJ Ashton
	• derivative work: Stephan Kulla[58] (User:Stephan Kulla[59])	

19	• Basketball.svg[60]: Stellaris @ Open Clip Art Library.[61] • Bordered_h_6.svg[62]: Nicu Buculei • Acoustic_guitar1.svg[63]: narrowhouse[64] • Bass_drum.svg[65]: ArtFavor[66] • Big_Book.svg[67]: Jimmiet[68] • Digital-camera_aj_ashton_01.svg[69]: AJ Ashton • derivative work: Stephan Kulla[70] (User:Stephan Kulla[71])	PD
20	• Set_subsetAofB.svg[72]: User:Ed g2s[73] • derivative work: Stephan Kulla[74] (User:Stephan Kulla[75])	GFDL

47 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AVeranschaulichung_einer_Menge.svg
48 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ABasketball.svg
49 http://openclipart.org/media/people/Stellaris
50 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ABordered_h_6.svg
51 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AAcoustic_guitar1.svg
52 http://www.openclipart.org/user-detail/narrowhouse
53 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ABass_drum.svg
54 http://www.openclipart.org/user-detail/ArtFavor
55 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ABig_Book.svg
56 http://openclipart.org/media/people/jimmiet
57 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ADigital-camera_aj_ashton_01.svg
58 http://kulla.me/
59 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
60 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ABasketball.svg
61 http://openclipart.org/media/people/Stellaris
62 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ABordered_h_6.svg
63 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AAcoustic_guitar1.svg
64 http://www.openclipart.org/user-detail/narrowhouse
65 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ABass_drum.svg
66 http://www.openclipart.org/user-detail/ArtFavor
67 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ABig_Book.svg
68 http://openclipart.org/media/people/jimmiet
69 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ADigital-camera_aj_ashton_01.svg
70 http://kulla.me/
71 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
72 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ASet_subsetAofB.svg
73 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AEd%20g2s
74 http://kulla.me/
75 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla

21	• Veranschaulichung_einer_Menge.svg[76]:
	  • Basketball.svg[77]: Stellaris @ Open Clip Art Library.[78]
	  • Bordered_h_6.svg[79]: Nicu Buculei
	  • Acoustic_guitar1.svg[80]: narrowhouse[81]
	  • Bass_drum.svg[82]: ArtFavor[83]
	  • Big_Book.svg[84]: Jimmiet[85]
	  • Digital-camera_aj_ashton_01.svg[86]: AJ Ashton
	• derivative work: Stephan Kulla[87] (User:Stephan Kulla[88])	

22	Stephan Kulla[89] (User:Stephan Kulla[90])	cc-by-sa-3.0
23	Stephan Kulla[91] (User:Stephan Kulla[92])	cc-by-sa-3.0
24	Stephan Kulla[93] (User:Stephan Kulla[94])	cc-by-sa-3.0
25	Stephan Kulla[95] (User:Stephan Kulla[96])	cc-by-sa-3.0
26	Stephan Kulla[97] (User:Stephan Kulla[98])	cc-by-sa-3.0
27	Stephan Kulla[99] (User:Stephan Kulla[100])	cc-by-sa-3.0
28	Stephan Kulla[101] (User:Stephan Kulla[102])	cc-by-sa-3.0
29	Stephan Kulla[103] (User:Stephan Kulla[104])	cc-by-sa-3.0
30		PD
31		PD
32		PD
33		PD

76 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AVeranschaulichung_einer_Menge.svg
77 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ABasketball.svg
78 http://openclipart.org/media/people/Stellaris
79 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ABordered_h_6.svg
80 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AAcoustic_guitar1.svg
81 http://www.openclipart.org/user-detail/narrowhouse
82 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ABass_drum.svg
83 http://www.openclipart.org/user-detail/ArtFavor
84 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ABig_Book.svg
85 http://openclipart.org/media/people/jimmiet
86 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ADigital-camera_aj_ashton_01.svg
87 http://kulla.me/
88 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
89 http://kulla.me/
90 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
91 http://kulla.me/
92 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
93 http://kulla.me/
94 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
95 http://kulla.me/
96 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
97 http://kulla.me/
98 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
99 http://kulla.me/
100 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
101 http://kulla.me/
102 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
103 http://kulla.me/
104 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla

34	• Venn1010.svg[105]: Lipedia[106] • derivative work: Stephan Kulla[107] (User:Stephan Kulla[108])	PD
35		PD
36	Stephan Kulla[109] (User:Stephan Kulla[110])	cc-by-sa-3.0
37		PD
38		PD
39		PD
40	• Venn1010.svg[111]: Lipedia[112] • derivative work: Stephan Kulla[113] (User:Stephan Kulla[114])	PD
41	Stephan Kulla[115] (User:Stephan Kulla[116])	cc-by-sa-3.0
42	Stephan Kulla[117] (User:Stephan Kulla[118])	cc-by-sa-3.0
43		PD
44		PD
45		PD
46		PD
47		PD
48	• Stick Figure.svg[119]: Jleedev[120] and Ben Liblit[121] • derivative work: Stephan Kulla[122] (User:Stephan Kulla[123])	GFDL

105 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AVenn1010.svg
106 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3ALipedia
107 http://kulla.me/
108 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
109 http://kulla.me/
110 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
111 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AVenn1010.svg
112 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3ALipedia
113 http://kulla.me/
114 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
115 http://kulla.me/
116 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
117 http://kulla.me/
118 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
119 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AStick%20Figure.svg
120 http://de.wikipedia.org/wiki/User%3AJleedev
121 http://de.wikipedia.org/wiki/User%3ABen%20Liblit
122 http://kulla.me/
123 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla

