INHALTSVERZEICHNIS

# Die Besonderheit des Lehrbuches und sein Gebrauch

Die Mathematik („Maßtheorie“) ist als Gegenpol zur Physik (physis - Natur) eine uralte Wissenschaft der Menschen, ihre Erfahrungen und Erkenntnisse aus der Umwelt größenmäßig zu erfassen und für sich und ihre Technik zu nutzen. Mit jedem tiefgreifenderen Erkenntnisstand physikalischer Grundlagen (nach inhaltlicher Struktur, nicht historisch!) sind daraus alle anderen Wissenschaften entstanden wie z.B. Chemie (Stofftheorie) oder Biologie (Lebenstheorie). Entsprechend hat sich die Mathematik als ***Querschnittswissenschaft*** für alle Bereiche von ihrer Stofffülle her überdimensional entwickelt, denn jede Wissenschaft benötigt Vergleichsmaße.

Dies geschieht über ***Erfassen***, ***Berechnen***, ***Abbilden*** und ***Vergleichen*** von Größen sowie Abläufen (Prozessen). Der Begriff Größe ist bereits doppelsinnig ein bestimmtes Maß (Wert mit Maßeinheit), als auch das betrachtete „Objekt“ selbst (die Größe Weg s hat die „Größe“ 5 m)!
***Aufgabe der Mathematik*** ist die Beschreibung, Bewertung und Planung aller Theorien über die Natur, Gesellschaft, Wirtschaft und Technik mit der Zielstellung der größten Nutznießung.
Alle Größen aus den vorgenannten Bereichen müssen deshalb auch als ***mathematische Größen*** bzw. ***Funktionen*** darstellbar und berechenbar sein. Die exakte Berechenbarkeit hört allerdings bei Gleichungen 3. Grades auf und die Darstellbarkeit von Funktionen (3-dimensionaler Raum) ab 4 Variablen. Das bildhafte Begreifen entfällt dann und Ersatz- bzw. Näherungsverfahren erbringen eine zureichende Lösung. Auch das *Probieren* ist als „Rechenweise“ zugelassen.

Hier stößt der Mensch auf seine Grenzen der absoluten Erkennbarkeit und Berechenbarkeit selbst kleinerer Systeme. Es gibt immer Faktoren/Größen, die unvorhersehbar und zufällig die bisher „erkannten“ Spielregeln /Naturgesetze verändern oder sogar aufheben können.
Diese unbekannte und mit absoluter Sicherheit nie eindeutig erkennbare Allmächtigkeit wird seit Menschengedenken her mit dem Begriff Gottes, des Schöpfers verbunden.
Die ***Naturwissenschaften*** sind deshalb nicht falsch, solange berechenbare Ordnung herrscht, aber sie sind ***ergänzungsbedürftig bzw. veränderungswürdig***, wenn die Natur diese Ordnung verändert, der Mensch tiefere Geheimnisse „erkennt“ oder er die Wissenschaft verkompliziert.

Mit der technischen Revolution und der Anwendung in den vielfältigsten Bereichen hat sich die Mathematik rasant und teils explosionsartig entwickelt und viele angebliche Spezialgebiete hervorgebracht. Die Mathematiker haben diese umfangreich, tiefgründig und oft mit vielen „neuen“ Begriffen für gleiche oder gleichartige Anwendungsfälle ausformuliert. Damit ist eine Unmenge an ***unnützen Begriffen und Definitionen*** entstanden. Kaum jemand ist mehr in der Lage, einen ordentlicher Durchblick zu ermöglichen, einen Gesamtüberblick oder eine einfache innere Struktur anzugeben! Es gibt jedoch ***keine <u>mathematischen</u> Spezialgebiete***, sondern nur spezielle Lösungsformeln für die verschiedenartigsten praktischen Anwendungsfälle!

Der allgemeine ***Lösungsablauf*** (Algorithmus) in der Mathematik ist ***immer der Gleiche*** (**!!!**):
Die Textaufgabe erfordert den mathematischen Ansatz. Ist nur eine Unbekannte gesucht, kann mit den Rechenregeln und der Bestimmungsgleichung die konkrete wertmäßige Lösung sofort erfolgen (1. - 7.Klasse in der ***Zahlenlehre***, der Arithmetik).
Sind 2 oder mehr Unbekannte (Variable) vorhanden, ergeben sich bis zu unendlich viele konkrete Lösungen in Abhängigkeit der Größen (ab 8.Klasse in der ***Funktionslehre***).
Die Funktionsgleichung ermöglicht, alle Lösungen als Punkte (die „Kurve“) bildhaft im Grafen darstellen und ablesen zu können oder rechnerisch wird über die 3 möglichen Verfahren ***Nullstellenlösung***, ***Einsetzungsverfahren***, ***Additionsverfahren*** wieder die Bestimmungsgleichung und mit ihr dem Grad entsprechend nur wenige spezielle Schnittpunktlösungen ermittelt.
***Alle anderen Vorgehensweisen*** sind ***Teilaufgaben*** oder ***Übungen*** zum Beherrschen der mathematischen Regeln und Gesetze und vorrangig Term-(Glied-)Umformungen.

**Grundbausteine** der Mathematik sind die ***Ziffern*** 0 und 1 sowie die ***Grundrechnung*** Summe „+“ und Differenz „–“ innerhalb der **Grundform** *Gleichung* (=) oder *Ungleichung* ($\neq$).
***Alle anderen Schreibformen und Arten*** sind ***Kombinationen*** bzw. ***Kurzschreibweisen*** (Verschlüssellungen, Kodierungen, kurz Codes) oder ***Sonderformen*** davon.
Die ***Zahl*** ist bereits eine ***Matrix*** (Schablone) für ihre ***Funktion***, dargestellt als Summe von 10fachen Vielfachen der möglichen 10 Ziffern, die auch wiederum nur eine Summenfunktion (Zählfunktion) von 0 und 1 für einstellige Zahlen (Ziffern) sind: $0 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots \rightarrow 0...9$.

$$\boxed{358} \rightarrow Z = f(0...9) = \boxed{3H + 5Z + 8E} = \boxed{3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 1} = \boxed{3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0}$$

Das ***Rechnen*** ist ein ***ständiges Zerlegen***, ***Umformen*** und wieder ***Zusammensetzen*** der verschiedensten Schreibformen der oben genannten 2 Grundbausteine in ihrer Dualität 0 und 1 sowie + und – . Die „höheren Rechenarten“ sind die jeweiligen Sonderfälle für das Verrechnen gleicher Zahlen als auch gleichzeitig Zahlendarstellungsformen, also ein Code aus ***gleichen Grundzahlen*** (Basen) in der „Strich“ -Rechnung → das ***Produkt*** und der ***Bruch***
***gleicher Grundzahl-*** und ***Anzahl*** bei „Punkt“ -Rechnung → die ***Potenz*** und die ***Wurzel***.

***Die Grundlogik der Welt, die Dualität/Zweiteilung/Polarität/Gegenteiligkeit ist auch in der mathematischen Struktur zum besseren Verständnis immer wieder herauszuarbeiten!***

Dieses ***schülerverständliche Gesamtlehrwerk*** bis zur Hochschulreife (Abitur) zeigt auf, dass es auf der Grundlage logischer Sachzusammenhänge möglich ist, mit <u>wenigen Grundelementen</u> und einer weitaus kleineren Menge von Begriffen, Definitionen und Regeln eine einfache Ordnung bzw. Struktur aufzubauen, die Grundlage <u>jeglicher</u> mathematischer Lösungsfindung sind!
Als reines Lehrbuch stellt es eine ***neue Generation*** von Schulbuchliteratur dar, in der nicht mehr wie bisher üblich in einer Klassenstufe durch die vielen „notwendigen“ Übungen die wenigen Lehrstoffinhalte unübersichtlich auseinandergerissen werden!
Ergänzend bleibt künftig für jede Klassenstufe die reine ***Übungsliteratur***, wobei in dieser in den ersten 3 Jahren der ***Grundstufe*** der Lehrstoff sehr anschaulich zusätzlich zu plastischen Lehrmitteln herüber kommen muss, denn Leseleistung und Wortsinn sind noch nicht so entwickelt!
Voraussetzung dafür sind aber logisch aufbauende Lehrpläne und eine ***neue pädagogische Philosophie***, in der auch menschlicher Sachverstand, die Logik und Einfachheit Einzug halten!
Schullehrbücher sind keine Fachbücher zum normalen Wissenserwerb! Deren Vermittlung wird in der Schule zur Genüge vollzogen. Das Lehrbuch soll Schülern kurz und bündig helfen zu begreifen, was der Lehrer bei ihnen nicht vermitteln konnte!
Die Schüler sollen nicht im üblichen Sinn lernen müssen, sondern ***richtig begreifen können!***

