4. GEOMETRIE 2 - Grundbeziehungen Flächen und Körper (5. - 7. Klasse) 47

4.1 Übersicht **47**
4.2 Planimetrie - Figuren der Ebene (Geraden und Flächen) **49**
4.2.1 Symmetrie (Gleichmaß) 49
4.2.2 Grundkonstruktionen an der Geraden 50
4.2.3 Winkelkunde 51
4.2.4 Dreiecke und Kongruenz 53
4.2.5 Vierecke 55
4.2.6 Vielecke / Polygone → Kreis 57
4.3 Stereometrie - Figuren im Raum (Körper) **59**
4.3.1 Grundbegriffe 59
4.3.2 Quader und Würfel 60
4.3.3 Prisma und Zylinder 61
4.3.4 Pyramide und Kegel 61
4.3.5 Polyeder mit Grenzfall Kugel 62
4.3.6 Konstruktionen und Darstellungen (siehe 6.6 Darstellende Geometrie)

Zielstellung:

1. Erkennen und Begreifen von Figuren (Grundbildern) in der Ebene und im Raum→ umsetzen (transformieren) der Umweltbilder in diese abstrakten (vereinfachten) Formen
2. Alle Grundfiguren (außer *allgemeine* Figur) setzen sich aus ihren symmetrisch zueinanderliegenden Bestandteilen (Punkte, Geraden, Kreisbogen) zusammen (Eigensymmetrie).
3. Die Symmetrie (Gleichmaß) ist Grundgedanke der Konstruktion und des Vergleichs von Flächen- und Körperbildern (Projektionen: Abbilder von Originalen)
4. Der Symmetriebegriff ist nicht nur auf kongruente Figuren anzuwenden!
5. Konstruiert wird mit Lineal (Gerade), Zirkel (Kreis), Winkelmesser (Schenkelpaar) Zeichendreiecken (Parallelverschiebung) und speziellen Kurvenschablonen.
6. Es gibt konstruktive und rechnerische (algebraische) Lösungen (Funktion bzw. Formel)

4.1 Übersicht

→ Projektion (Abbild) über symmetrische Beziehungen: **Konstruktion**
Grundelement: **Punkt** → symmetrische Abbildung → **Grundfiguren** (s. S. 22)

Kreissymmetrie (Rotation) | **Geradesymmetrie** (Translation)

Drehung (Radial-/**Zentralsymmetrie**): Punkte auf Radius / *Zentralstrahl* um gleichen Winkel gedreht (1 Sicht)
Umklappung (**Axialsymmetrie**): Raumdrehung um 180° von Vorder- zu Rückansicht (2 Ansichten)

Verschiebung: Punkte auf *Parallelstrahlen* um gleichem Abstand verschoben (1 Sicht)
z.B. ***senkrechte Parallelprojektion*** zwischen 2 parallelen Ebenen
schräge Parallelprojektion Abbildungsebene liegt schräg (Schrägbild)

↓

Strahlensymmetrie
Zentrische Streckung (***Zentralprojektion*** / **Zoomen**, Zentrum im Objektmittelpunkt, perspektivische Bilder): Punkte auf *Zentral*strahlen in gleichen Proportionen *verschoben.*

Eigensymmetrie: Symmetrie einer Figur, ihrer Bestandteile (Seiten, Kanten) zueinander
Techn. Zeichnung: Je nach Kompliziertheit des Objektes werden 1 - 5 Perspektiven (Ansichten) im n-Tafelbild dargestellt

Planimetrie: Figuren einer Ebene (2 Dimensionen → 2-Koordinatensystem)

Punktprojektionen:

1. **Gerade**: (Linie) durch stete Verschiebung des Punktes in eine Richtung
   Strahl : Gerade mit Anfangspunkt (und damit Richtungsvorgabe!)
   Strecke: Teilabschnitt einer Geraden
2. **Kurve** : Durch stete Verschiebung (Aneinanderreihen) und Drehung (Winkel)
   Achtung: im Funktionsgraf wird die Gerade auch als Kurve bezeichnet!

Geschlossene Figuren:

3. **Polygone** (viel -winklige Figuren): Vielecke (n-Ecks) mit geradlinigen Seiten
4. **Kreis** durch einmalige Verschiebung(Radius) und stete Drehung des Punktes
   bzw. extremes gleichmäßiges Vieleck (Polygon) mit unendlich vielen „Ecken“

Geradenprojektionen (ergeben die Figurenseiten von n-Ecks / Polygonen):

Dreiecke: 1. *Allgemeines Dreieck* (alle Seiten bzw. Winkel verschieden)
2. *Gleichschenkliges Dreieck* (2 gleiche Seiten und 2 gleiche Winkel)
3. *Gleichseitiges Dreieck* (3 gleiche Seiten und 3 gleiche Winkel)
4. *Rechtwinkliges Dreieck* (1 rechter Winkel, beide anderen ergeben 90°)

Vierecke: 1. *Allgemeines Viereck* (alle Seiten und Winkel verschieden)
2. *Drachenviereck* (je 2 Schenkel sind gleichlang)
3. *Trapez* (nur 2 Seiten parallel und verschieden lang)
4. *Parallelogramme* (je 2 Seiten parallel durch Parallelverschiebung):
   a) *Rechteck* und *Quadrat* (4 gleiche Seiten) → alle Winkel 90°
   b) *Parallelogramm* und *Rhombus*, schräges Rechteck und Quadrat
   → je 2 gleiche gegenüberliegende Winkel

regelmäßige Polygone (gleichseitige n-Ecke):
→ die Seiten sind aneinander gedrehte Sehnen eines Umkreises
wie **Pentagon** (5-Eck), **Hexagon** (6-Eck)

Übergang → **Kreis** (∞-„Eck“, Seitenlänge wird zu Null, die Strecke zum Punkt)

Stereometrie: Räumliche Figuren (besonders Körper, 3 Ebenen - 3 Dimensionen)

	Polyeder (nur ebene Flächen)				**Rotationskörper** (gekrümmte Flächen)	
Parallelkörper:	**Prismen** (griech. Das Gesägte)				**Zylinder**	
Grund-/Deckfläche:	kongruente n-Ecke				kongruente Kreise, Ellipsen	
	rechtwinklig		schräg		rechtwinklig	schräg
	allgemein	gleichseitig	allgemein	gleichseitig		
	Quader	**Würfel**	**Spat**			
	Seiten sind:				Mantel ist:	
	Rechtecke	Quadrate	Parallelogramme	Rhomben (Rauten)	Rechteck	Parallelogramm
Spitzkörper:	**Pyramide**				**Kegel**	
Regelmäßige Körper:	(nur 5)				(nur einer)	
	z.B. **Tetraeder**: Pyramide mit 4 gleichseitigen Dreiecken				**Kugel**	
	Hexaeder: (**Würfel**) mit 6 Quadraten					

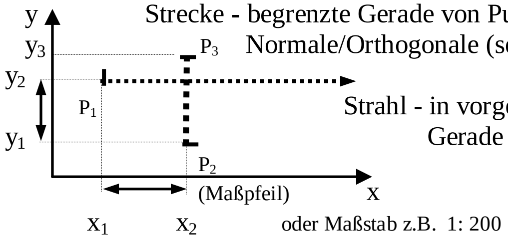
(alle Seitenflächen sind kongruente gleichseitige 3-, 4- oder 5-Ecke)