49	• Stick Figure.svg[124]: Jleedev[125] and Ben Liblit[126] • Love Heart symbol.svg[127]: Nevit Dilmen[128] • derivative work: Stephan Kulla[129] (User:Stephan Kulla[130])	GFDL
50	• Stick Figure.svg[131]: Jleedev[132] and Ben Liblit[133] • Nuvola apps edu mathematics-p.svg[134]: David Vignoni[135] (original icon); Flamurai[136] (SVG convertion) • Earth clip art.svg[137]: yeKcim on the Open Clip Art Library[138] • Nuvola apps edu languages.svg[139]: Traced by User:Stannered[140], original by David Vignoni[141] • derivative work: Stephan Kulla[142] (User:Stephan Kulla[143])	GFDL

124 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AStick%20Figure.svg
125 http://de.wikipedia.org/wiki/User%3AJleedev
126 http://de.wikipedia.org/wiki/User%3ABen%20Liblit
127 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ALove%20Heart%20symbol.svg
128 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3ANevit%20Dilmen
129 http://kulla.me/
130 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
131 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AStick%20Figure.svg
132 http://de.wikipedia.org/wiki/User%3AJleedev
133 http://de.wikipedia.org/wiki/User%3ABen%20Liblit
134 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ANuvola%20apps%20edu%20mathematics-p.svg
135 http://de.wikibooks.org/wiki/%3Aen%3ADavid%20Vignoni
136 http://de.wikibooks.org/wiki/user%3AFlamurai
137 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AEarth%20clip%20art.svg
138 http://openclipart.org/media/people/yeKcim
139 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ANuvola%20apps%20edu%20languages.svg
140 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStannered
141 http://de.wikibooks.org/wiki/%3Aen%3ADavid%20Vignoni
142 http://kulla.me/
143 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla

51	• Stick Figure.svg[144]: Jleedev[145] and Ben Liblit[146] • Nuvola apps edu mathematics-p.svg[147]: David Vignoni[148] (original icon); Flamurai[149] (SVG convertion) • Earth clip art.svg[150]: yeKcim on the Open Clip Art Library[151] • Nuvola apps kcoloredit.svg[152]: David Vignoni[153] (original icon); Actam[154] (SVG convertion) • derivative work: Stephan Kulla[155] (User:Stephan Kulla[156])	GFDL
52	• Aqua.svg[157]: Ecelan[158] • Nuvola Dutch flag.svg[159]: David Vignoni[160] (original icon); Min's[161] (derivative work) • Nuvola Ukrainian flag.svg[162]: David Vignoni[163] (original icon); Min's[164] (derivative work) • Nuvola Irish flag.svg[165]: Min's[166] and Arz[167] • Nuvola German flag.svg[168]: David Vignoni[169] (original icon); Matthias M.[170] (derivative work) • derivative work: Stephan Kulla[171] (User:Stephan Kulla[172])	GFDL
53	Stephan Kulla[173] (User:Stephan Kulla[174])	cc-by-sa-3.0

144 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AStick%20Figure.svg
145 http://de.wikipedia.org/wiki/User%3AJleedev
146 http://de.wikipedia.org/wiki/User%3ABen%20Liblit
147 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ANuvola%20apps%20edu%20mathematics-p.svg
148 http://de.wikibooks.org/wiki/%3Aen%3ADavid%20Vignoni
149 http://de.wikibooks.org/wiki/user%3AFlamurai
150 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AEarth%20clip%20art.svg
151 http://openclipart.org/media/people/yeKcim
152 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ANuvola%20apps%20kcoloredit.svg
153 http://de.wikibooks.org/wiki/%3Aen%3ADavid%20Vignoni
154 http://de.wikibooks.org/wiki/user%3AActam
155 http://kulla.me/
156 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
157 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AAgua.svg
158 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AEcelan
159 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ANuvola%20Dutch%20flag.svg
160 http://de.wikibooks.org/wiki/%3Aen%3ADavid%20Vignoni
161 http://de.wikibooks.org/wiki/user%3AMin%27s
162 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ANuvola%20Ukrainian%20flag.svg
163 http://de.wikibooks.org/wiki/%3Aen%3ADavid%20Vignoni
164 http://de.wikibooks.org/wiki/user%3AMin%27s
165 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ANuvola%20Irish%20flag.svg
166 http://de.wikibooks.org/wiki/user%3AMin%27s
167 http://de.wikibooks.org/wiki/user%3AArz
168 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ANuvola%20German%20flag.svg
169 http://de.wikibooks.org/wiki/%3Aen%3ADavid%20Vignoni
170 http://de.wikibooks.org/wiki/user%3AMatthias%20M.
171 http://kulla.me/
172 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
173 http://kulla.me/
174 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla

54	Stephan Kulla[175] (User:Stephan Kulla[176])	cc-by-sa-3.0
55	Stephan Kulla[177] (User:Stephan Kulla[178])	cc-by-sa-3.0
56	Stephan Kulla[179] (User:Stephan Kulla[180])	cc-by-sa-3.0
57	Stephan Kulla[181] (User:Stephan Kulla[182])	cc-by-sa-3.0
58	• Nuvola apps bookcase.svg[183]: Peter Kemp • derivative work: Stephan Kulla[184] (User:Stephan Kulla[185])	LGPL
59	• Nuvola apps bookcase.svg[186]: Peter Kemp • derivative work: Stephan Kulla[187] (User:Stephan Kulla[188])	LGPL
60	Stephan Kulla[189] (User:Stephan Kulla[190])	cc-by-sa-3.0
61	Stephan Kulla[191] (User:Stephan Kulla[192])	cc-by-sa-3.0
62	Stephan Kulla[193] (User:Stephan Kulla[194])	cc-by-sa-3.0
63	Stephan Kulla[195] (User:Stephan Kulla[196])	cc-by-sa-3.0
64	HiTe	PD
65	HiTe	PD
66	HiTe	PD
67	HiTe	PD
68	Stephan Kulla[197] (User:Stephan Kulla[198])	cc-by-sa-3.0
69		PD
70		PD
71	en:User:Schapel[199]	PD
72	Stephan Kulla[200] (User:Stephan Kulla[201])	cc-by-sa-3.0