***Warum mit 1000 Worten eine Sache umschreiben, wenn ihr Wesen auch mit 10 Worten erklärt ist! „Logo“ - das „Wort“ steht für Sprache/Verständlichkeit und somit für die Begreifbarkeit des Lehrstoffes, damit es kein Leerstoff bleibt!***

***Definitionen*** und ***Lehrsätze nicht wörtlich lernen***, sondern inhaltlich erfassen und ihr Wesen mit <u>eigenen Worten</u> wiedergeben können! Nur nach Mathematikern benannte Sätze sind vom Lehrer ***sachbezogen abzufragen***: „Was sagt der Satz des Thales über die Beziehung von Dreieck und Umkreis aus?“ und nicht „Wie lautet der Satz des Thales?“
Eine Namensehrung ist okay, aber es ist unsinnig zu lernen, wer konkret was erforscht hat!
Ebenso sollen ***<u>weniger</u> <u>Rechenaufgaben</u>*** behandelt werden, diese dafür aber ***in aller Vielfalt der Rechentechnik***, z.B. Potenzen bis zur Summe umwandeln, Potenzen mit negativen Exponenten als Bruch rechnen oder eine Wurzel in alle anderen 5 Rechenarten umformen!
Gegenüber dem immer wieder gleichen Lösungsablauf soll bei der immensen Vielfalt von Textaufgaben (Anwendungen) weniger die rechnerische Lösung im Vordergrund stehen als

vielmehr ***mit sehr <u>vielen</u> <u>Textaufgaben</u> nur der Lösungsansatz***, meist die implizite (unaufgelöste) Gleichung gesucht bzw. der ***Rechenablauf nur kurz abgefragt*** werden! Dieser 1. Schritt einer Sachaufgabe bereitet Schülern die größten Probleme und sollte mindestens ab 4. Klasse mit logischen Anregungen vorrangig erklärt und geübt werden, denn bei einem falschen Ansatz nutzt dann auch das beste rechnerische Wissen nichts mehr!

***Wenn die mathematischen Zusammenhänge richtig im logischen Geradeausdenken (roter Faden) bewusst gemacht werden, das heißt, dass der Schüler die Sache auch <u>begreift</u>, dann muss er sie nicht mehr „lernen", weil nur das Begreifen der einzig richtige Lernvorgang ist***!

Wenige Übungsaufgaben reichen dann aus, um den auf diese Weise begriffenen und erhärteten Stoff im Langzeitgedächtnis zu speichern. Das ist auch die primäre ***Aufgabe der Schule, das später <u>umsetzbare</u> Wissen, das K ö n n e n zu vermitteln***. Noten sind dagegen Schall und Rauch, wenn sie wie derzeit meist nur das Kurzzeitwissen widerspiegeln!
Dieses Lehrbuch baut auf einer systematischen Logik auf, in der ab 5. Klasse nichts „Neues", sondern in Erweiterung der Grundstufe nur noch spezielleres oder allgemeineres Sachwissen hinzukommt, also ***<u>das Gleiche</u>***, nur ***aus weiteren*** und ***tieferen Blickwinkeln***.
Die Mathematik muss praktischer und damit logisch verständlicher aufgebaut werden.
Das bedeutet, den Lehrstoff mehr zu „***durchdringen***", zu „hinterschauen", die Sachzusammenhänge mit Oberbegriffen ***komplex im Überblick*** sehr ***bildhaft*** und ***strukturmäßig zusammenhängend*** in Verbindung mit „Eselsbrücken" bzw. der Erfahrenswelt der Schüler darzustellen.
In der Abiturstufe wird noch zu oft praxisfern theoretisiert, besonders die Wahrscheinlichkeitslehre, deren komplizierten Theorien später oft durch Erfahrung und Gespür ersetzt werden!
Ebenso wichtig ist die ***Hinterfragung der Wortbedeutung***, denn in den einzelnen Begriffen stecken meistens schon der Inhalt bzw. die Erklärung einer Sachbeziehung! Weiterhin sollte die ***Begriffsvielfalt stark reduziert*** werden, z.B. bis zur 10. Klasse nur die ganze und die gebrochene Zahl genannt werden, denn beide sind reell als auch rational (Brüche/Wurzeln werden gerundet).
Außerdem gehört zu einer logischen Erklärung immer das Gegenteil dazu. Wo wird zur reellen Zahl die imaginäre Zahl genannt oder wenigstens die Wortbedeutung reell, real als wirklich existierende Zahl? Dagegen ist die „natürliche" Zahl (positive ganze ~) nur eine fiktive (erdachte) Zahlenart, denn sie hat kein spezifisches Gegenteil (negativ können alle Zahlenarten sein!). Auch die ***Funktionsarten*** sind damit ***neu zu strukturieren***!

***Das Begreifen der Zusammenhänge ist bereits der abgeschlossene Lernvorgang***! ***Das Formen entsprechender Bilder und Strukturen vor dem geistigen „Auge" ist die beste Methode dazu***! ***Hierzu dienen insbesondere die Zielstellungen, Übersichten und ab 5. Klasse die einführenden Worte in jeden Abschnitt, denn jeder findet sich auch in einem Computermenü zurecht***!

Dieses Lehrbuch hat Fachkritiken und kontroverse Diskussionen ausgelöst. Das ist aber gerade die Zielstellung an die Mathematiker, <u>praktisch relevante</u> und <u>begreifbare</u> Mathematik zu lehren! Das fängt bereits bei Summe und Differenz bilden (dt. Sprachgebrauch) statt Addition und Subtraktion an, aber historisch gewachsene Begriffe wie z.B. die „Natürliche Zahl" oder „äußere Teilung" bei Streckenverhältnissen, die eigentlich eine Streckung ist, werden leider nicht so schnell verschwinden. Mit „Differenzieren" als einfachste Stufe für „Minus" zur Gleichbehandlung mit dem Summieren würde die Wissenschaft ebenfalls Realitätssinn beweisen!

***Eine Pädagogik, die die <u>Grundlagen</u> einer Wissenschaft nicht <u>allen</u> Schülern <u>begreifbar</u> vermitteln kann, erfordert eine neue pädagogische Philosophie → eine einfache Logik***!

Rosswein, Dez. 2003

U. Nagel
Am Sportplatz 3
04741 Roßwein

u.-nagel@t-online.de

Tel.: 034322 12405

# EINFÜHRUNG

Die Physik, die ureigenste Naturwissenschaft, baut alle ihre Erkenntnisse auf den beiden Begriffen Materie und Energie auf, wobei 6 ihrer Energiehauptformen die einzelnen Sachgebiete sind. Die ***Physik*** ist die betrachtende oder auch ***qualitative Beschreibung*** der Natur.
Die ***Mathematik*** ist die Gegenseite, die größenmäßige oder ***quantitative Beschreibung*** der Natur und aller aus ihr hervorgegangenen Wissensgebiete. Erkenntlich wird hier die Grundlogik des Universums bzw. der Natur: Die Dualität (Zweiteilung) der Welt. Eine Sache hat immer nur ***2 Gegenpole*** und ***zwischen diesen beiden Extremen*** findet die ***Variantenvielfalt*** statt!

Der Informationsaustausch, die Verständigung, das Verstehen der Menschen untereinander wird mit nur 26 Grundelementen, dem ABC realisiert. In einer abgestimmten Art und Weise (Schlüssel / Code), hier der Sprache, kann eine Riesenmenge von Informationen vermittelt werden.

In der Mathematik ist es ebenso, dass mit einer ***Grundstruktur*** (Gleichung **-** Ungleichung) und sogar nur **2 *dualen Grundbausteinen Ziffer*** (0/1) und ***Grundrechnung*** (+/–), die nur in verschiedenen Zusammensetzungen und unterschiedlichen Codes immer wieder auftreten, <u>jede</u> Aufgabe gelöst werden kann.
Das bedeutet, ***dass jede Rechenaufgabe von der 1. Klasse bis zum Abitur den gleichen allgemeinen Lösungsablauf hat***! Selbst in der sogenannten höheren Mathematik sind die einzelnen Schritte immer auf einfache Handlungen der Zahlenmathematik (Arithmetik) zurückführbar, nur die ***Ansätze*** (Gleichung/Ungleichung) ***bei Textaufgaben werden immer schwieriger.***
Die Funktionslehre der 8. – 10. Klasse ist vom Wesen / Prinzip (Grundsatz) her die 1. Wiederholung der Arithmetik (1. – 7. Kl.), deren ***Zahlenrechnung*** allerdings dann nur der ***letzte*** und ***kleinste Rechenvorgang*** bei der Lösung einer Aufgabe ist! Trotz dieses kleinsten Anteils der Zahlenrechnung kommt ihr aber in den ersten 7 Jahren doch eine große Bedeutung zu:

Die Arithmetik ist die an konkreten Zahlenwerten gelehrte <u>gleiche</u> Rechen**-** und Lösungsweise, wie sie ab der 8. Klasse dann viel allgemeiner mit Buchstaben an linearen Funktionen und Funktionen höheren Grades (nichtlinearen) oder deren Systemen abgehandelt wird, da die Zahl dem Wesen nach selbst eine nichtlineare Funktion ist, nur noch nicht so erklärt wird!
Abfolge ist stets ***Zerlegen*** (***Umformen***) ***- Zusammensetzen*** (***Verrechnen***) zur aufgelösten Form.