4.2 Planimetrie - Flächenmessung: Figuren der Ebene im x - y -Diagramm

Begriffswiederholung aus Geometrie 1 (Abschnitt 2):
Gerade, Strahl, Strecke, Kurve → Punktprojektionen, aneinandergereihte Punkte
Senkrecht (normal, orthogonal), parallel, schräg → Winkellage zweier Geraden

Maßdarstellungen im x-y-Koordinatensystem (rechnerisch Funktionssystem):

Strecke - begrenzte Gerade von Punkt $P_2(x_2, y_1)$ bis $P_3(x_2, y_3)$, hier gleichzeitig Normale/Orthogonale (senkrechte Gerade) zum Strahl



Strahl - in vorgegebener Richtung weiterführende Gerade mit Anfangspunkt $P_1(x_1, y_2)$

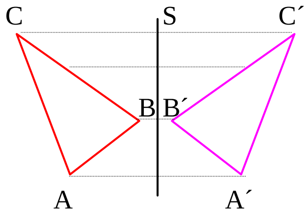
Für spätere Berechnungen mit Geradengleichungen (lineare Funktionen) wird auch die Gerade unter dem Oberbegriff Kurve verstanden.
Alle Abbildungen (Konstruktionen) auf dem Papier stehen in einem bestimmten Größenverhältnis (Proportion) zur Wirklichkeit. Werden keine einzelnen ***Bemaßungen*** (Maßpfeile siehe Diagramm) vorgenommen, muss der ***Gesamtmaßstab*** als Teilerverhältnis angegeben werden. Als Zähler (1. Wert) steht dabei immer die Größe der Zeichnung, z.B.1 : 200 (1 cm der Zeichnung « 200 cm des Originals, des realen Objektes) oder 25 : 1 (die Zeichnung ist 25fach größer als ein kleines Objekt). Konstruktionszeichnungen werden bemaßt, bei technischen Projektionen und Landschaftskarten wird der Maßstab angegeben.

4.2.1 Symmetrie (Gleichmaß der Abbildung, regelmäßig)

Symmetrie besteht zwischen einem ***Objekt*** (Originalbild) und seiner ***Projektion*** (Abbild), wenn zwischen beiden gleiche Maße (Kongruenz) oder Verhältnisse (Proportionen → Vergrößerung/ Verkleinerung) vorliegen. Das Abbild wird dabei durch ***Drehung***, ***Umklappung*** (Kreissymmetrie), durch ***Verschiebung*** (Geradesymmetrie) oder deren Kombination ***Zentralprojektion*** (Strahlensymmetrie) konstruiert.
Eigensymmetrie („Formsymmetrie“) ist das Gleichmaß zwischen den Konturen (Aussenlinien) einer Figur.

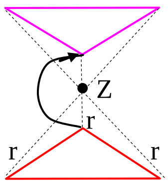
Kreissymmetrie

Umklappung:
Eine Figur wird an der Symmetrieachse S umgeklappt, genau wie eine Seite umgeblättert wird. Sie beschreibt dabei aus der Ebene heraus eine räumliche Drehung von 180°. Gleiche Figurenpunkte haben den gleichen Abstand zur Achse, deshalb spricht man von der *Achsensymmetrie* oder kurz ***Axialsymmetrie***.
Konstruiert wird die Abbildung über das lotrechte (senkrechte) Abtragen der Eckpunkte mit beidseitig gleichem Abstand zur Symmetrieachse.



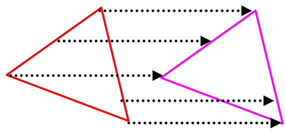
Spiegelung: Falscher Begriff für Umklappung, da ein Spiegelbild das Negativbild der Originalsicht (Vorderseite) zeigt, das Umklappen aber eine weitere Sicht (Rückseite).
Echte Spiegelbilder gibt es nur im Spiegel, wobei sich alles umkehrt: Oben wird unten oder links wird rechts (je nach Lage der Spiegelachse z.B. Spiegelschrift).

Drehung:
Eine Figur wird in der Ebene starr um ein Symmetriezentrum Z (Fest-/Fixpunkt, Zentralpunkt) gedreht. Gleiche Figurenpunkte haben dabei den gleichen Drehwinkel zurückgelegt.
Das Abbild kann also durch Rückdrehung mit dem Original zur Deckung (Kongruenz) gebracht werden. Es besteht ***Zentralsymmetrie***.
Konstruiert wird das gedrehte Abbild, indem alle Eckpunkte mittels Zirkelspanne r (Radius) um den gleichen Winkel gedreht und wieder verbunden werden, deshalb auch der 2. Begriff ***Radialsymmetrie***.
Das Bild zeigt die 180° Drehung, oft fälschlich als Punktspiegelung am Zentralpunkt bezeichnet. Eine Spiegelung kommt aber immer nur durch Parallelstrahlen an einer Spiegelfläche zustande. Hier sind es aber Zentralstrahlen!



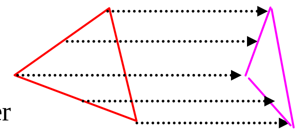
Geradesymmetrie (Parallelstrahlen)

Verschiebung (konkreter Parallelverschiebung):
Eine Figur wird in gerader Linie verschoben. Alle Figurenpunkte legen dabei parallel die gleiche Strecke zurück.
Konstruiert wird mit 2 Zeichendreiecken oder 1 Dreieck und 1 Lineal, an welchem das Zeichendreieck entlanggeführt wird. Es können die Eckpunkte oder gleich die Seiten aneinandersetzend verschoben werden.



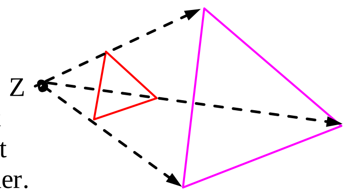
Senkrechte Parallelprojektion: Für eine räumliche Betrachtung stellt man sich 2 zueinander parallele Ebenen vor. Ein Objekt wird verzerrungsfrei im rechten Winkel auf die Leinwand projiziert (kongruent abgebildet).

Schräge Parallelprojektion:
Die Originalebene (rot) und die Abbildungsebene (lila) liegen auf gleicher Höhe, sind jedoch schräg zueinander.
Räumlich gesehen wird das Objekt schräg auf die Leinwand über einen bestimmten *Verzerrungswinkel* projiziert. Das Abbild ist nicht kongruent.



Strahlensymmetrie (Zentralstrahlen)

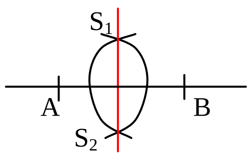
Zentrische Streckung / ***Zentralprojektion*** (Zoomen):
Eine Figur wird in gleichen Verhältnissen (Proportionen) vergrößert oder verkleinert. Werden bei räumlicher Vorstellung alle Punkte der Figur auf ihren Zentralstrahlen gleichweit verschoben, so nennt man es zoomen. Der Zentralpunkt Z liegt dabei genau im Figurenzentrum. Eine Kamera zoomt ihre Bilder.



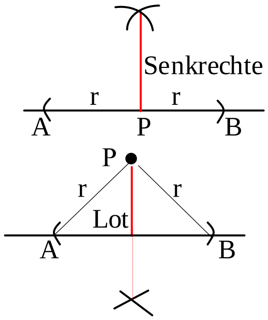
4.2.2 Grundkonstruktionen an der Geraden

Mittelsenkrechte errichten bzw. ***Strecke halbieren***:

Mit gleicher Zirkelspanne wird um die Streckenpunkte A und B jeweils ein Kreisbogen mit einem Radius größer als die halbe Strecke gezogen, die die Schnittpunkte S_1 und S_2 ergeben. Diese beiden Punkte liegen gleichweit von A bzw. B entfernt und bilden somit genau die Mitte. Nun kann die *Mittelsenkrechte* (rot) gezogen oder auch nur die Streckenmitte markiert werden. Betrachten wir die beiden Streckenhälften oder die Punkte A und B im Bezug auf die Mittelsenkrechte als Achse, können wir eine genaue Umklappung erkennen. Diese Lagebeziehung wird deshalb ***Axialsymmetrie*** genannt.