175 http://kulla.me/
176 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
177 http://kulla.me/
178 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
179 http://kulla.me/
180 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
181 http://kulla.me/
182 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
183 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ANuvola%20apps%20bookcase.svg
184 http://kulla.me/
185 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
186 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3ANuvola%20apps%20bookcase.svg
187 http://kulla.me/
188 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
189 http://kulla.me/
190 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
191 http://kulla.me/
192 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
193 http://kulla.me/
194 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
195 http://kulla.me/
196 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
197 http://kulla.me/
198 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
199 http://de.wikibooks.org/wiki/%3Aen%3AUser%3ASchapel
200 http://kulla.me/
201 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla

73	Stephan Kulla[202] (User:Stephan Kulla[203])	cc-by-sa-3.0
74	Stephan Kulla[204] (User:Stephan Kulla[205])	cc-by-sa-3.0
75		PD
76		PD
77	en:User:Schapel[206]	PD
78	Stephan Kulla[207] (User:Stephan Kulla[208])	cc-by-sa-3.0
79	Stephan Kulla[209] (User:Stephan Kulla[210])	cc-by-sa-3.0
80	Stephan Kulla[211] (User:Stephan Kulla[212])	cc-by-sa-3.0
81	• Greek_uc_sigma.svg[213]: Andux[214] • derivative work: Stephan Kulla[215] (User:Stephan Kulla[216])	GFDL
82	Stephan Kulla[217] (User:Stephan Kulla[218])	cc-by-sa-3.0
83	Stephan Kulla[219] (User:Stephan Kulla[220])	cc-by-sa-3.0
84	Stephan Kulla[221] (User:Stephan Kulla[222])	cc-by-sa-3.0
85	Stephan Kulla[223] (User:Stephan Kulla[224])	cc-by-sa-3.0
86	• Greek_uc_sigma.svg[225]: Andux[226] • derivative work: Stephan Kulla[227] (User:Stephan Kulla[228])	GFDL
87	Stephan Kulla[229] (User:Stephan Kulla[230])	cc-by-sa-3.0
88	Stephan Kulla[231] (User:Stephan Kulla[232])	cc-by-sa-3.0

202 http://kulla.me/
203 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
204 http://kulla.me/
205 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
206 http://de.wikibooks.org/wiki/%3Aen%3AUser%3ASchapel
207 http://kulla.me/
208 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
209 http://kulla.me/
210 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
211 http://kulla.me/
212 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
213 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AGreek_uc_sigma.svg
214 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AAndux
215 http://kulla.me/
216 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
217 http://kulla.me/
218 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
219 http://kulla.me/
220 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
221 http://kulla.me/
222 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
223 http://kulla.me/
224 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
225 http://de.wikibooks.org/wiki/%3AFile%3AGreek_uc_sigma.svg
226 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AAndux
227 http://kulla.me/
228 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
229 http://kulla.me/
230 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
231 http://kulla.me/
232 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla

89	Stephan Kulla[233] (User:Stephan Kulla[234])	cc-by-sa-3.0
90	Stephan Kulla[235] (User:Stephan Kulla[236])	cc-by-sa-3.0
91	Hersfold[237] on the English Wikipedia	GFDL
92	Stephan Kulla[238] (User:Stephan Kulla[239])	cc-by-sa-3.0

233 http://kulla.me/
234 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
235 http://kulla.me/
236 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla
237 http://de.wikipedia.org/wiki/User%3AHersfold
238 http://kulla.me/
239 http://de.wikibooks.org/wiki/User%3AStephan%20Kulla

38. Licenses

38.1. GNU GENERAL PUBLIC LICENSE

Version 3, 29 June 2007

Copyright © 2007 Free Software Foundation, Inc. <http://fsf.org/>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed. Preamble

The GNU General Public License is a free, copyleft license for software and other kinds of works.

The licenses for most software and other practical works are designed to take away your freedom to share and change the works. By contrast, the GNU General Public License is intended to guarantee your freedom to share and change all versions of a program–to make sure it remains free software for all its users. We, the Free Software Foundation, use the GNU General Public License for most of our software; it applies also to any other work released this way by its authors. You can apply it to your programs, too.

When we speak of free software, we are referring to freedom, not price. Our General Public Licenses are designed to make sure that you have the freedom to distribute copies of free software (and charge for them if you wish), that you receive source code or can get it if you want it, that you can change the software or use pieces of it in new free programs, and that you know you can do these things.

To protect your rights, we need to prevent others from denying you these rights or asking you to surrender the rights. Therefore, you have certain responsibilities if you distribute copies of the software, or if you modify it: responsibilities to respect the freedom of others.

For example, if you distribute copies of such a program, whether gratis or for a fee, you must pass on to the recipients the same freedoms that you received. You must make sure that they, too, receive or can get the source code. And you must show them these terms so they know their rights.

Developers that use the GNU GPL protect your rights with two steps: (1) assert copyright on the software, and (2) offer you this License giving you legal permission to copy, distribute and/or modify it.

For the developers' and authors' protection, the GPL clearly explains that there is no warranty for this free software. For both users' and authors' sake, the GPL requires that modified versions be marked as changed, so that their problems will not be attributed erroneously to authors of previous versions.