***Wer also die Arithmetik nicht wenigstens grundsätzlich beherrscht, der schafft auch den Abschluss der 8. Klasse nicht***!
Die <u>Abiturstufe</u> ist dem Wesen nach die <u>2. Wiederholung</u> der Zahlenlehre, nur dass hier noch viel tiefgründiger die linearen und nichtlinearen Funktionen untersucht (analysiert) werden!

Wie im Vorwort beschrieben, ist die Zahl als Element bereits eine Funktion von Ziffern.
Mit dem ***Grundmaß*** Ziffer 1 als Differenz zur Ziffer 0 (Abstand 1**–** 0) und der ***Grundrechnung*** Summe (Addition, Symbol „+") entstehen die anderen 8 Ziffern und weiterhin Zahlen sowie die anderen Rechenarten. Es muss bewusst werden, dass ***das Rechnen prinzipiell jedes Jahr das Gleiche ist***, jedoch nur immer „tiefer" und umfassender behandelt wird.
So sind das Vervielfachen (Multiplizieren) und Teilen (Dividieren) keine Grund**-**, sondern bereits die „höheren" Rechenarten, denn sie sind die verkürzt (verschlüsselt/codiert) dargestellte Summe bzw. Differenz. Noch eine Ebene höher liegt die Potenz als codiertes Produkt.
***Potenzgesetze zu lernen ist*** also ***nicht nötig***, wenn man befähigt wird, sie an dieser Struktur „abzulesen"!
Für eine rechnerische Lösung reichen in der Schulmathematik bis zum Abitur (!) allein
***3 allgemeingültige Rechenregeln*** aus, die auf ein Problem in der 4. Klasse angewandt genauso gültig sind wie auf ein Problem in der 12. Klasse. Durch ständige Wiederholungen in jeder

Klassenstufe prägen diese sich von selbst ein und lassen unterschiedliche mathematische Anwendungen auf ***wenige Grundlagen zusammenschrumpfen***.
Mit dem Kennen lernen von Gliedern („Produktterm“ = 1 Term) und deren Verrechnung über Grund(Strich-)Rechnung als Bestandteile einer Gleichung/Ungleichung in der Grundstufe ist die gesamte Breite als Basis der Rechentechnik aufgezeigt. Da ein Glied die Darstellung von in Punktrechnung verbundener Werte ist, geht die Algebra ab 5. Klasse „nur“ noch in die Tiefe.
Es ist also an der Zeit, die Mathematik schülerverständlich und überschaubar auf ***wenige Stützpfeiler*** bzw. ***ständig wiederkehrende Abläufe*** aufzubauen.
Hierauf sollte sich auch die Lehrmethodik beziehen, den Schülern durch einen einsichtigeren und übersichtlicheren Lehrinhalt ein ***Begreifen zu ermöglichen*** und nicht (nach)lernen zu lassen!

Entscheidend ist nicht das Wissen wie gerechnet werden kann (Kenntnis wird vorausgesetzt), sondern warum gerade diese oder jene Zerlegung bzw. Umformung (Schreibform) richtig ist, um möglichst auf dem unkompliziertesten und kürzesten Weg zur Lösung zu gelangen!

Das mathematische Wissen von mehreren Tausenden Jahren teilt sich in den rechnerischen Bereich Algebra (Gleichungslehre) und den konstruktiven Bereich Geometrie (Figurenlehre) auf.

**Algebra** (Gleichungslehre)

Sie ist der wichtigste und umfangreichste Bereich, denn sie ist die eigentliche Lösungstheorie der Mathematik. Sie unterteilt sich in die 2 Bereiche **Zahlenlehre** und **Funktionslehre**!
***Jede*** Aufgabe hat den ***gleichen allgemeinen Lösungsweg***:
Die Gleichung, bestehend aus in Grundrechnung Summe (Symbol/Zeichen/ Operator „+“) verknüpften Gliedern (Termen) wird in der Abfolge Zerlegen, Umformen, Zusammensetzen und Verrechnen gelöst.
Die gegensätzliche Grundform ist die Ungleichung, über die im <u>gleichen</u> Ablauf ein Vergleich (kleiner „<“, größer „>“) von <u>gleichartigen</u> Größen erreicht wird.
Ab 8. Klasse werden alle Zahlen durch Buchstaben symbolisiert und erst in der Lösungsformel (Bestimmungsgleichung, 1 Variable) konkrete Zahlen zur wertmäßigen Lösung eingesetzt. Der Buchstabe x sollte jedoch bereits ab 1. Klasse für die gesuchte Zahl eingesetzt werden.
***Funktionen*** (Gleichungen mit 2 und mehr Unbekannten /Variablen) werden dazu vorher über 3 spezielle Verfahren in die Lösungsformel umgeformt.
Funktionelle „Lösungen“ sind Termvereinfachungen, tabellarische und grafische Darstellung.
Ein ***Term*** ist im einfachsten Fall eine Ziffer, eine Zahl (Zahl ist bereits Zifferncode), ein allgemeines Zahlensymbol (Buchstabe), ein Produkt oder Bruch, eine codierte Zahldarstellung (z.B. Potenz oder Wurzel) oder selbst bereits eine Funktion.

Die **Geometrie** (frei übersetzt Erdvermessung)

Sie ist die Theorie der Erfassung und Darstellung unserer Umwelt, um aus der Erkenntnis der Grundformen und geometrischer Beziehungen konstruktive Gebilde (Figuren) für die Wirtschaft und Technik zu schaffen.
Dies wird zweidimensional in der Ebene (<u>Plan</u>imetrie) als Punkt, Linie oder Fläche und dreidimensional im Raum (<u>Stereo</u>metrie) zusätzlich als Körper realisiert. Dazu gehören Winkelbetrachtungen (abgeleitet vom Dreieck-Trigonometrie), Betrachtungen von Lageveränderungen (Verschieben, Drehen, Umklappen ...) und Ähnlichkeitsabbildungen (zentrische Vergrößerungen/Verkleinerungen, das Zoomen) die auch gleichzeitig Symmetriebetrachtungen sind.
Die ***Berechnungsformeln*** der Gebilde einschließlich der Winkelfunktionen und ihre Lösung ist wiederum die Aufgabe der ***Algebra***.

# MATHEMATIK - ÜBERSICHT

$\boxed{\text{Elementarmathematik}}$ ( 1. bis 10. Klasse )

## ALGEBRA (Gleichungslehre)

<u>Berechnungsaufgabe</u> : gegeben : a, b, c, d gesucht: □ ; x oder y (x) (Funktion)

<u>Lösungsansatz</u>: Gleichung ( = ) ; Ungleichung ( < > )

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z.B. | 9 | + 3 | · □ | – 13 | = | 20 → | **Arithmetik** (Zahlenlehre) **1. – 7. Klasse** |
| allg. | a | + b | · x | – c | = | d | Zahlenarten : Ganze u. gebrochene Zahl |
| | Ziffer | Koeff. | Unbe-kannte | Zahl | | Zahl | Grundrechnung: Summe(+) / Differenz (–) |
| | | | | (Ziffercode) | | | 1. Rechenstufe: Punktrechnung ( · , : ÷) |

<u>Lösungsergebnis</u>: $\boxed{x = (c+d-a) / b}$ $\boxed{\text{Bestimmungsgleichung}}$ (1 Ergebnis, 2 bei $x^2$ , 3 bei $x^3$ )

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a · x | + b · y | + d | = d · x → | **Funktionslehre** | **8. – 10. Klasse** |
| Koeff. Var.1 | Koeff. Var.2 | Konst. | Term | Term : Rechenglied | |