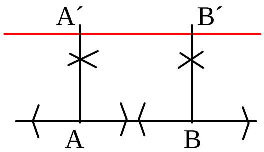


Senkrechte errichten bzw. ***Lot fällen*** auf eine Gerade:

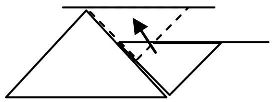


Es ist die exakt gegenteilige Konstruktion. Das Ergebnis ist jedoch wiederum die Senkrechte (rot). Man spricht von der Senkrechten, wenn der gegebene Punkt P auf der Geraden liegt und vom Lot, wenn er darüber liegt. Gleichfalls mit dem gleichen Radius (Kreisbogen) werden hier aber erst die Streckenpunkte A und B konstruiert. Von A und B aus kann nun der jeweils benötigte 2. Punkt der Senkrechten bzw. des Lotes konstruiert werden.

Parallele ziehen:



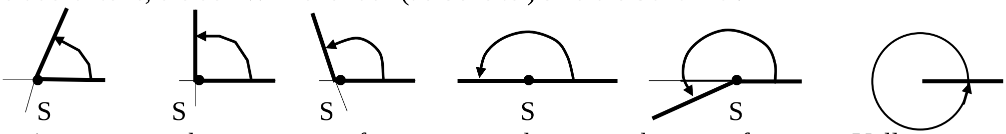
Im Normalfall genügen 2 aneinandergelegte Zeichen-Dreiecke, wovon eins an der Geraden ausgerichtet wird und am anderen Dreieck entlang verschoben wird. Mit Zirkel und Lineal werden in 2 Punkten (A, B) der Geraden wie oben beschrieben die Senkrechten errichtet und auf beiden Senkrechten der benötigte Abstand (Punkte A´ und B´) abgetragen. Nun kann die Parallele (rot) gezogen werden. Haben beide Geraden die gleiche Länge (Strecke), so ist die Parallele ein genaues Abbild (Projektion) der Ausgangsgeraden oder die ***Parallelverschiebung*** davon.



Befinden sich beide exakt gegenüber, wird von der *senkrechten Parallelprojektion* gesprochen, beim Verschieben mit 2 Zeichendreiecken kommt die *schräge Parallelprojektion* heraus.

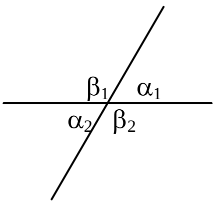
4.2.3 Winkelkunde (Goniometrie bzw. Trigonometrie am Dreieck)

Von 2 sich überlagernden Geraden wird eine um einen Drehpunkt (**Scheitelpunkt S**) herum aufgeklappt und beschreibt im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) bis zur erneuten Überlagerung einen Vollkreis. Die Größe der Öffnung ist der **Winkel**. Die Geradenanteile, die den Winkel bilden (ab Scheitel) sind die **Schenkel**.

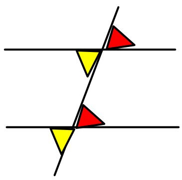


spitzer q | rechter q | stumpfer q | gestreckter q | überstumpfer q | Voll-q

Winkelpaare:



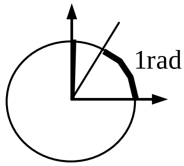
1. An 2 Schnittgeraden:
   Scheitelwinkel: Die dem Scheitel S gegenüberliegenden Winkel $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ sind jeweils gleich groß.
   Nebenwinkel: Die jeweils auf einer Seite einer Geraden neben-einanderliegenden ¨, die sich zum gestreckten ¨ ergänzen $\alpha_1+\beta_1$, $\alpha_2+\beta_2$, $\alpha_2+\beta_1$, $\alpha_1+\beta_2$ → = 180°



2. An geschnittenen Parallelen:
   Eine unnütze Wortvielfalt wird durch die Unterscheidung der ***Scheitelwinkel*** zwischen beiden Parallelen vorgenommen, denn alle 4 Scheitelwinkel sind gleich durch die Parallelverschiebung.
   Scheitelwinkel einer Seite (Stufe) → *Stufenwinkel* (rot bzw. gelb)
   Scheitelwinkel der Gegenseiten → *Wechselwinkel* (rot - gelb)

Winkelmaße:

Der Winkelmesser stammt vom griech. Astrolabium, dem astronomischen Ring ab, mit dem schon in Vorzeiten die Sterne vermessen wurden. Abweichungen bei solch großen Entfernungen sollten registrierbar sein. Das Winkelgrundmaß 1° wurde deshalb im Vergleich mit der Stunde noch einmal in Minuten und Sekunden unterteilt. Von der Skaleneinteilung passten deshalb nur noch 360° auf den Ring, welches auch heute das gültige Maß für einen Vollkreis ist. Der Versuch des Neugrades, den Vollkreis mit 400° zu definieren, hat sich nicht durchgesetzt.

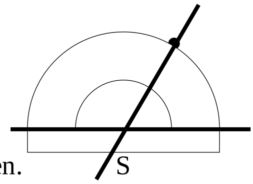


Anstelle des ***Gradmaßes*** kann auch sein ***Bogenmaß*** eingesetzt werden. Das Bogengrundmaß ist 1 rad (Radiant). Es ist jener Kreisbogen, der gleichgroß dem Radius ist und entspricht ca. 57°, exakter 57°(Grad) 17´(Minuten) und 45´´(Sekunden) → 57°17´45´´ « 1 rad .
Da das Bogenmaß Teil des Kreisumfangs 2àr ist, entspricht es bei einem Vollkreis 2àr rad. Zur Vereinfachung spricht man von einem ***Einheitskreis*** mit dem Radius r = 1 LE (1 Längeneinheit, egal ob cm, dm oder m), so dass der Radius entfällt. Der Vollkreis hat damit das Bogenmaß 2à rad und für bestimmte Winkel ergeben sich einfache Maße (die Bogeneinheit rad wird oft auch weggelassen):

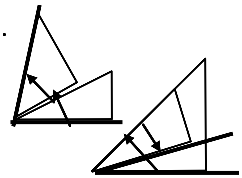
Winkelart	spitz			rechter	stumpf	gestreckter	über-stumpf	Vollwinkel
Gradmaß	30°	45°	60°	90°	<	180°	<	360°
Bogenmaß	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad		π rad		2π rad

Winkelkonstruktionen:

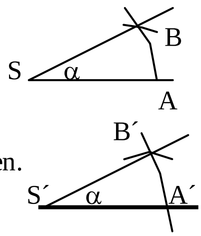
Mit *Winkelmesser* und *Lineal*:
Zuerst wird eine Gerade gezeichnet und ein Scheitelpunkt S markiert. An diesem setzt die Mittelmarke des Winkelmessers an. Nach Ausrichtung an der Geraden wird der Winkel markiert. Durch diesen Punkt und den Scheitelpunkt wird der 2. Schenkel gezogen.