Some devices are designed to deny users access to install or run modified versions of the software inside them, although the manufacturer can do so. This is fundamentally incompatible with the aim of protecting users' freedom to change the software. The systematic pattern of such abuse occurs in the area of products for individuals to use, which is precisely where it is most unacceptable. Therefore, we have designed this version of the GPL to prohibit the practice for those products. If such problems arise substantially in other domains, we stand ready to extend this provision to those domains in future versions of the GPL, as needed to protect the freedom of users.

Finally, every program is threatened constantly by software patents. States should not allow patents to restrict development and use of software on general-purpose computers, but in those that do, we wish to avoid the special danger that patents applied to a free program could make it effectively proprietary. To prevent this, the GPL assures that patents cannot be used to render the program non-free.

The precise terms and conditions for copying, distribution and modification follow. TERMS AND CONDITIONS 0. Definitions.

"This License" refers to version 3 of the GNU General Public License.

"Copyright" also means copyright-like laws that apply to other kinds of works, such as semiconductor masks.

"The Program" refers to any copyrightable work licensed under this License. Each licensee is addressed as "you". "Licensees" and "recipients" may be individuals or organizations.

To "modify" a work means to copy from or adapt all or part of the work in a fashion requiring copyright permission, other than the making of an exact copy. The resulting work is called a "modified version" of the earlier work or a work "based on" the earlier work.

A "covered work" means either the unmodified Program or a work based on the Program.

To "propagate" a work means to do anything with it that, without permission, would make you directly or secondarily liable for infringement under applicable copyright law, except executing it on a computer or modifying a private copy. Propagation includes copying, distribution (with or without modification), making available to the public, and in some countries other activities as well.

To "convey" a work means any kind of propagation that enables other parties to make or receive copies. Mere interaction with a user through a computer network, with no transfer of a copy, is not conveying.

An interactive user interface displays "Appropriate Legal Notices" to the extent that it includes a convenient and prominently visible feature that (1) displays an appropriate copyright notice, and (2) tells the user that there is no warranty for the work (except to the extent that warranties are provided), that licensees may convey the work under this License, and how to view a copy of this License. If the interface presents a list of user commands or options, such as a menu, a prominent item in the list meets this criterion. 1. Source Code.

The "source code" for a work means the preferred form of the work for making modifications to it. "Object code" means any non-source form of a work.

A "Standard Interface" means an interface that either is an official standard defined by a recognized standards body, or, in the case of interfaces specified for a particular programming language, one that is widely used among developers working in that language.

The "System Libraries" of an executable work include anything, other than the work as a whole, that (a) is included in the normal form of packaging a Major Component, but which is not part of that Major Component, and (b) serves only to enable use of the work with that Major Component, or to implement a Standard Interface for which an implementation is available to the public in source code form. A "Major Component", in this context, means a major essential component (kernel, window system, and so on) of the specific operating system (if any) on which the executable work runs, or a compiler used to produce the work, or an object code interpreter used to run it.

The "Corresponding Source" for a work in object code form means all the source code needed to generate, install, and (for an executable work) run the object code and to modify the work, including scripts to control those activities. However, it does not include the work's System Libraries, or general-purpose tools or generally available free programs which are used unmodified in performing those activities but which are not part of the work. For example, Corresponding Source includes interface definition files associated with source files for the work, and the source code for shared libraries and dynamically linked subprograms that the work is specifically designed to require, such as by intimate data communication or control flow between those subprograms and other parts of the work.

The Corresponding Source need not include anything that users can regenerate automatically from other parts of the Corresponding Source.

The Corresponding Source for a work in source code form is that same work. 2. Basic Permissions.

All rights granted under this License are granted for the term of copyright on the Program, and are irrevocable provided the stated conditions are met. This License explicitly affirms your unlimited permission to run the unmodified Program. The output from running a covered work is covered by this License only if the output, given its content, constitutes a covered work. This License acknowledges your rights of fair use or other equivalent, as provided by copyright law.

You may make, run and propagate covered works that you do not convey, without conditions so long as your license otherwise remains in force. You may convey covered works to others for the sole purpose of having them make modifications exclusively for you, or provide you with facilities for running those works, provided that you comply with the terms of this License in conveying all material for which you do not control copyright. Those thus making or running the covered works for you must do so exclusively on your behalf, under your direction and control, on terms that prohibit them from making any copies of your copyrighted material outside their relationship with you.

Conveying under any other circumstances is permitted solely under the conditions stated below. Sublicensing is not allowed; section 10 makes it unnecessary. 3. Protecting Users' Legal Rights From Anti-Circumvention Law.

No covered work shall be deemed part of an effective technological measure under any applicable law fulfilling obligations under article 11 of the WIPO copyright treaty adopted on 20 December 1996, or similar laws prohibiting or restricting circumvention of such measures.

When you convey a covered work, you waive any legal power to forbid circumvention of technological measures to the extent such circumvention is effected by exercising rights under this License with respect to the covered work, and you disclaim any intention to limit operation or modification of the work as a means of enforcing, against the work's users, your or third parties' legal rights to forbid circumvention of technological measures. 4. Conveying Verbatim Copies.

You may convey verbatim copies of the Program's source code as you receive it, in any medium, provided that you conspicuously and appropriately publish on each copy an appropriate copyright notice; keep intact all notices stating that this License and any non-permissive terms added in accord with section 7 apply to the code; keep intact all notices of the absence of any warranty; and give all recipients a copy of this License along with the Program.

You may charge any price or no price for each copy that you convey, and you may offer support or warranty protection for a fee. 5. Conveying Modified Source Versions.