Koeffizient: Zahlenfaktor vor Variabler

<u>Lösungsergebnis</u>: $\boxed{y = f(x)}$ $\boxed{\text{Funktionsgleichung}}$ Variable : Größe mit theoretisch unendlich vielen Werten

(Ergebnismenge über Zuordnungstabelle und /oder Grafik: Kurve im x-y-Diagramm z.B. $x^2$ ; $\sqrt{x}$ ; $^1/_x$ ; $a^x$ ; log x ; sin x )

1. Nullstellenlösung y = 0 setzen (Schnittpunkt x-Achse)
2. Systemlösung: 1. Schnittpunktlösung $y_1 = y_2$ (Ein-/Gleichsetzungsverfahren)
   2. Funktionssumme $y_1 + y_2$ (Summenverfahren)

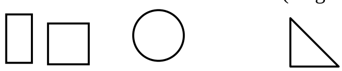
*Empirische Funktionen*: Wahrscheinlichkeitslehre (Voraussagetheorie)
(aus praktischer Erfahrung) Grundlage: Statistik (Erfassen von konstanten Größen)
Stochastik (Erfassen von Funktionen, Abläufen)

$\boxed{\text{Analytische Geometrie}}$

## GEOMETRIE (Gebildetheorie - Konstruktionen)

Winkel-Funktionen
(Trigonometrie)

$\boxed{\text{Berechnungen, funktionelle Betrachtungen}}$



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Planimetrie 2 D - Gebilde (Flächen) : | | | | |
| Stereometrie 3 D - Gebilde (Körper) : | parallel : | Prisma (Quader) | Zylinder | Prisma |
| | spitz : | Pyramide | Kegel | Pyramide |
| | gleichseitig: | Polyeder | Kugel | Tetraeder |

$\boxed{\text{„Höhere“ Mathematik}}$ **Funktionslehre** **Abiturstufe**

**Analysis** (Problemuntersuchende Mathematik in der Algebra und der Geometrie)
- Funktionsklassifizierungen, Ergänzungen und spezielle Termberechnungen
- Folgen und Reihen sowie ihre Partial(Teil)Summen und Grenzwerte
- Integral- u. Differentialrechnung (Flächensumme u. Differenzverhältnis)
- Lineare Gleichungssysteme als Matrix-Rechnung (die Zahl ist auch eine Matrix!)
- Wahrscheinlichkeitsrechnung (statistische und stochastische Prozesse)
- Rechnen mit Komplexen Zahlen und „Beweisverfahren“

Koordinatengeometrie:
- Punkte, Geraden und Ebenen, Darstellungsformen und Berechnungen
- Vektorendarstellungen in Ebene und Raum und ihre Berechnungen

### 1.2.4 Die 3 grundlegenden Rechenregeln

***Alle*** aus der Grund(Strich-)Rechnung Summe / Differenz hervorgehenden höheren Rechenweisen gibt folgender Überblick zum jeweiligen Gebrauch bzw. zur Vorausschau:

| | | höhere Stufe → Codierung | ; Verrechnung |
|---|---|---|---|
| $a^x$ | log | Exponential-Fkt. (spezielle Potenz) und Logarithmus | 10. Klasse |
| $x^n$ | $\sqrt{x}$ | Potenz und Wurzel als spezielles Mal und Geteilt | 8. Klasse |
| · | **:** $^Z/_N$ | Mal und Geteilt/Bruch als spezielle Summe/Differenz | 3. Klasse |
| $\Sigma$; $\int$ □; | $^{dy}/_{dx}$ | allgemeines Summensymbol u. Differenz-(Verhältnis) | 11. Klasse |
| + | – | Plus und Minus als spezielle ***Grundrechensymbole*** | 1. Klasse |

Diese Unterteilung wird entsprechend der Klassenstufe ständig wiederholt und vertieft. Alle weiteren Rechenregeln können daran abgelesen werden und man muss sie nicht extra „lernen“.

**1. Regel**: Nur ***Gleichartiges*** kann verrechnet werden!

Das genaue Zusammen- oder Untereinanderschreiben und Verrechnen von Zahlen ergibt sich von ganz allein durch die ***gleichartige Bezeichnung*** von Einern, Zehnern, Hundertern, denn jeweils nur diese können miteinander verrechnet werden! Später gilt das Gleiche für x, $x^2$, y, gleichnamige Brüche, Glieder (Terme) sowie Funktionen.

**2. Regel**: Die ***Reihenfolge*** der Verrechnung geht ***von der höheren zur niederen Rechenart***, nur die ***Klammer*** unterbricht die Reihenfolge! Bei gleicher Rechenart ist die Reihenfolge egal. (ersetzt Aussage von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributiv-„Gesetz“. Man sagt kurz: ***Punktrechnung geht vor Strichrechnung***

$2 + 5 \; – ( + 5 – 3) \; = \; 2 + 5 – ( 2 ) \; = \; 6$ (Klammer zuerst rechnen) ; aber auch
→ $2 + 5 + \; (–5) + 3$ . . . . . . . . . $= \; 6$ (Klammer auflösen durch Vorzeichenumkehr,
(s. Regel 3: Doppeltes negieren , Rechenzeichen + und die Vorzeichen)

**3. Regel**: Beim Umformen der Gleichung oder eines Gliedes wird immer ***doppelt negiert***! oder beide Seiten einer Gleichung/Ungleichung, eines Bruches ***gleichartig ändern*** Kurzfassung: ***Gegenseite → Gegenrechnung***

In der Mathematik trifft diese ***Regel*** den ***Hauptkern der Aufgabenlösung***: Das Zerlegen, die Umformung, das Zusammenfassen und die Umstellung der Zahlen bzw. Glieder (Terme).
Die Unbekannte muss herausgestellt (eliminiert, die Gleichung aufgelöst) werden. Es entsteht die Berechnungsformel. Egal wie „kompliziert“ die Gleichung ist, wird die Zahl (das Glied) auf die Gegenseite gebracht, muss die Gegenrechnung angewendet werden (doppelte Umkehrung: Gegenseite und Gegenrechnung, beim Bruch später sind es die 2 „Seiten“ Zähler und Nenner).

Aufgabe: $3 + x \; = \; 11 \quad | –3$
Ausführlich: $– 3 + 3 + x \; = 11 – 3$ → $0 + x \; = 11 – 3$ (gleichartiges Ändern beider Seiten)
Kurzfassung: $+ 3 + x \; = 11$ → $x \; = 11 – 3$ (Gegenseite mit Gegenrechnung)

***Negation*** (Negieren) heißt Umkehr, Gegenrichtung oder Gegenlösung
***Doppelte Umkehr*** bedeutet aber keine Wertänderung, die Gleichung bzw. das Ergebnis bleibt gleich. Die Verrechnung von Klammern wird durch dieses Verständnis kaum noch falsch gelöst:

| – (– 3) = +3 | oder | (–2) · (–3) = **+6** | ⟷ | +2 □(–3) = **– 6** |
|---|---|---|---|---|
| Gegenteil vom Negativen = Positiv | oder | doppelt negiert = positiv | | 1mal negiert = negativ |

Diese Regel allgemeiner formuliert in *Gegenseite → Gegenprinzip* hat aber noch ein viel größeres Anwendungsgebiet. Nicht nur in der Mathematik, sondern in allen Wissenschaftsbereichen ist sie gültig, da die Natur dual (2seitig) aufgebaut ist! Man braucht nur eine Seite richtig zu begreifen und kennt damit auch die Gegenseite als deren Umkehrprinzip. Damit wird auch das ***Lernen auf die Hälfte reduziert***, wenn man richtig Schlussfolgern (logisch denken) kann. Im späteren Fach Technik ist diese Betrachtung wichtig für das logische „Nicht“, das den technischen Gegenzustand darstellt (symbolisiert). Die Elektrotechnik z.B. hat nur 2 Schaltzustände „An“ und „Aus“. Alle Dezimalzahlen (Ziffern 0 bis 9) müssen deshalb für die Technik in Dualzahlen (nur 0 und 1) umgewandelt (codiert) werden!

### 1.3 Der 1. Rechen-Spezialfall: Multiplizieren (Produkt) und Teilen (Bruch)

#### 1.3.1 Das Multiplizieren (Malnehmen, Vervielfachen) - das Produkt

Ein ***Spezialfall*** ergibt sich, wenn immer die gleichen Zahlen aufsummiert werden, z.B. die Dreier-Reihe:

Faktor Grundzahl

3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30 = 10 * 3

Faktor Anzahl

Zahlenreihen können mit der logischen Aussage „Ich soll die Zahl 3 10mal summieren“ kürzer gefasst (codiert) werden als ***Produkt*** „ $10 \cdot 3_{\text{summiert}}$ “.