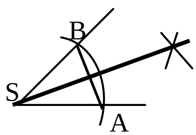
Mit *Zeichendreiecken*:
Die handelsüblichen Dreiecke haben die Winkel 30°, 45°, 60° und 90°. Diese können direkt an ihren Schenkeln entlang gezogen werden. Durch Aneinanderlegen (Summe) oder Ineinanderlegen (Differenz) können weitere sich daraus ergebende Summen- und Differenzwinkel gezogen werden z.B. 30°+45° = 75° oder 45°– 30° = 15°.



Mit *Zirkel* und *Lineal*:
Dies ist nur möglich für ein gezeichnetes Schenkelpaar, das kopiert werden soll. Ein Kreisbogen um S markiert die Punkte A und B darauf. Ein neuer Schenkel mit Scheitelpunkt S´ wird gezeichnet. Um S´ wird der gleiche Kreisbogen gezogen, der A´ ergibt. Die vorgegebene Schenkelöffnung AB wird mit dem Zirkel abgenommen und in A´ auf dem Kreisbogen abgetragen. Durch diesen Schnittpunkt B´ wird von S´ aus der 2. Schenkel gezeichnet.

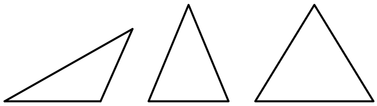


Winkelhalbierung:
Vom Scheitel S werden mit gleichem Radius (Kreisbogen) die Punkte A und B der beiden Schenkel markiert. Von diesen beiden aus wird nun die Mittelsenkrechte errichtet, die den Winkel halbiert. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ ist also die ***Winkelhalbierende***.



4.2.4 Dreiecke

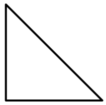
Einteilung:



Dreiecke nach Gleichheit der Seiten: a b c

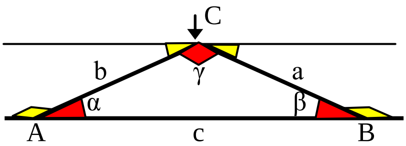
a) ***Allgemeines*** Dreieck (alle 3 Seiten ungleich, damit auch alle Winkel)
b) ***Gleichschenkliges*** Dreieck (2 gleiche Seiten, die Schenkel, 2 gleiche W.)
c) ***Gleichseitiges*** Dreieck (alle 3 Seiten gleich, damit alle Winkel 60°)

Nach Winkeln:
Nur ***Rechtwinkliges*** Dreieck (spezielle, einfachere Formeln!)



Ein anderes Unterscheidungsmerkmal (Kriterium) gibt es hier nicht! Spitze Winkel können alle 3 oben genannten Dreiecke haben. Ein stumpfer Winkel bedeutet gleichzeitig 2 spitze Winkel. „Schiefwinklig" (schräg) als Gegenteil von rechtwinklig würde wiederum spitz- und stumpfwinklig zusammenfassen! Schiefwinklig werden nur Vierecke → Parallelogramme.

Grundbeziehungen:



Stellt man sich ein vollkommen flachgedrücktes Dreieck vor, begreift man am schnellsten seine Winkel- und Seitenverhältnisse.
Die Winkel α+β gehen mit ihrer Summe auf 0° zu, während der 3. Winkel γ zum gestreckten mit 180° wird (rot). Wird am Punkt C das Dreieck nach oben gezogen und die Seite c verkleinert, wird γ zu 0° und α sowie β zu je 90° (2 mal rechter Winkel).
Daraus folgt:

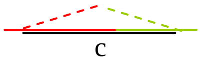
***Die Summe aller Innenwinkel ist stets gleich* 180°**.

<u>Spezialfälle</u>: Da die Seiten und ihre zugehörigen Winkel gleiche Verhältnisse haben gilt:
Gleichschenkliges Dreieck - beide äußeren Schenkelwinkel sind gleich (hier Ñ und Ò).
Gleichseitiges Dreieck - alle 3 Winkel sind gleich und damit 60°

Die Nebenwinkel von α und β werden jeweils zum gestreckten Winkel (2 mal 180°), während der geteilte Nebenwinkel von γ auf 0° zugeht (gelb). Daraus folgt:

***Die Summe aller Außenwinkel ist stets gleich* 360°**.

Wird der Innenwinkel γ zu 180°, bilden seine 2 ausgestreckten Schenkel, die Seiten a und b, eine Gerade, deren Gesamtlänge a+b immer größer als die Grundseite c ist. Beide Geraden liegen jetzt aufeinander und das Dreieck verschwindet. Würden die 2 Seiten kürzer sein als die Grundseite, könnten sie nicht über dieser dritten Seite zum Dreieck hochgezogen werden. Allgemein gilt also: $a + b > c$



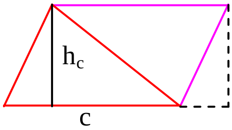
Im Dreieck ist die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite.

<u>**Kongruenz** oder Deckungsgleichheit</u>:

Der deutsche Begriff Deckungsgleichheit von Dreiecken drückt bereits das Wesen dieses Vergleiches aus. Nur Dreiecke, die in allen 3 Seiten (und damit logischerweise in allen 3 Winkeln) übereinstimmen, lassen sich auch deckend übereinanderschieben, drehen oder umklappen.
Die ***Kongruenzsätze*** ergeben keinen praktischen Sinn. Inhaltlich sind es aber die Konstruktionsbedingungen, denn es müssen immer 3 Werte bekannt sein (siehe Konstruktion)!

Flächenberechnung:

Jedes Dreieck (rot) kann als Hälfte eines Parallelogramms (rot-lila) aufgefasst werden. An jedem Parallelogramm kann ein Dreieckzipfel (links von h_c) abgeschnitten und gegenüber angefügt werden zum flächengleichen Rechteck. Die Fläche A



des Rechtecks ist aber das Produkt der beiden Seiten, hier $A = c \cdot h_c$, also 1 Seite mal ihre zugehörige Höhe. Damit ergibt sich für das Dreieck als halbes Parallelogramm:

$\boxed{A = \frac{1}{2}\, a \cdot h_a = \frac{1}{2}\, b \cdot h_b = \frac{1}{2}\, c \cdot h_c}$ mit daraus sich ergebender Grundeinheit mEm = m^2

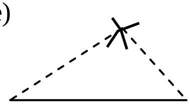
Verkleinerungen sind z.B. $cm^2 = (c \cdot m)^2 = c^2 \cdot m^2 = \frac{1}{100^2}\, m^2$

Vergrößerungen $Km^2 = K^2\, m^2$ (siehe Abschnitt 1.4 Größen!)

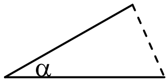
Konstruktionen:

Ein Dreieck wird mittels der elementaren Konstruktionen an Geraden (4.2.2) und von Winkeln (4.2.3) gezeichnet. Es müssen stets ***3 Werte*** gegeben sein:
3 Seiten oder 2 Schenkel und ihr Winkel oder 1 Seite und ihre 2 anliegenden Winkel.

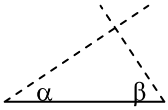
a) 3 Seiten:
Mit Lineal 1 Seite zeichnen - mit Zirkel nacheinander den Betrag (Länge) der beiden anderen Seiten einstellen und von den Eckpunkten je einen Kreisbogen schlagen. Der Schnittpunkt ist der 3. Punkt des Dreiecks. Von diesem werden nun die beiden anderen Seiten gezogen.



b) 2 Schenkel und 1 Innenwinkel:
Mit Winkelmesser und Lineal die 2 Schenkel konstruieren (4.2.3).
Die 3. Seite ergibt sich als Verbindung der beiden Schenkelendpunkte.