You may convey a work based on the Program, or the modifications to produce it from the Program, in the form of source code under the terms of section 4, provided that you also meet all of these conditions:

* a) The work must carry prominent notices stating that you modified it, and giving a relevant date. * b) The work must carry prominent notices stating that it is released under this License and any conditions added under section 7. This requirement modifies the requirement in section 4 to "keep intact all notices". * c) You must license the entire work, as a whole, under this License to anyone who comes into possession of a copy. This License will therefore apply, along with any applicable section 7 additional terms, to the whole of the work, and all its parts, regardless of how they are packaged. This License gives no permission to license the work in any other way, but it does not invalidate such permission if you have separately received it. * d) If the work has interactive user interfaces, each must display Appropriate Legal Notices; however, if the Program has interactive interfaces that do not display Appropriate Legal Notices, your work need not make them do so.

A compilation of a covered work with other separate and independent works, which are not by their nature extensions of the covered work, and which are not combined with it such as to form a larger program, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the compilation and its resulting copyright are not used to limit the access or legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. Inclusion of a covered work in an aggregate does not cause this License to apply to the other parts of the aggregate. 6. Conveying Non-Source Forms.

You may convey a covered work in object code form under the terms of sections 4 and 5, provided that you also convey the machine-readable Corresponding Source under the terms of this License, in one of these ways:

* a) Convey the object code in, or embodied in, a physical product (including a physical distribution medium), accompanied by the Corresponding Source fixed on a durable physical medium customarily used for software interchange. * b) Convey the object code in, or embodied in, a physical product (including a physical distribution medium), accompanied by a written offer, valid for at least three years and valid for as long as you offer spare parts or customer support for that product model, to give anyone who possesses the object code either (1) a copy of the Corresponding Source for all the software in the product that is covered by this License, on a durable physical medium customarily used for software interchange, for a price no more than your reasonable cost of physically performing this conveying of source, or (2) access to copy the Corresponding Source from a network server at no charge. * c) Convey individual copies of the object code with a copy of the written offer to provide the Corresponding Source. This alternative is allowed only occasionally and noncommercially, and only if you received the object code with such an offer, in accord with subsection 6b. * d) Convey the object code by offering access from a designated place (gratis or for a charge), and offer equivalent access to the Corresponding Source in the same way through the same place at no further charge. You need not require recipients to copy the Corresponding Source along with the object code. If the place to copy the object code is a network server, the Corresponding Source may be on a different server (operated by you or a third party) that supports equivalent copying facilities, provided you maintain clear directions next to the object code saying where to find the Corresponding Source. Regardless of what server hosts the Corresponding Source, you remain obligated to ensure that it is available for as long as needed to satisfy these requirements. * e) Convey the object code using peer-to-peer transmission, provided you inform other peers where the object code and Corresponding Source of the work are being offered to the general public at no charge under subsection 6d.

A separable portion of the object code, whose source code is excluded from the Corresponding Source as a System Library, need not be included in conveying the object code work.

A "User Product" is either (1) a "consumer product", which means any tangible personal property which is normally used for personal, family, or household purposes, or (2) anything designed or sold for incorporation into a dwelling. In determining whether a product is a consumer product, doubtful cases shall be resolved in favor of coverage. For a particular product received by a particular user, "normally used" refers to a typical or common use of that class of product, regardless of the status of the particular user or of the way in which the particular user actually uses, or expects or is expected to use, the product. A product is a consumer product regardless of whether the product has substantial commercial, industrial or non-consumer uses, unless such uses represent the only significant mode of use of the product.

"Installation Information" for a User Product means any methods, procedures, authorization keys, or other information required to install and execute modified versions of a covered work in that User Product from a modified version of its Corresponding Source. The information must suffice to ensure that the continued functioning of the modified object code is in no case prevented or interfered with solely because modification has been made.

If you convey an object code work under this section in, or with, or specifically for use in, a User Product, and the conveying occurs as part of a transaction in which the right of possession and use of the User Product is transferred to the recipient in perpetuity or for a fixed term (regardless of how the transaction is characterized), the Corresponding Source conveyed under this section must be accompanied by the Installation Information. But this requirement does not apply if neither you nor any third party retains the ability to install modified object code on the User Product (for example, the work has been installed in ROM).

The requirement to provide Installation Information does not include a requirement to continue to provide support service, warranty, or updates for a work that has been modified or installed by the recipient, or for the User Product in which it has been modified or installed. Access to a network may be denied when the modification itself materially and adversely affects the operation of the network or violates the rules and protocols for communication across the network.

Corresponding Source conveyed, and Installation Information provided, in accord with this section must be in a format that is publicly documented (and with an implementation available to the public in source code form), and must require no special password or key for unpacking, reading or copying. 7. Additional Terms.

"Additional permissions" are terms that supplement the terms of this License by making exceptions from one or more of its conditions. Additional permissions that are applicable to the entire Program shall be treated as though they were included in this License, to the extent that they are valid under applicable law. If additional permissions apply only to part of the Program, that part may be used separately under those permissions, but the entire Program remains governed by this License without regard to the additional permissions.

When you convey a copy of a covered work, you may at your option remove any additional permissions from that copy, or from any part of it. (Additional permissions may be written to require their own removal in certain cases when you modify the work.) You may place additional permissions on material, added by you to a covered work, for which you have or can give appropriate copyright permission.

Notwithstanding any other provision of this License, for material you add to a covered work, you may (if authorized by the copyright holders of that material) supplement the terms of this License with terms:

* a) Disclaiming warranty or limiting liability differently from the terms of sections 15 and 16 of this License; or * b) Requiring preservation of specified reasonable legal notices or author attributions in that material or in the Appropriate Legal Notices displayed by works containing it; or * c) Prohibiting misrepresentation of the origin of that material, or requiring that modified versions of such material be marked in reasonable ways as different from the original version; or * d) Limiting the use for publicity purposes of names of licensors or authors of the material; or * e) Declining to grant rights under trademark law for use of some trade names, trademarks, or service marks; or * f) Requiring indemnification of licensors and authors of that material by anyone who conveys the material (or modified versions of it) with contractual assumptions of liability to the recipient, for any liability that these contractual assumptions directly impose on those licensors and authors.