Das „**Kleine Einmaleins**“

Beim Erlernen oder besser ***Einprägen*** des Kleinen „**1x1**“ (die Ergebnisse dürfen nicht erst errechnet werden!) wird mit folgender Systematik der sicherste und schnellste Erfolg erzielt: Wenn man nicht über die einzelnen Ziffernreihen, sondern über die wenigen sich ergebenden Produktergebnisse des Einer-, 10er-, 20er- bis 80er-Bereiches geht, werden sowohl Wiederholungen durch Faktorentausch als auch falsche Ergebnisse vermieden.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **4** | 2·2 | **10** | 2·5 | **20** | 4·5 | **30** | 5·6 | **40** | 5·8 | **54** | 6·9 | **72** | 8·9 |
| **6** | 2·3 | **12** | 2·6; 3·4 | **21** | 3·7 | **32** | 4·8 | **42** | 6·7 | **56** | 7·8 | | |
| **8** | 2·4 | **14** | 2·7 | **24** | 4·6 ;3·8 | **35** | 5·7 | **45** | 5·9 | | | | |
| **9** | 3·3 | **15** | 3·5 | **25** | 5·5 | **36** | 6·6 ; 4·9 | **48** | 6·8 | **63** | 7·9 | **81** | 9·9 |
| | | **16** | 4·4 ; 2·8 | **27** | 3·9 | | | **49** | 7·7 | **64** | 8·8 | | |
| | | **18** | 3·6 ; 2·9 | **28** | 4·7 | | | | | | | | |

Der ***Zählanfang* 1** = „1*Ziffer“ ist weggelassen, da es die Ziffer selber ist und ebenfalls das 10fache, da an die Ziffer nur eine Null angehängt wird!
An einem Tag nur einen 10er Bereich erlernen, also maximal nur 6 Ergebnisse mit ihren dazugehörigen Produkten. Die Ergebniszahlen (fett) ohne Beachtung der Produkte 5 min stur vorwärts (4→ 6→ 8→ 9) und 5 min rückwärts (9→ 8→ 6→ 4) ***einprägen***. Nach kleiner Pause die Produktfolge (2·2, 2·3, 2·4, 3·3) mit Vertauschen der Faktoren der Reihe nach vorwärts 5min abfragen lassen, dann rückwärts und erst zuletzt durcheinander. Der schnelle Lerneffekt liegt darin verborgen, dass beim reihenweise Abfragen das Ergebnis bereits im Kopf ist und die dazugehörigen Faktoren bzw. Produkte sich leichter einprägen. Ein falsches Ergebnis wird dadurch kaum genannt. Am nächsten Tag wiederholen. Mit den anderen Zehnerbereichen genauso verfahren.
Ein zusätzlicher Lerneffekt ist die Tatsache, dass einen Zähler unterhalb des Ergebnisses gleicher Faktoren (später Quadratzahl genannt) das Produkt aus dem nächstniedrigeren Faktor mal dem nächsthöheren Faktor liegt: z.B. $4 \cdot 4 = 16$, $3 \cdot 5 = 15$

**1.6 Algebra 1 - Übersicht**

Voraussetzungen: Unterscheidungsmerkmale von Sachen, Gegenständen, Zahlen und Größen
Nur ***Gleichartiges*** kann miteinander verglichen, zusammengefasst bzw. geordnet werden!
Vergleiche: mehr/größer als (>), weniger/kleiner als (<), gleich viel / gleich groß (=)

Zahlenarten: ***Ganze*** Zahlen (Abart natürliche Z.): 1 2 3 . . . bis 1.000.000 (1 Million)
Unterbegriffe: gerade (durch 2 teilbar) + ungerade (nicht durch 2 teilbar)
***Gebrochene*** Z.: ganzzahliges Ergebnis mit Rest 12 : 5 = 2 Rest 2 → 2,4
oder 25 m + 85 cm = 25,85 m (vorrangig für Größen verrechnen)

Zahlenaufbau: Einstellige „Zahlen“ 0 bis 9 sind ***Ziffern***, aus denen eine Zahl besteht
Die ***Zahl*** ist verschlüsselte Gleichung: 2·100 + 3·10 + 5·1 = 2H + 3Z +5E = 235

Rechenarten: 2 gegensätzliche Grundrechenarten (alle anderen sind Spezialfälle dieser beiden)
***Summe bilden*** („+“ Zusammenzählen, Summe bilden, vergrößern, mehr)
***Differenz bilden*** („–“ Abziehen, verkleinern, weniger / von - bis Unterschied)
***Multiplizieren*** „ · “ ist bereits Spezialfall (Kurzschreibweise) der Summe
0 + 4 + 4 + 4 = $\boxed{\text{3· 4summiert}}$ = 12 = das 3fache von 4
Kleines „1· 1“ sind die Reihensummen bzw. die Vielfachen der Ziffern 2 bis 9
***Teilen*** ist Spezialfall der Differenz: 12 – 4 – 4 – 4 = 0 = $\boxed{\text{3· 4abgezogen}}$ von 12
12 : 3 = 4 (3fach abgezogene Zahl) oder $^{12}/_{3}$ = 4 = $^{1}/_{3}$ von 12 (3 ist *Teiler* von 12)

Rechenregeln: 1. ***Nur Gleichartiges verrechnen*** (Einer nicht mit Zehnern, Meter nicht mit m² →
E unter E, Z unter Z oder 1.Stelle mit 1.Stelle, 2.Stelle mit 2.Stelle usw.)
2. „Höhere“ Rechenart zuerst (***Punkt- vor Strichrechnung***), Klammern () jedoch
zu aller erst, bei gleicher Rechenart ist Reihenfolge egal.
3. Beim Umformen immer ***doppeltes Negieren*** (Umkehren) anwenden! oder
Für Gegenseite die Gegenrechenart anwenden; Kontrollrechnung
+3 + x = 10 → x = 10 – 3 = 7 → denn (Kontrolle) 7 + 3 = 10
statt mehrfachem Abziehen die Zahlen addieren und ihr Ergebnis abziehen
36 – 5 – 8 – 5 = 36 – (5+5+8) → 36 – 18 = 18 oder vorwärts zählen:
18 bis 20 bis 30 bis 36 ; Ergebnisse zusammen 2 + 10 + 6 = 18
oder Minus als negatives Vorzeichen sehen: 36 + (–18) = 18 →
ohne Änderung in Umkehrrechenart umwandeln (Umschreiben)!

Sachaufgaben:

1. Es gibt nur einen ***einzigen Lösungsweg*** (Rechenablauf) für jede Aufgabe:
Aufgabe → rechnerische Formulierung (Gleichung/Ungleichung) → Umformung, Beherrschen der 3 Rechenregeln (Unbekannte links, alle gegebenen Größen rechts) → Lösungsergebnis (rechte Seite verrechnet) → Ergebnisformulierung (Antwortsatz, Bild / Grafik)
2. ***Hilfsmittel*** für Aufgabenlösung:
Gesuchte Zahl/Größe (Unbekannte) - Symbolik: □ ; ? ; x z.B. 4 > □
Gesuchte Rechenoperation/Rechenart - Symbolik: O z.B. 3 O 5 = 8
Hilfsdarstellung der Aufgabe: Rechenfiguren, Gitter, Tabelle, Operatorpfeil, Zahlengerade
Zahlenzerlegung: Beherrschen von Ergänzungszahlen, Rechnen über die „Vollen“ 10er, 100er
24 + 8 { 6+2} → 24 + 6 = 30 ; 30 + 2 = 32 (8 in 6/ Ergänzungszahl + 2 zerlegt)
oder 24 + 8{10 –2} → 24 + 10 = 34 ; 34 – 2 = 32 (8 in 10 – 2 zerlegt)
3 – 5 → 3 – 3 = 0; 0 – 2 = – 2 (2 borgen, im Minus stehen, Konto überziehen)
Kopfrechnen: 7· 32 = 7· (3·10 + 2) = 7·3·10 + 7·2 = 210 + 14 = 224
7· 38 = 7· ( 40 – 2) = 7 · 40 – 7·2 = 280 – 14 = 266
3. ***Größen***: Länge, Masse, Volumen, Zeit, Geld – bestehend aus Zahlenwert · Einheit
physikal. Einheiten haben codierte Zahlsymbole z.B. 5 Km = 5·1000·m (K=1000)
Kilo **K** = 1000, Dezi **d** = $^{1}/_{10}$ (1 von 10 gleichen Anteilen), Zenti **c** = $^{1}/_{100}$
1 € : 100 = 1 Cent ; 1 Cent = $^{1}/_{100}$ von 1 € (1 von 100 Cent-Anteilen)
4. ***Zahlen***-/Reihen***folge***: Zahlen ordnen - Vorgänger, Nachfolger (3 Vorgänger von 4)