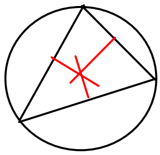
c) 1 Seite und 2 anliegende Winkel:
Die Seite mit Lineal zeichnen. Von beiden Eckpunkten aus mittels Winkelmesser die anliegenden 2 Winkel markieren und die 2 Geraden ziehen. Diese treffen sich im 3. Eckpunkt des Dreiecks.



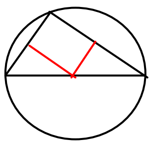
<u>Höhenkonstruktion</u>: Sie ist das von der Spitze gefällte Lot (siehe 4.2.2)

<u>Besondere Geraden und ihr Schnittpunkt</u>:

<u>M</u>ittelsenkrechte und ihr ***U<u>m</u>kreis***

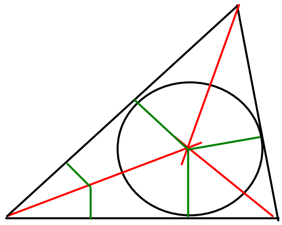


Beim Errichten einer Mittelsenkrechten mit der *gleichen* Zirkelspanne von den beiden Eckpunkten aus ist erkennbar, dass auch alle anderen Punkte auf dieser Senkrechten von den Eckpunkten gleichweit entfernt liegen müssen. Werden alle 3 Mittelsenkrechten der Seiten errichtet, so ist deren Schnittpunkt logischerweise auch gleichweit (mittig) von allen Eckpunkten entfernt. Er ist damit der Mittelpunkt für einen Kreis, auf dem die Eckpunkte liegen. Das Dreieck liegt also innerhalb seines Umkreises. Eine gute Eselsbrücke für den Zusammenhang von Mittelsenkrechten und Umkreis ist das „<u>m</u>" in beiden Begriffen.



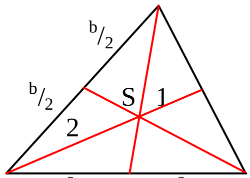
Bildet eine Seite den Durchmesser des Umkreises, dann ist ihre Mitte der Mittelpunkt und die beiden anderen Mittelsenkrechten treffen sich in diesem senkrecht. Es entsteht ein Rechteck und das Dreieck ist ein rechtwinkliges (Beweis für ***Satz des Thales*** 6.3.1).

Winkelhalbierende und ihr ***Innenkreis***



Da die Winkelhalbierende (rot) ständige Mitte bzw. Symmetrieachse zu ihren beiden Schenkeln (Seiten) ist, ist auch das vom jeweiligen Punkt der Halbierenden gefällte Lot (grüne Senkrechte) auf die 2 Seiten immer gleich groß. Mit Entfernung vom Scheitel (Eckpunkt) wird auch das beidseitige Lot größer.
Werden alle 3 Winkelhalbierenden konstruiert, so treffen sie sich logischerweise in dem Punkt des gleichzeitig größtmöglichsten Lotes zu allen 3 Seiten. Von diesem Schnittpunkt besteht also ein gleicher senkrechter Abstand (Radius) zu den 3 Seiten und bildet damit den Mittelpunkt M des Innenkreises. Als Eselsbrücke dient hier die Silbe „in" in beiden Begriffen.

Seitenhalbierende und der ***Schwerpunkt***:

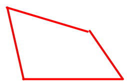


Unter dem Schwerpunkt eines Körpers versteht man seinen Massenmittelpunkt, in dem man sich die gesamte Masse konzentriert vorstellen kann. An diesem Punkt muss auch die Kraft angreifen, wenn die Grundformeln der Physik gelten sollen.
Die Seitenhalbierende wird, wie der Name sagt, von der Seitenmitte zum gegenüberliegenden Eckpunkt gezogen. Alle 3 Halbierenden ergeben einen Schnittpunkt, der nach den späteren Strahlensätzen beweisbar diese 3 Geraden von den Eckpunkten her genau im Verhältnis 2:1 teilt. Um diesen Punkt herum sind die Geradenanteile also abwechselnd mit $^2/_3$ und $^1/_3$ proportional gleichmäßig verteilt und damit auch die gegenseitigen Flächenanteile. Im Schwerpunkt S heben sich die Flächenanteile auf. Ein in diesem Punkt unterstütztes Dreieck würde nicht wegkippen.

4.2.5 Vierecke:

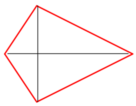
Einteilung:

1. *Allgemeines Viereck*



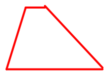
alle Seiten und Winkel sind verschieden

2. *Drachenviereck*



je 2 Schenkel sind gleichlang

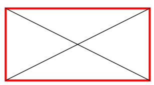
3. *Trapez*

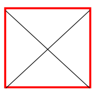


nur 2 Seiten sind parallel und ungleich

4. *Parallelogramme* (je 2 parallele gleichlange Seitenpaare und gleiche Winkelpaare)

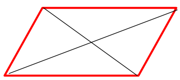
a) *Rechteck* und *Quadrat*
4 gleiche Seiten

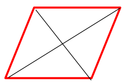




alle Winkel 90°

b) *Parallelogramm* (Paralleloid) und *Rhombus* (Raute)
4 gleiche Seiten





je 2 gleiche gegenüberliegende Winkel

Symmetrieeigenschaften:

Durch das Einzeichnen der ***Diagonalen*** zwischen gegenüberliegenden Eckpunkten erkennt man am besten Symmetrie, Kongruenz und andere Verhältnisse.
Bei allen 4 Parallelogrammarten ist der Schnittpunkt das Symmetriezentrum für eine 180° Drehung, um das Objekt wieder zur Deckung zu bringen. Dies kann das gesamte Viereck oder die

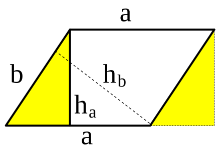
durch die Diagonalen entstehenden jeweils 2 kongruenten bzw. beim Quadrat und Rhombus die 4 kongruenten Dreiecke sein.
Bei Rechteck und Quadrat sind die Mittelsenkrechten außerdem Symmetrieachse für eine Umklappung.
Beim Drachenviereck ist die längere Diagonale die Symmetrieachse für eine Umklappung kongruenter Dreiecke.

Größenverhältnisse:

In allen Parallelogrammarten sind gegenüberliegende Seiten und Winkel gleich groß.
Da die Summe aller 4 Innenwinkel 360° (1 Umlauf) beträgt und die gegenüberliegenden gleich sind, müssen logischerweise je 2 benachbarte Winkel immer 180° ergeben.
Die beiden Diagonalen halbieren sich jeweils. Im Rechteck und Quadrat sind sie gleichlang, im Quadrat und Rhombus sind sie zugleich Winkelhalbierende, stehen zusätzlich senkrecht aufeinander und bilden dadurch die 4 kongruenten Dreiecke.