All other non-permissive additional terms are considered "further restrictions" within the meaning of section 10. If the Program as you received it, or any part of it, contains a notice stating that it is governed by this License along with a term that is a further restriction, you may remove that term. If a license document contains a further restriction but permits relicensing or conveying under this License, you may add to a covered work material governed by the terms of that license document, provided that the further restriction does not survive such relicensing or conveying.

If you add terms to a covered work in accord with this section, you must place, in the relevant source files, a statement of the additional terms that apply to those files, or a notice indicating where to find the applicable terms.

Additional terms, permissive or non-permissive, may be stated in the form of a separately written license, or stated as exceptions; the above requirements apply either way. 8. Termination.

You may not propagate or modify a covered work except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to propagate or modify it is void, and will automatically terminate your rights under this License (including any patent licenses granted under the third paragraph of section 11).

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, you do not qualify to receive new licenses for the same material under section 10. 9. Acceptance Not Required for Having Copies.

You are not required to accept this License in order to receive or run a copy of the Program. Ancillary propagation of a covered work occurring solely as a consequence of using peer-to-peer transmission to receive a copy likewise does not require acceptance. However, nothing other than this License grants you permission to propagate or modify any covered work. These actions infringe copyright if you do not accept this License. Therefore, by modifying or propagating a covered work, you indicate your acceptance of this License to do so. 10. Automatic Licensing of Downstream Recipients.

Each time you convey a covered work, the recipient automatically receives a license from the original licensors, to run, modify and propagate that work, subject to this License. You are not responsible for enforcing compliance by third parties with this License.

An "entity transaction" is a transaction transferring control of an organization, or substantially all assets of one, or subdividing an organization, or merging organizations. If propagation of a covered work results from an entity transaction, each party to that transaction who receives a copy of the work also receives whatever licenses to the work the party's predecessor in interest had or could give under the previous paragraph, plus a right to possession of the Corresponding Source of the work from the predecessor in interest, if the predecessor has it or can get it with reasonable efforts.

You may not impose any further restrictions on the exercise of the rights granted or affirmed under this License. For example, you may not impose a license fee, royalty, or other charge for exercise of rights granted under this License, and you may not initiate litigation (including a cross-claim or counterclaim in a lawsuit) alleging that any patent claim is infringed by making, using, selling, offering for sale, or importing the Program or any portion of it. 11. Patents.

A "contributor" is a copyright holder who authorizes use under this License of the Program or a work on which the Program is based. The work thus licensed is called the contributor's "contributor version".

A contributor's "essential patent claims" are all patent claims owned or controlled by the contributor, whether already acquired or hereafter acquired, that would be infringed by some manner, permitted by this License, of making, using, or selling its contributor version, but do not include claims that would be infringed only as a consequence of further modification of the contributor version. For purposes of this definition, "control" includes the right to grant patent sublicenses in a manner consistent with the requirements of this License.

Each contributor grants you a non-exclusive, worldwide, royalty-free patent license under the contributor's essential patent claims, to make, use, sell, offer for sale, import and otherwise run, modify and propagate the contents of its contributor version.

In the following three paragraphs, a "patent license" is any express agreement or commitment, however denominated, not to enforce a patent (such as an express permission to practice a patent or covenant not to sue for patent infringement). To "grant" such a patent license to a party means to make such an agreement or commitment not to enforce a patent against the party.

If you convey a covered work, knowingly relying on a patent license, and the Corresponding Source of the work is not available for anyone to copy, free of charge and under the terms of this License, through a publicly available network server or other readily accessible means, then you must either (1) cause the Corresponding Source to be so available, or (2) arrange to deprive yourself of the benefit of the patent license for this particular work, or (3) arrange, in a manner consistent with the requirements of this License, to extend the patent license to downstream recipients. "Knowingly relying" means you have actual knowledge that, but for the patent license, your conveying the covered work in a country, or your recipient's use of the covered work in a country, would infringe one or more identifiable patents in that country that you have reason to believe are valid.

If, pursuant to or in connection with a single transaction or arrangement, you convey, or propagate by procuring conveyance of, a covered work, and grant a patent license to some of the parties receiving the covered work authorizing them to use, propagate, modify or convey a specific copy of the covered work, then the patent license you grant is automatically extended to all recipients of the covered work and works based on it.

A patent license is "discriminatory" if it does not include within the scope of its coverage, prohibits the exercise of, or is conditioned on the non-exercise of one or more of the rights that are specifically granted under this License. You may not convey a covered work if you are a party to an arrangement with a third party that is in the business of distributing software, under which you make payment to the third party based on the extent of your activity of conveying the work, and under which the third party grants, to any of the parties who would receive the covered work from you, a discriminatory patent license (a) in connection with copies of the covered work conveyed by you (or copies made from those copies), or (b) primarily for and in connection with specific products or compilations that contain the covered work, unless you entered into that arrangement, or that patent license was granted, prior to 28 March 2007.

Nothing in this License shall be construed as excluding or limiting any implied license or other defenses to infringement that may otherwise be available to you under applicable patent law. 12. No Surrender of Others' Freedom.

If conditions are imposed on you (whether by court order, agreement or otherwise) that contradict the conditions of this License, they do not excuse you from the conditions of this License. If you cannot convey a covered work so as to satisfy simultaneously your obligations under this License and any other pertinent obligations, then as a consequence you may not convey it at all. For example, if you agree to terms that obligate you to collect a royalty for further conveying from those to whom you convey the Program, the only way you could satisfy both those terms and this License would be to refrain entirely from conveying the Program. 13. Use with the GNU Affero General Public License.