## 5.1 Analysis - Übersicht

**Mathematik** : **Geometrie** → Projektionen (Abbilder) konstruieren
**Algebra** → ***Gezählte Ziffern vergleichen u. Unbekannte bestimmen***
**+ –** **0 1** **= ≠** **x = a (Wert)**

**Ziffern, Zahlen, Buchstaben**:

Ziffer = Zi (0, 1) = $a_1 + d$ Einserreihe, arithmetische Folge mit $a_1 = 0$ und $d = 1$

Zahl = Z (0..9) = $ax^n + ax^{n-1} .. + ax^{n-k}$ *Normalform* oder Polynomform der Gleichung
mit a  Q und n, k  N sowie x = 10 für Dezimalzahl

Z = a·b·c·d ... *Produktform* der Gleichung (Primfaktorenzerlegung)

Die Dezimalzahl ist nur die Verschlüsselung (Code, Schablone, Matrix) der Summe von Rechengliedern (Termen) mit Zehnerpotenzen oder des Produktes von Primfaktoren!
Matrix(Schablonen)formen (unzerlegte Zahl): Kommazahl, gemischter u. gemeiner Bruch

**Zählen, Rechnen, Umformen**:

$16 - 4 - 4 - 4 - 4 = 0 = 16 + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = 0$ $-$ $+$

$\frac{16}{4} = 4$; $16 : (4 \cdot 4) = 1 = 16 \cdot \frac{1}{4 \cdot 4} = 1$ $16 \cdot \frac{1}{4} = 4$; $: \div$ $\cdot$

$\sqrt[2]{16} = 4$; $\sqrt[2]{16} : 4 = 1 = 16^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4} = 1$ $16^{\frac{1}{2}} = (4 \cdot 4)^{½} = 4$; $\sqrt[n]{x}$ $x^n$

**Vergleichen**: Gleichung (= ; Werte) ⇔ Ungleichung (≠ ; < >; Mengen)
**+ Bestimmen**:

3 Verfahren

Bestimmungsgleichung ◂– – – Funktionsgleichung (Unmenge Lösungen)
(einzelne, konkrete Lösungen)

nach Termen nach Grafik (Kurvencharakter)

(algebraische) **Potenz** -Fkt'n **Winkel** -Fkt'n (geometr., trigonometr.)
**Exp/Log** x-Exp

ganze Exp. gebroch. Exp. Bogen- Winkelmaß
**Wurzel** (Gegenf) **Arc** (Gegenf.) **Sin, cos** (zur Hypotenuse)
**tan, cot** (zur Kathede)

pos. neg. Exp. pos. neg. Radikant
**Hyperbel** reelle komplexe Lösg.

1. Grades n.ten Grades
**Lineare** **nichtlineare Fkt.**
(Gerade) (krummlinig)

---

(Abiturstufe)

**monoton** **monoton** **nicht monoton** (nicht umkehrbar)
(keine
Gegenfkt.) **umkehrbar** **beschränkt** → **umkehrbar**

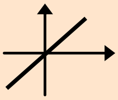
oben genannte
Funktionen alle
**stetig**

(Potenz.Fkt.) **gerade/ungerade** **periodisch** (Winkel-Fkt.)
(Symmetrie oder keine Symmetrie)

mit Funktionsfehlstellen oder Grenzwerten:
**konvergent** oder **divergent**

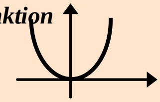
**Grundtypen** : **Potenzfunktionen** (3. Rechenstufe)

***Lineare Funktion***
$y = x^1$



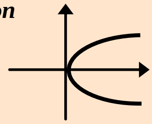
keine Umkehrung (Kehrwert von 1 bleibt 1, erste Wurzel gibt es nicht!)
$x = y^1$ (Funktion ist selber Umkehr- / „Spiegel“achse, Gerade mit 45° Anstieg)

***Quadratische Funktion***
$y = x^2$



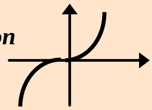
*Umkehrung*
$x = y^2$ Auflösen →

***Quadratwurzel-Funktion***
$y = \pm \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$



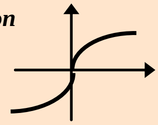
(gerade Funktion: benachbarte Quadranten → Achsensymmetrie)

***Kubische Funktion***
$y = x^3$



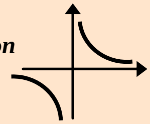
$x = y^3$ Auflösen →

***Dritte Wurzel-Funktion***
$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$



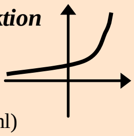
(ungerade Funktion: schräg gegenüberliegende Quadranten → Punktsymmetrie)

***Hyperbel-Funktion***
$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$



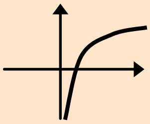
Direkte Bruchfunktion; negativer Exponent im Zähler bedeutet positiver Exponent im Nenner

***Exponential-Funktion***
$y = a^x$



$x = a^y$ Auflösen →

***Logarithmus-Funktion***
$y = \log_a x$

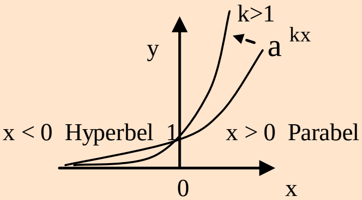


a = 10 (Dezimalzahl)
a = 2 (Binär-/Dualzahl)
a = e (natürliche, Eulersche Zahl)

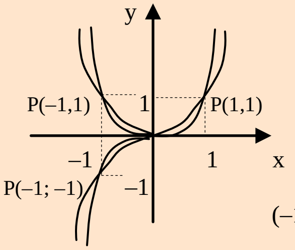
positive x = Parabelast
negative x = Hyperbelast

lg = dekadischer Log.
lb = binärer Logarithmus
ln = natürlicher Logarithmus

Exponential-Funktion im Vergleich ↔ Potenzfunktionen mit positiven ganzen Exponenten



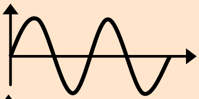

$a^0 = 1$ → P(0;1)




$x^k$ bei gleichem k:
für x > 1 aufsteilend
für x < 1> –1 flacher Verlauf (Bruchzahl)
<u>nur</u> für x = 1 bzw. –1
$1^k = 1$ → P( 1; 1)
$(-1)^k = ⎕1$ → P(–1; 1) k gerade
P(–1; –1) k ungerade

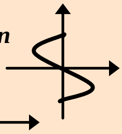
**Winkelfunktionen** (rechtwinkliges Dreieck und Kreis):

***Sinus-Funktion***
y = sin x

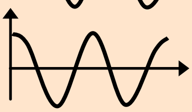


x = sin y Auflösen →

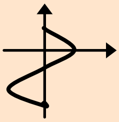
***Arkus***-(Bogenmaß-)***Funktionen***
y = arcsin x



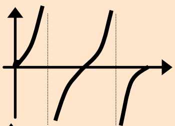
***Kosinus-Funktion***
y = cos x



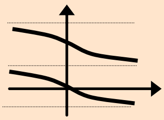
x = cos y Auflösen → y = arccos x



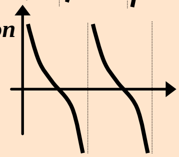
***Tangens-Funktion***
y = tan x



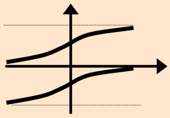
x = tan y Auflösen → y = arctan x



***Kotangens-Funktion***
y = cot x



x = cot y Auflösen → y = arccot x



# 7. Analytische Algebra (Analysis) - Funktionstheorie (Abiturstufe)

## 7.1 Übersicht (siehe auch **5.1** ; **5.4.8** und **8.2**)

- ***Funktionen***: Einteilungen, Begriffe und spezielle Ergänzungen

↓

- ***Schreibformen***:

  Koordinatendarstellung $y = f(x)$

  mit Parametern $y = f(x(t), t)$

  Vektordarstellung* $\vec{y} = f(\vec{x})$

  lineare Funktionssysteme als

  homogene $ax + by = 0$

  inhomogene $ax + by = c$

  Matrixform $(y_1, y_2, y_3) = (ax_1, bx_2, cx_3)$

  bzw. für Vektorkomponenten (siehe 8: Analytische Geometrie)

  (Vektor: gerichtete Strecke)