Flächenberechnungen:

Durch die Symmetrie der Schrägflächen wird das Parallelogramm zum Rechteck und der Rhombus zum Quadrat zurückgeführt. Hierbei wird erkennbar, dass die jeweilige Höhe die 2. Seite der Flächenberechnung von Rechteck bzw. Quadrat darstellt:

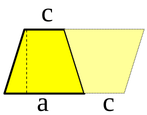


Parallelogramm: $\boxed{A = a \cdot h_a = b \cdot h_b}$

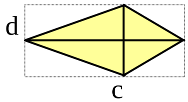
Rechteck : $\boxed{A = a \cdot b}$

Quadrat: $\boxed{A = a \cdot a = a^2}$

Trapez: Flächenmäßig ein halbes Parallelogramm aus dem Produkt Grundlinie a+c mal Höhe $\boxed{A = ½\,(a+c) \cdot h}$



Drachenviereck: Die Fläche (gelb) ist die Hälfte des umschreibenden Rechteckes, welches durch die Dopplung der 4 rechtwinkligen Dreiecke entsteht. Die Seiten des Rechtecks sind die 2 Diagonalen, wodurch die Dreiecke entstehen. $\boxed{A = ½ \cdot c \cdot d}$



Konstruktion:

Da jedes Viereck durch eine Diagonale (Verbindung der 2 Gegenwinkel) in 2 Dreiecke geteilt wird, kann über diese Diagonale auch ein Viereck als Konstruktion von 2 Dreiecken erzielt werden (siehe dort). Die Diagonale ist dabei die Grundlinie der beiden Dreiecke. Bei allen 4 Parallelogrammarten ist man mit gegebenen Seiten jedoch über die Parallelverschiebung mittels zweier Zeichendreiecke schneller.

Benötigte Werte Z:

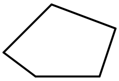
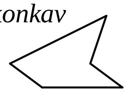
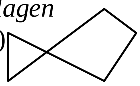
Quadrat	1	1 Seite	Rhombus	2	1 Seite und 1 Winkel
Rechteck	2	2 Seiten	Parallelogramm	3	2 Seiten und 1 Winkel

Trapez 4 4 Seiten oder 1 Schenkel + 2 Parallele + 1 Winkel
Allg. Viereck 5 3 Werte für 1. Dreieck, für 2.Dreieck nur noch 2 Werte, da Diagonale Grundlinie beider Dreiecke ist.

4.2.6 Polygone - Vielecke (n-Ecke, Ecke als Deutung für Winkel gonio)

Allgemeine Vielecke:

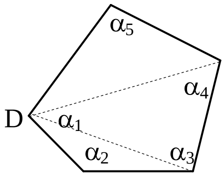
Vielecke sind geschlossene ebene Figuren mit geradlinigen Seiten und sich entsprechend ergebenden Eckpunkten. Beide Anzahlen stimmen überein, namentlich werden jedoch die Ecken gezählt. Die kleinsten Vielecke, die Dreiecke und Vierecke wurden in 4.2.4/5 bereits gesondert und tiefergehend behandelt. Nach der äußeren Form werden sie in

konvex  *konkav*  und *überschlagen* (Sonderform)  eingestuft.

(nach außen gewölbt) alles Außenecken — (nach innen gewölbt) mindestens 1 Innenecke — Seiten kreuzend

Anzahl der Diagonalen:
Von einer Ecke gehen die Diagonalen zu gegenüberliegende Ecken. Die Bezugsecke und ihre 2 benachbarten, zu denen 2 Seiten gehen, werden daher beim Zählen ausgeschlossen (n–3). Dies gilt für alle folgenden Ecken nE(n–3), jedoch ergibt sich dabei die doppelte Anzahl, da die Diagonalen zu den Gegenecken bereits gezeichnet sind, damit $\boxed{x = \frac{n\cdot(n-3)}{2}}$

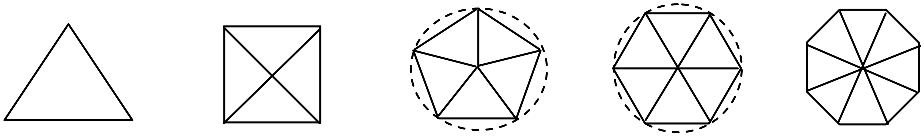
Innenwinkelsumme:
Ausgehend von einem Dreieck ergibt sich das nächstgrößere Vieleck (Viereck, Fünfeck...) immer durch das Anlegen eines weiteren Dreiecks an einen Drehpunkt D mit einer gleichlangen Seite, die zur Diagonalen werden. 2 Dreiecke ergeben so ein Viereck mit einer Diagonalen, 3 Dreiecke ergeben 2 Diagonalen usw. Die Innenwinkelsumme wird mit jedem Dreieck um 180° erweitert. Damit ergibt sich für ein n-Eck:



$\boxed{\alpha_{ges} = (n-2) \cdot 180°}$

Regelmäßige konvexe (außengewölbte) ***Vielecke***:

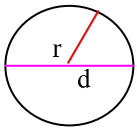
Regelmäßige Vielecke sind ***gleichseitige*** n-Ecke. Ab dem 4-Eck bedeutet das zusätzlich zentralsymmetrisch angeordnete n-fache gleichschenklige Dreiecke.



gleichseitiges Dreieck — Quadrat — Fünfeck — Sechseck — Achteck

→ Beim Extremfall, dem „∞(Unendlich) -Eck“, wird die Seitenlänge zu Null

→ Es entsteht der **Kreis**:
Mit dem Durchmesser d = 2 r (doppelter Radius) und der Kreiszahl π werden ermittelt:

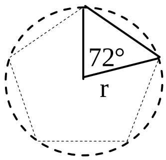


Umfang (Kreislinie, Kreisbogen 2πr für 360°) $\boxed{U = \pi \cdot 2\,r = \pi \cdot d}$

Fläche (in r^2 [m^2] erkennt man die Fläche) $\boxed{A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{2^2}}$

Konstruktion:

Wie oben zu erkennen, ist die Schenkellänge der *gleichschenkligen Dreiecke* gleichzeitig der Radius des Umkreises. Für die Konstruktion dieser Dreiecksart wird als Angabe nur 1 Schenkel und dessen Innenwinkel benötigt.
Für das *n-Eck* entfällt auch noch die Angabe des Winkels, da dieser ermittelt ist mit dem Vollwinkel 360°: n, beim 5-Eck also 360° : 5 = 72°.



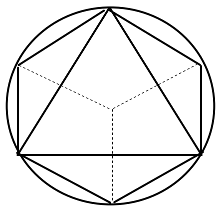
Mit dem Schenkelwert = Radius wird der Umkreis gezogen und aller 72° der Kreis markiert. Dies kann über die um 72° versetzten einzelnen Schenkel geschehen oder es werden nur 2 Schenkel konstruiert, die Sehne der 2 Ecken (3. Dreiecksseite) mit dem Zirkel abgegriffen und mit dieser Zirkelspanne die weiteren Eck-Punkte auf dem Kreis markiert. Die Verbindungen dieser Markierungen sind die Seiten des Polygons bzw. Sehnen des Umkreises.

Ist nur die Seite des n-Ecks bekannt, wird der benötigte Peripheriewinkel (Winkel am Umfang) über den ***Innenwinkelsatz*** ermittelt:

$$\boxed{\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 180° - \frac{360°}{n}}$$

Nun werden alle Seiten über diesen Winkel wie aneinander gereihte Schenkel konstruiert.

<u>Verdopplung</u>:



Durch das Errichten der Mittelsenkrechten bei regelmäßigen konvexen n-Ecks wird der Mittelpunkt und der Umkreis konstruiert.
Die Berührungspunkte der Mittelsenkrechten mit dem Umkreis sind wiederum Eckpunkte eines doppelt so großen n-Ecks, da ein gleichschenkliges Dreieck über jeder Seite des kleineren n-Ecks entsteht.
Hier ist es das Dreieck, das zum Sechseck wird.

4.3 Stereometrie - Raummessung, Körperlehre

Begriffswiederholung aus Geometrie 1 (Abschnitt 2)
Grund- und Deckfläche, Mantel (die Seitenflächen), Ecken und Kanten

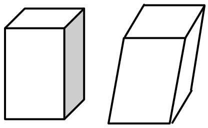
4.3.1 Grundbegriffe

Vorerst werden in der Raumlehre nur ***symmetrische Grundkörper*** betrachtet. In der höheren Schulbildung werden dann außer komplizierteren Körpern auch einzelne Kurven, sowie ebene und gekrümmte Flächen im Raum behandelt.