Notwithstanding any other provision of this License, you have permission to link or combine any covered work with a work licensed under version 3 of the GNU Affero General Public License into a single combined work, and to convey the resulting work. The terms of this License will continue to apply to the part which is the covered work, but the special requirements of the GNU Affero General Public License, section 13, concerning interaction through a network will apply to the combination as such. 14. Revised Versions of this License.

The Free Software Foundation may publish revised and/or new versions of the GNU General Public License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns.

Each version is given a distinguishing version number. If the Program specifies that a certain numbered version of the GNU General Public License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that numbered version or of any later version published by the Free Software Foundation. If the Program does not specify a version number of the GNU General Public License, you may choose any version ever published by the Free Software Foundation.

If the Program specifies that a proxy can decide which future versions of the GNU General Public License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Program.

Later license versions may give you additional or different permissions. However, no additional obligations are imposed on any author or copyright holder as a result of your choosing to follow a later version. 15. Disclaimer of Warranty.

THERE IS NO WARRANTY FOR THE PROGRAM, TO THE EXTENT PERMITTED BY APPLICABLE LAW. EXCEPT WHEN OTHERWISE STATED IN WRITING THE COPYRIGHT HOLDERS AND/OR OTHER PARTIES PROVIDE THE PROGRAM “AS IS” WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND, EITHER EXPRESSED OR IMPLIED, INCLUDING, BUT NOT LIMITED TO, THE IMPLIED WARRANTIES OF MERCHANTABILITY AND FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. THE ENTIRE RISK AS TO THE QUALITY AND PERFORMANCE OF THE PROGRAM IS WITH YOU. SHOULD THE PROGRAM PROVE DEFECTIVE, YOU ASSUME THE COST OF ALL NECESSARY SERVICING, REPAIR OR CORRECTION. 16. Limitation of Liability.

IN NO EVENT UNLESS REQUIRED BY APPLICABLE LAW OR AGREED TO IN WRITING WILL ANY COPYRIGHT HOLDER, OR ANY OTHER PARTY WHO MODIFIES AND/OR CONVEYS THE PROGRAM AS PERMITTED ABOVE, BE LIABLE TO YOU FOR DAMAGES, INCLUDING ANY GENERAL, SPECIAL, INCIDENTAL OR CONSEQUENTIAL DAMAGES ARISING OUT OF THE USE OR INABILITY TO USE THE PROGRAM (INCLUDING BUT NOT LIMITED TO LOSS OF DATA OR DATA BEING RENDERED INACCURATE OR LOSSES SUSTAINED BY YOU OR THIRD PARTIES OR A FAILURE OF THE PROGRAM TO OPERATE WITH ANY OTHER PROGRAMS), EVEN IF SUCH HOLDER OR OTHER PARTY HAS BEEN ADVISED OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGES. 17. Interpretation of Sections 15 and 16.

If the disclaimer of warranty and limitation of liability provided above cannot be given local legal effect according to their terms, reviewing courts shall apply local law that most closely approximates an absolute waiver of all civil liability in connection with the Program, unless a warranty or assumption of liability accompanies a copy of the Program in return for a fee.

END OF TERMS AND CONDITIONS How to Apply These Terms to Your New Programs

If you develop a new program, and you want it to be of the greatest possible use to the public, the best way to achieve this is to make it free software which everyone can redistribute and change under these terms.

To do so, attach the following notices to the program. It is safest to attach them to the start of each source file to most effectively state the exclusion of warranty; and each file should have at least the “copyright” line and a pointer to where the full notice is found.

<one line to give the program’s name and a brief idea of what it does.> Copyright (C) <year> <name of author>

This program is free software: you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or (at your option) any later version.

This program is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this program. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.

Also add information on how to contact you by electronic and paper mail.

If the program does terminal interaction, make it output a short notice like this when it starts in an interactive mode:

<program> Copyright (C) <year> <name of author> This program comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details type ‘show w’. This is free software, and you are welcome to redistribute it under certain conditions; type ‘show c’ for details.

The hypothetical commands ‘show w’ and ‘show c’ should show the appropriate parts of the General Public License. Of course, your program’s commands might be different; for a GUI interface, you would use an “about box”.

You should also get your employer (if you work as a programmer) or school, if any, to sign a “copyright disclaimer” for the program, if necessary. For more information on this, and how to apply and follow the GNU GPL, see <http://www.gnu.org/licenses/>.

The GNU General Public License does not permit incorporating your program into proprietary programs. If your program is a subroutine library, you may consider it more useful to permit linking proprietary applications with the library. If this is what you want to do, use the GNU Lesser General Public License instead of this License. But first, please read <http://www.gnu.org/philosophy/why-not-lgpl.html>.

38.2. GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc. <http://fsf.org/>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed. 0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "freeïn the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference. 1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Versionöf the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A SSecondary Sectionïs a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document’s overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The Ïnvariant Sectionsäre certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Textsäre certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent"copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparentïs called Öpaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page"means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page"means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

The "publisher"means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section Ëntitled XYZ"means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as Äcknowledgements", "Dedications", Ëndorsements", or "History".) To "Preserve the Titleöf such a section when you modify the Document means that it remains a section Ëntitled XYZäccording to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License. 2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies. 3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document. 4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

* A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission. * B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement. * C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher. * D. Preserve all the copyright notices of the Document. * E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices. * F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below. * G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document’s license notice. * H. Include an unaltered copy of this License. * I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "Historyïn the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence. * J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "Historyßection. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission. * K. For any section Entitled Äcknowledgementsör "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein. * L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles. * M. Delete any section Entitled Ëndorsements". Such a section may not be included in the Modified Version. * N. Do not retitle any existing section to be Entitled Ëndorsementsör to conflict in title with any Invariant Section. * O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version’s license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled Ëndorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version. 5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "Historyïn the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled Äcknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled Ëndorsements". 6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document. 7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an äggregateïf the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate. 8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled Äcknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title. 9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it. 10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License ör any later versionäpplies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy’s public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document. 11. RELICENSING