  Je nach Auflösung:

  allgemeine (implizite) Form: $ax + by = c$

  Varianten* : Achsenabschnittsform $1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$

  (*Abschnitt 8 Koordinatengeometrie) Punktrichtungsform $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

  Zweipunktform $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

  Normalform (explizite Form): $y = mx + n$

- ***Folgen***, ***Reihen*** (analog Zahlenreihen: Summe → Produkt) und ***Grenzwerte***

↓

- ***Differenzial*** (Kurvensteilheit = Unterfunktion) ; ***Integral*** (Flächensumme = Stamm-Fkt.)
- ***Lineare Gleichungssysteme*** in ***Matrizenform*** (Summen- und Einsetzungs-Verfahren)
- ***Wahrscheinlichkeitstheorie*** besonders ***Verteilungen*** und ***Tafelbilder***
- ***Rechnen mit komplexen Zahlen***
- ***Mathematische Beweisverfahren***

**Zusammensetzen** (/**Verketten** für Einzelglieder mit äußerer und innerer Funktion ) bzw. **Zerlegen** (Vereinzeln) von Funktionen dient zur rechnerischen ***Vereinfachung***, ***Lösungshilfe*** und besseren ***Begreifbarkeit*** (Analyse) auch der geometrischen (grafischen) Deutung (Interpretation). Voraussetzung ist die Gleichartigkeit, gleiche Definitionsmengen → 7.2.3
Bereits ab der 8. Klasse wurde dargelegt, dass die Normal- / Polynom-(mehrgliedrige) Form der Funktion ein Verknüpfen (Summieren) der Terme als Grund- (eingliedrige) Funktionen ist.
Besonders in der Differenzial- und Integralrechnung sowie der analytischen Geometrie werden Funktionen bzw. Vektoren zerlegt und wieder zusammengesetzt, genau wie in der Zahlenlehre z.B. gleichnamige Brüche zusammengesetzt oder in diese wieder zerlegt werden können.
Es ist also „nur“ eine tiefergehende Betrachtung von ***Termumformungen*** (s. 5.4 ; 5.5 ; 7.2.3.)

Zusammengesetzte und verkettete Funktionen

$F = f_1 + f_2$ $\quad F = f_1 \cdot f_2$ $\quad F = f_2^{\,f_1}$ allg. $F = f_1(f_2)$ Potenz und Wurzel bzw.

$F^{-1} = f_1 - f_2$ $\quad F^{-1} = \frac{f_1}{f_2}$ $\quad F^{-1} = \sqrt[f_1]{f_2}$ allg. $F = f_1(f_2)$ Logarithmus als ***verkettete*** F

$F = f_1(f_2)$ → $f_1$ äußere Funktion, $f_2$ die innere Funktion.

In der Differenzialrechnung wird $f_2$ oft durch einen Parameter ersetzt (substituiert)
$F^{-1}$, $\bar{f}$ Symbole der Umkehrfunktion ($F^{-1}$ ist nicht gleichzusetzen mit negativem Exponent!)
$\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ oder **u**, **v** - mögliche Symbole für die Einzelglieder (den Grundfunktionen).

**Umkehrfunktionen**
wie beim letzten Beispiel sind ein selbständiger Abschnitt in den Schulbüchern für Anwendungen von Integration und Differenziation. Um die oft schwerverständliche Symbolik und Zuordnung zu verstehen, soll hier logisch einfach noch einmal festgestellt sein:

| ***Funktion*** | ⇔ | ***Umkehrfunktion*** |
|---|---|---|
| $y = f(x)$ □ $x = \overline{f}(y)$ | ⇔ | $y = \overline{f}(x)$ □ $x = f(y)$ |

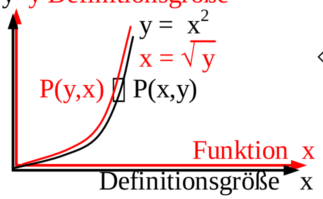
***einfach negiert***: nur Funktion — nur Variable
nur Variable — nur Funktion

$y = x^2$ □ $x = \sqrt[2]{y} = y^{\frac{1}{2}}$ ⇔ $y = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$ □ $x = y^2$ ( $\sqrt[2]{x} = y^2$ )

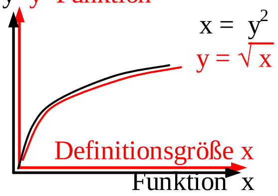
| doppelt negiert: | Variable + Funktion | Variable + Exponent | Variable + Funktion | Variable + Exponent |
|---|---|---|---|---|

$y = \sin x$ □ $x = \arcsin y$ ⇔ $y = \arcsin x$ □ $x = \sin y$

***doppelt negiert*** (3. Rechenregel) ***ist eine gleiche Funktion*** (identische Kurve)!




⇔




### 7.3.2 Reihen, Partialsummen und Partialsummenfolgen (Summe der Folgeglieder)

**Übersicht:**

| ***Arithmet. Folge*** → | | ***Geometr. Folgen*** : | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Mal-Folge | Faktor-Folge | | Fakultät ! | Potenz-F. | Binompotenz-F |
| $\boxed{a_1 = a_1}$ | | $d = a$ | | $a_1 = a_1 \cdot q^0$ | $a_1 = 1;\ q = n$ | $q = a$ | $a_1 = (a + b)^1$ |
| $a_2 = a_1 + d$ | $= a_1 + 1 \cdot d$ | $a_2 = 2 \cdot a$ | $a_2 = a_1 \cdot q$ | $= a_1 \cdot q^1$ | $a_2 = 1 \cdot 2$ | $a_2 = a^2$ | $a_2 = (a + b)^2$ |
| $a_3 = a_2 + d$ | $= a_1 + 2 \cdot d$ | $a_3 = 3 \cdot a$ | $a_3 = a_2 \cdot q$ | $= a_1 \cdot q^2$ | $a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ | $a_3 = a^3$ | $a_3 = (a + b)^3$ |
| $\boxed{a_{n+1} = a_n + d}$ | $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$ | $\boxed{a_n = n □ a}$ | $\boxed{a_{n+1} = a_n □ q}$ | $\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$ | $\boxed{a_n = n!}$ | $\boxed{a_n = a^n}$ | $\boxed{a_n = (a + b)^n}$ |
| rekursiv | explizit | explizit | rekursiv | explizit | explizit | explizit | explizit |
| | $a_n = s_n$ | + | | | | | (Pascalsches △) |

***Reihen***: $\boxed{s_n = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i$ ($s_n$ - ***Summe*** <u>aller</u> einzelnen Folgeglieder)

## 7.9 Wahrscheinlichkeitslehre II (Grundlagen siehe 5.6)

### 7.9.1 Übersicht

Aufbauend auf den Grundlagen in 5.6 werden relativ ***schwierige Problemstellungen*** betrachtet und es kommt eine ***enorme Vielgestaltigkeit*** hinzu. Neue bildhafte Hilfsmittel sind neben der Tabelle und dem Baumdiagramm besonders die Mehrfeldtafel und die Verteilungskurven. Letztere sind auch als Tabelle im Tafelwerk zu ersehen.
Besonders wichtig ist bei der Kompliziertheit der Aufgaben, den ***richtigen Ansatz*** aus der ***richtigen Problematik*** zu finden! Dazu soll der nachfolgende Lösungsablauf helfen.
Bei der immensen Vielfalt der Berechnungsmöglichkeiten ist nur eines hilfreich:
Eine ganz klare Einordnung in ***einstufige*** bzw. wiederholt einstufige ***Vorgänge*** (***unbedingte P***) mit unabhängigen Ereignissen oder in die ***mehrstufigen Vorgänge*** mit abhängigen Ereignissen (***bedingte P***) geben zu können!
Das für mehrstufige Versuche charakteristische Baumdiagramm wird irritierend auch für einstufige Versuche verwendet, verständlich für die bildhafte Erstellung der möglichen Ergebnisse, aber ein falsches Bild, da vom Start aus immer nur eine einzige Verteilungsverzweigung besteht!
Für jeden Normalschüler soll im Folgenden die oft undurchsichtige und schwerverständliche Theorie etwas klarer strukturiert werden, damit ein „roter Leitfaden“ zu erkennen ist. Eine Wahrscheinlichkeit der Erfolgsquote soll aber nicht erfragt werden.