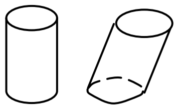
Zerlegen (Differenzieren):
Ein unförmiger Körper kann in bestimmte Grundkörper zerlegt oder „zersägt“ werden.
Wie aus 4.1 ersichtlich, werden 2 höchste Gruppenbegriffe benannt, die Vielflächner oder ***Polyeder*** (edra-Fläche) mit nur ebenen Begrenzungsflächen und die ***Rotationskörper*** mit wenigstens einer gekrümmten Fläche.
Für die normale Schulbildung genügen jedoch die folgenden Unterbegriffe dazu.

Spezielle Polyeder sind die ***Prismen*** (Prisma griech. das Gesägte) für alle Körper mit ebenen und parallel gegenüberliegenden Flächen wie dem Quader und dem Sonderfall zusätzlich gleichseitiger Flächen, dem *regelmäßigen Polyeder* Würfel (Hexaeder, 6 gleiche Flächen).
Weiterhin gehören dazu die *Pyramiden*, spitz auslaufende Körper mit symmetrischen (ähnlichen) oder speziell kongruenten Dreiecken als Mantelflächen.
Das Gegenteil (Rotationskörper) sind demzufolge Grundkörper mit gekrümmten Flächen wie die Sonderfälle Zylinder, Kegel und Kugel.
Unterteilt wird jedoch übersichtlicher in ***parallele*** (längliche), ***spitze*** und ***regelmäßige*** (gleichseitige, gleichförmige bzw. runde) Körper. Diese sind:

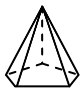
Parallele Körper:



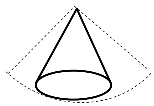
1. ***Prismen*** **-** Grund- und Deckfläche sind kongruente n-Ecks, alle Seitenflächen sind ebenfalls deckungsgleiche n-Ecks und werden zusammen als Mantel bezeichnet, alle Kanten sind parallel: Quader (Rechtecke), Würfel (Quadrate), Spate: „schiefe“ Quader (Parallelogramme)
2. ***Zylinder*** **-** Grund- und Deckfläche sind kongruente Kreise oder Ellipsen, der Mantel ist eine gekrümmte Fläche, die beim Abwickeln ein Rechteck oder beim schiefen Zylinder ein Parallelogramm ist.



Spitze Körper:

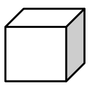


1. ***Pyramiden*** **-** Die Grundfläche ist ein beliebiges n-Eck, von deren Ecken die Mantelkanten nach oben spitz auslaufen und die Seitenflächen somit Dreiecke bilden.
2. ***Kegel*** **-** Die Grundfläche ist ein Kreis oder eine Ellipse. Die gekrümmte Mantelfläche bildet beim Abwickeln einen Kreisausschnitt (Sektor).



Regelmäßige Polyeder (gleichseitig-gleichförmige):

In den beiden ersten Einteilungen sind Polyeder und gekrümmte Körper enthalten.
Hier geht es nur um Polyeder (ebene regelmäßige Flächen). Ihre Begrenzungsflächen sind kongruente regelmäßige n-Ecks (Polygone). Zur Bezeichnung werden die lateinischen Zahlenbegriffe verwendet:

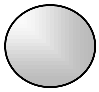


Der Würfel ist ein ***Hexaeder*** (6-Flächner) mit 6 gleichen Quadraten.

Wie später (4.3.5) noch erklärt wird, gibt es nur 5 davon, da außer beim Würfel die Quadrate nur noch gleichseitige Dreiecke und Fünfecke (Pentagone) zusammen passen.

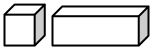
Polyeder (allgemein, unregelmäßig) → Übergang ***Rotationskörper Kugel*** (regelmäßig) :

Sofern andere Flächen als vorgenannte gleichseitige Drei-, Vier- und Fünfecke den Körper bilden, entstehen Lücken, die durch allgemeine Vielecke geschlossen werden müssen.
→ Der ***Grenzfall***, das ∞(Unendlich)-eder, bei der die Seitenflächen unendlich klein (zum Punkt) werden, ist die ***Kugel***, der ***Spezialfall*** des Gegenbegriffs (gekrümmte) Rotationskörper.



4.3.2 **Quader** und **Würfel** - Sonderfall des rechteckigen und quadratischen *Prismas*

Der Würfel wird sowohl als Sonderform des Quaders behandelt, als auch herausgenommen in der Gruppe regelmäßige Körper. Dort wird er wegen seiner 6 quadratischen Seitenflächen auch *Hexa*-(6)*eder* genannt. Vorstellbar ist er auch als quadratisch abgesägtes Stück eines Quaders mit quadratischem Querschnitt.



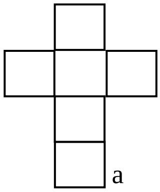


Abb.1

Für einen Körper sind 2 Angaben (Rechengrößen) wichtig:

Die ***Oberfläche* O**:

Sie ist die Summe aller Begrenzungsflächen des Körpers. Genau wie ein Karton durch Falten an einer entsprechenden Anzahl von Kanten hergestellt wird, kann er ebenso auseinandergeklappt werden. Diese in die Ebene zerlegte Oberfläche wird ***Körpernetz*** genannt. Da die Aufklappkanten verschieden gewählt werden können, gibt es für einen Körper auch verschiedene Netzformen. Abb.1 zeigt eine mögliche Netzform des Würfels und Abb. 2 die eines Quaders, an der die jeweils gegenüberliegenden kongruenten Flächenpaare erkennbar sind. Diese Paare(Doppel) sind auch in der Oberflächenformel mit dem Faktor 2 zu finden:

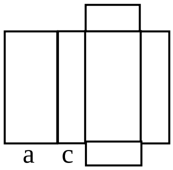


Abb. 2

Oberfläche des Quaders $\boxed{O = 2\,(ab + ac + bc)}$

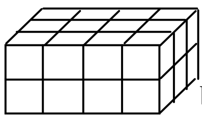
Oberfläche des Würfels $\boxed{O = 6\,a^2}$ $a = b = c$

Als Einheit wird meist die 10.000fache Verkleinerung cm^2 ($\frac{1}{100^2}$ m^2) verwendet.

Die speziellen Vergrößerungen und Verkleinerungen siehe Abschnitt 1.4 oder im Tafelwerk.

Der ***Rauminhalt*** oder das ***Volumen* V** :

Genau wie der Stoff aus kleinsten Elementen, den Atomen aufgebaut ist, kann der Körper mit kleinsten Elementarwürfeln der Kantenlänge mm oder cm ausgefüllt werden. Diese ergeben nebeneinandergelegt (Breite), hintereinandergereiht (Tiefe) und übereinandergelegt (Höhe) den gesamten Rauminhalt oder das Volumen. Also wird die Breite mit der Tiefe vervielfacht (Grundfläche) und diese noch mit der Höhe:

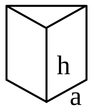


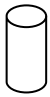
$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$ mit der Grundeinheit $m \cdot m \cdot m = m^3$

$1\ m^3 = 10dm \cdot 10dm \cdot 10dm = 1000\ dm^3 = 1000\ l$ (Liter)

→ 1000fache Verkleinerung $1\ dm^3 = 1\ l$

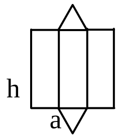
4.3.3 **Prisma** und **Zylinder**





Wie in der Übersicht 4.1 ausgesagt und in 4.3.1 bildlich dargestellt, haben Prismen als Grund- und Deckfläche kongruente n-Ecks und Zylinder kongruente Kreis- oder Ellipsenflächen. Die Mantelfläche(n) ist (sind) Parallelogramm(e), d.h. die Kanten verlaufen parallel. (Rechtecke sind auch Parallelogramme; Zylinder hat keine Kante) Neben dem Quader und Würfel ist das dreieckige Prisma in optischen Geräten das bekannteste. Auch als Spielzeug mit buntem Glitzerpapier kennen wir es. Kreiszylinder kennen wir in der Praxis als Säulen oder z.B. Rundstahl.