"Massive Multiauthor Collaboration Site"(or "MMC Site") means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A "Massive Multiauthor Collaboration"(or "MMC") contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

"CC-BY-SA"means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

Ïncorporate"means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is ëligible for relicensingïf it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing. ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright (C) YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with … Texts."line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

38.3. GNU Lesser General Public License

GNU LESSER GENERAL PUBLIC LICENSE

Version 3, 29 June 2007

Copyright © 2007 Free Software Foundation, Inc. <http://fsf.org/>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

This version of the GNU Lesser General Public License incorporates the terms and conditions of version 3 of the GNU General Public License, supplemented by the additional permissions listed below. 0. Additional Definitions.

As used herein, “this License” refers to version 3 of the GNU Lesser General Public License, and the “GNU GPL” refers to version 3 of the GNU General Public License.

“The Library” refers to a covered work governed by this License, other than an Application or a Combined Work as defined below.

An “Application” is any work that makes use of an interface provided by the Library, but which is not otherwise based on the Library. Defining a subclass of a class defined by the Library is deemed a mode of using an interface provided by the Library.

A “Combined Work” is a work produced by combining or linking an Application with the Library. The particular version of the Library with which the Combined Work was made is also called the “Linked Version”.

The “Minimal Corresponding Source” for a Combined Work means the Corresponding Source for the Combined Work, excluding any source code for portions of the Combined Work that, considered in isolation, are based on the Application, and not on the Linked Version.

The “Corresponding Application Code” for a Combined Work means the object code and/or source code for the Application, including any data and utility programs needed for reproducing the Combined Work from the Application, but excluding the System Libraries of the Combined Work. 1. Exception to Section 3 of the GNU GPL.

You may convey a covered work under sections 3 and 4 of this License without being bound by section 3 of the GNU GPL. 2. Conveying Modified Versions.

If you modify a copy of the Library, and, in your modifications, a facility refers to a function or data to be supplied by an Application that uses the facility (other than as an argument passed when the facility is invoked), then you may convey a copy of the modified version:

* a) under this License, provided that you make a good faith effort to ensure that, in the event an Application does not supply the function or data, the facility still operates, and performs whatever part of its purpose remains meaningful, or * b) under the GNU GPL, with none of the additional permissions of this License applicable to that copy.

3. Object Code Incorporating Material from Library Header Files.

The object code form of an Application may incorporate material from a header file that is part of the Library. You may convey such object code under terms of your choice, provided that, if the incorporated material is not limited to numerical parameters, data structure layouts and accessors, or small macros, inline functions and templates (ten or fewer lines in length), you do both of the following:

* a) Give prominent notice with each copy of the object code that the Library is used in it and that the Library and its use are covered by this License. * b) Accompany the object code with a copy of the GNU GPL and this license document.

4. Combined Works.

You may convey a Combined Work under terms of your choice that, taken together, effectively do not restrict modification of the portions of the Library contained in the Combined Work and reverse engineering for debugging such modifications, if you also do each of the following:

* a) Give prominent notice with each copy of the Combined Work that the Library is used in it and that the Library and its use are covered by this License. * b) Accompany the Combined Work with a copy of the GNU GPL and this license document. * c) For a Combined Work that displays copyright notices during execution, include the copyright notice for the Library among these notices, as well as a reference directing the user to the copies of the GNU GPL and this license document. * d) Do one of the following: o 0) Convey the Minimal Corresponding Source under the terms of this License, and the Corresponding Application Code in a form suitable for, and under terms that permit, the user to recombine or relink the Application with a modified version of the Linked Version to produce a modified Combined Work, in the manner specified by section 6 of the GNU GPL for conveying Corresponding Source. o 1) Use a suitable shared library mechanism for linking with the Library. A suitable mechanism is one that (a) uses at run time a copy of the Library already present on the user’s computer system, and (b) will operate properly with a modified version of the Library that is interface-compatible with the Linked Version. * e) Provide Installation Information, but only if you would otherwise be required to provide such information under section 6 of the GNU GPL, and only to the extent that such information is necessary to install and execute a modified version of the Combined Work produced by recombining or relinking the Application with a modified version of the Linked Version. (If you use option 4d0, the Installation Information must accompany the Minimal Corresponding Source and Corresponding Application Code. If you use option 4d1, you must provide the Installation Information in the manner specified by section 6 of the GNU GPL for conveying Corresponding Source.)

5. Combined Libraries.

You may place library facilities that are a work based on the Library side by side in a single library together with other library facilities that are not Applications and are not covered by this License, and convey such a combined library under terms of your choice, if you do both of the following:

* a) Accompany the combined library with a copy of the same work based on the Library, uncombined with any other library facilities, conveyed under the terms of this License. * b) Give prominent notice with the combined library that part of it is a work based on the Library, and explaining where to find the accompanying uncombined form of the same work.

6. Revised Versions of the GNU Lesser General Public License.

The Free Software Foundation may publish revised and/or new versions of the GNU Lesser General Public License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns.

Each version is given a distinguishing version number. If the Library as you received it specifies that a certain numbered version of the GNU Lesser General Public License “or any later version” applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that published version or of any later version published by the Free Software Foundation. If the Library as you received it does not specify a version number of the GNU Lesser General Public License, you may choose any version of the GNU Lesser General Public License ever published by the Free Software Foundation.

If the Library as you received it specifies that a proxy can decide whether future versions of the GNU Lesser General Public License shall apply, that proxy’s public statement of acceptance of any version is permanent authorization for you to choose that version for the Library.