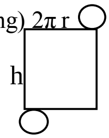
Die ***Oberfläche***



wird wiederum über das zerlegte Körpernetz oder einfach über das Aufsummieren der Begrenzungsflächen gefunden.

Oberfläche = 2 mal Grundfläche (Grund- + Deck-) plus Mantelfläche:

Prisma und Zylinder: $\boxed{O = 2 \cdot G + M}$

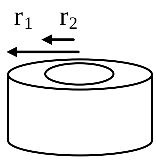


Für das dreieckig gleichseitige Prisma $O = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 + 3 \cdot a \cdot h = a^2 + 3\,ah$

Für den Zylinder $O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

→ Für die verschiedenen Prismen müssen also die kongruenten Grund- und Deckflächen sowie die Rechtecke bzw. Parallelogramme (schiefe Prismen) der Seiten (des Mantels) eingesetzt werden. Beim Kreiszylinder sind es immer 2 Kreisflächen und 1 Rechteckfläche als Mantel bzw. beim schiefen Zylinder 1 Parallelogrammfläche.

Das ***Volumen***



wird wie beim Quader beschrieben über Grundfläche mal Höhe berechnet

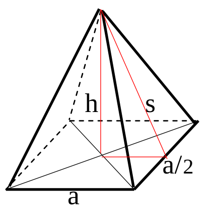
$$\boxed{V = G \cdot h}$$

3seitig gleichseitiges Prisma $V = \frac{1}{2} a^2 \cdot h$

Kreiszylinder $V = \pi r^2 \cdot h$

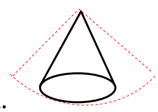
Beim Hohlzylinder muss nur der innere Luftzylinder (r_2) vom Vollzylinder (r_1) abgezogen werden: $V_{Hohl} = V_{Voll} - V_{innen} = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h = \pi h (r_1^2 - r_2^2)$

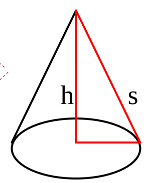
4.3.4 **Pyramide** und **Kegel**



Gegenüber dem parallelen Prisma und Zylinder sind Pyramide und Kegel die spitz auslaufenden Sonderfälle der ebenflächigen bzw. gekrümmten Körper. Pyramiden haben entsprechend der n-eckigen Grundfläche n Dreiecke als Mantel (hier n=4), beim Kreiskegel bildet der Mantel einen Kreissektor (Kreisausschnitt, Berechnungen siehe 6.5.3).

Die ***Oberfläche***



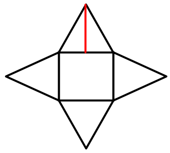


berechnet sich ähnlich wie beim Prisma und Zylinder,
nur ohne die Deckfläche, also nur einmal Grundfläche plus Mantel.

Pyramide und Kegel $\boxed{O = G + M}$

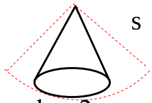
Für die quadratische Pyramide $O = a^2 + 4 \cdot {}^1/_2\, a \cdot s$ s -Seitenhöhe

mit $s = \sqrt{{}^1/_4\, a^2 + h^2}$ (Pythagoras 6.2.2) $O = a^2 + 4 \cdot {}^1/_2\, a \cdot \sqrt{{}^1/_4\, a^2 + h^2}$



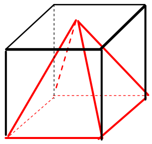
Für den Kreiskegel ergibt sich mit $M_{Kreissektor} = {}^1/_2\, b \cdot s = {}^1/_2 \cdot 2\pi r \cdot s = \pi r s$

mit $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ $\boxed{O = \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2}}$



Kreisbogen $b = 2\pi r$
(abgewickelter Vollkreis)

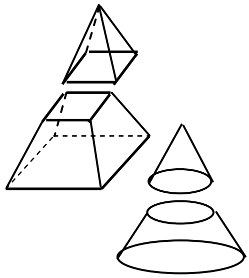
Bei Volumenbetrachtungen geht man vom Prisma aus. Das Beispiel lässt erahnen, dass die herausgesägte Pyramide (rot) genau ${}^1/_3$ des Volumens vom Prisma gleicher Höhe beträgt. Für den Kegel trifft dieses Verhältnis im Bezug zum Zylinder ebenso zu.



Volumen von Pyramide und Kegel $\boxed{V = {}^1/_3\, G \cdot h}$

Speziell für den Kreiskegel: $\boxed{V = {}^1/_3\, \pi r^2 \cdot h}$

Pyramiden- und ***Kegel- Stumpfe***
Wird die Spitze abgeschnitten, ergibt sich jeweils eine kleinere Pyramide bzw. kleinerer Kegel und ihre zugehörigen ***Stumpfe***.

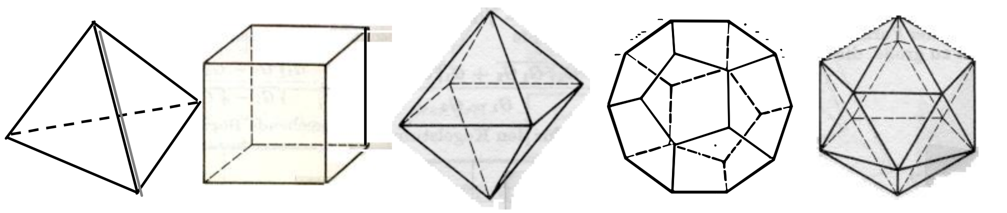


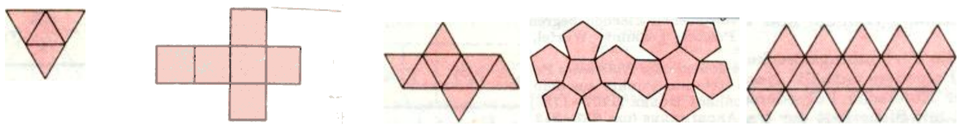
Die Berechnung der Stumpfe wird einfach als Differenz zwischen gesamter Pyramide bzw. Kegel und ihrer Spitze vorgenommen. Die dazu benötigten Kanten/Linien werden über die Strahlensätze (6.1.1) berechnet.
Alle weiteren Berechnungsformeln siehe Tafelwerk!

4.3.5 Polyeder und **Rotationskörper** / Sonderfall **Kugel**

Von den Vielflächnern sind die 5 ***regelmäßigen Polyeder*** von großer Bedeutung.

Tetraeder | Hexaeder (Würfel) | Oktaeder | Dodekaeder | Ikosaeder





(4-flächner) | (6-flächner) | (8-flächner) | (2+10 eder = 12-flächner) | (20-flächner)

Nur bei diesen 5 gleichmäßigen Körpern mit kongruenten gleichmäßigen Seitenflächen berührt eine Innenkugel alle Flächenmittelpunkte und eine umschreibende Kugel (Außenkugel) alle Ecken!