Allgemeiner Lösungsablauf :

**1. *Aufgabe analysieren***
In jeder Aufgabe geht es um Ergebnisse, Ereignisse oder Zufallsgrößen. Letztere sind meist anders definierte Ereignisse von Ereigniskombinationen z.B. Gewinn oder Treffer. Die innerste Möglichkeit ist dabei ein Treffer mit einer Auswahl aus einer Auswahl aus einer Gesamtmenge. Alles sind Mengenzusammenstellungen aus der Kombinatorik. Sie werden **n-*Tupel*** genannt. Eine Tupelschreibweise für Zufallsgrößen ist z.B. das 5-Tupel ($x_1\ \overline{x}_2\ x_3\ \overline{x}_4\ \overline{x}_5$).
Jede ***Aufgabe*** ist prinzipiell ein ***Verteilungsproblem***. Der 1. Entscheidungsschritt ist deshalb immer, dessen Art und Weise zu erkennen und damit die Einordnung:

a) Wird gleichzeitig aus einem „Topf“ verteilt (***einstufiger Vorgang***, unbedingte P)
b) Wird diese Verteilung immer wieder wiederholt (***einstufige Versuchsserie***, Normal-/Gauß-Verteilung, bei Binärereignissen A-$\overline{A}$ Binominal-/Bernoulli-Verteilung oder Bernoulli-Kette)
c) Wird nacheinander aus dem Topf verteilt (***mehrstufiger Vorgang***, abhängige E, bedingte P)
d) Sind beim mehrstufigen Vorgang noch andere zufallsbedingte Funktionsparameter im Spiel, diese jedoch mit festen Größen einkalkulierbar → Markowsche Ketten, stochstische Prozesse)

**2. *Was ist erfragt?***
Mit Ausnahme der Verteilungskurven, die meist die relative Häufigkeit (***statistische P***) in Abhängigkeit der Versuchsanzahl N widerspiegeln, geht es in fast allen Fällen um die ***klassische Wahrscheinlichkeit***, deren ***gefragte Fälle*** bzw. ihre Berechnung den umfangreichsten Bereich in der Wahrscheinlichkeitstheorie in Verbindung mit der ***Kombinatorik*** ausmachen!
Ein Denkproblem ist oft die Zuordnung der Verteilungssachen: 3 Karten werden auf 15 Schüler verteilt. 3 Karten sind unrelevant, die Auswahl (Kombination) ist 3 Schüler von 15 Schülern!

*Klassische* Wahrscheinlichkeit: $\boxed{\mathbf{P}(E) = \frac{k}{n}}$ k - gefragte, n - mögliche Fälle

*Statistische* Wahrscheinlichkeit $\boxed{\mathbf{P}(E) = \frac{H}{N}}$ H - Absolute Häufigkeit, N-Versuchsanzahl

*Axiomatische* Wahrscheinlichkeit (nach Kolmogorow):
Alle Zufallsereignisse müssen zu dem selben System gehören.

**3. *Welche Vorgehensweise?***
Bei einfachen und übersichtlichen Fällen wird sofort die ***Formel*** der klassischen Wahrscheinlichkeit verwendet, wenn die gefragten Fälle leicht abgezählt oder kombinatorisch ersichtlich ermittelt werden können. Die Ersichtlichkeit der 6 Kombinatorik-Formeln ist aber oft die Schwierigkeit und bei bestimmten Aspekten müssen diese auch noch abgewandelt werden. Bei schwierigen Aufgaben, aber immer nur für kleine Ereigniszahlen, wird die ***Tabelle***, die ***Mehrfeldtafel*** (für 2 –3 duale Ereignisse) oder bei abhängigen Ereignissen das ***Baumdiagramm*** als Hilfsmittel gewählt. Dabei können allgemein die Ereigniskombinationen eingeschrieben werden um bildhaft leichter die richtigen Formeln zu finden oder bei nicht so umfangreichen direkt die Einzelwahrscheinlichkeiten, um in deren UND bzw. ODER -Verbindungen gleich die Gesamtwahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Liegen statistische Daten vor, geht die Fragestellung zu den ***Verteilungskurven*** hin mit der Statistischen Wahrscheinlichkeit.

**4. *Verteilungskurven***
Ein eigenständiger Bereich, in dem es um umfangreiche statistische Untersuchungen geht wie Qualitätstests, Optimierung der Logistik oder wirtschaftliche, verwaltungstechnische oder politische Prognosen. Aus ihnen werden bestimmte Merkmale/Größen wie ***Erwartungswert***, ***Streuung*** oder ***Standardabweichung*** herausgefiltert, um entsprechende Bewertungen oder Prognosen geben zu können. Sie gehören eindeutig zum ***einstufigen Prozess***, der in n Versuchen (n-mal) wiederholt wird.

**5. *Formeln***
Die „***Ereignisalgebra***“ sind alle Formeln/Funktionen, die aus der ***Kombinatorik*** für die zusammengestellten Tupel eingesetzt bzw. aus ihnen hergeleitet werden. Dies sind die Permutation sowie die Variation und Kombination mit und ohne Wiederholung. In diesen 6 Formeln müssen wiederum 2 weitere Aspekte Berücksichtigung finden:

1. Liegt ein einstufiger oder mehrstufiger Vorgang (Ereignisabhängigkeit) vor?
   Der ***einstufige*** bedeutet gleichzeitig, dass ein ***ideeller Tupel*** vorliegt. Wenn das selbe Element mehrmals gezogen werden kann, ist es ein gedankliches Zählen und in diesem Fall „mit Wiederholung“. Ein „***reales***“ Elemente **-*Tupel*** wird beim ***mehrstufigen*** Vorgang erzeugt. Es kann nicht mehr zusammengestellt werden, als im „Topf“ real vorhanden ist. Fast ausschließlich geht es aber nicht um die einzelnen Elemente, sondern um ihre Eigenschaften. Meist sind gleiche Eigenschaften bei mehreren Elementen vorhanden (5 <u>rote</u> Kugeln) und damit auch „mit Wiederholung“ möglich.

2. Die gefragten Ereignisse können sein:
   a) Eine Tupelanzahl, die gefragten Charakter besitzt (***Auswahl*** oder ***Komplexereignis***)
   b) Ein oder mehrere Tupel, bei denen es um den Elementecharakter innerhalb des Tupels geht, z.B. Trefferquote für 2 rote Kugeln oder 4er bei 6 aus 49 usw. (***Auswahl aus einer Auswahl***). Hierbei ist formelmäßig zu beachten, dass zur Berechnung der inneren Auswahl noch der Faktor der äußeren Auswahl hinzu kommt zur ***totalen Wahrscheinlichkeit*** zur äußeren möglichen Gesamtmenge einschließlich aller Gegenereignisse $q = \bar{p} = (1 - p)$ . Sie drückt sich

in der Produktregel aus mit $\boxed{P = p^k \cdot \bar{p}^{\,n-k} = p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$ (bei Zufallsgrößen)
in der Summenregel aus mit $\boxed{P = P(A) + P(\bar{A}) = P(A) + (1 - P(A))}$

Oft wird vom ***Urnenmodell*** aus die Theorie ***einstufig*** (mit) und ***mehrstufig*** (ohne Zurücklegen) erklärt und aufbauend folgend die
1. Pfadregel , die UND -Verknüpfung (Produkt) zu <u>einem</u> Ereignis (1 n-Tupel) und die „2. Pfadregel“, die ODER -Verknüpfung (Summe) <u>mehrerer</u> Pfade zum Komplexereignis.

## 7.6 Lineare Gleichungssysteme mit Matrizen (Funktionen und Vektoren)

**Zielstellung**:
Es soll erkannt werden, dass alle funktionellen Zusammenhänge auf die vielfältigste Weise dargestellt und interpretiert werden können, über die Matrizenrechnung aber eine allseitig anwendbare mathematische Rechenweise existiert, die auf der Grundlage der Elementarmathematik (1. bis 10. Klasse) eine konkrete Berechnung für alle „Probleme“ durchführt.
Sie muss unterschieden werden in die ***Matrixumformung*** für normales LGS (6.7.2 Summen- und 6.7.3 Einsetzungsverfahren) sowie in die echte ***Matrizenverrechnung*** (6.7.4 → Vektoren)!
Die Fähigkeit zur Verallgemeinerung (Abstrahierung) konkreter Objekte oder Systeme zu abstrakten Strukturen bzw. Modellen ist dabei der Hauptkern.

### 7.6.1 Begriffsbestimmungen

**LGS**
Kürzel für Lineare Gleichungssysteme. Exakter handelt es sich jedoch um ***lineare Funktionssysteme*** mit mindestens 2 *funktionell zusammenhängenden Funktionen*, die eine ***gemeinsame Lösung*** suchen, den gemeinsamen Schnittpunkt der Funktionskurven bzw. die Nullstelle einer sich ergebenden Gesamtfunktion.

**Matrix**
ist ein einheitliches ***Zahlenschema*** (verschlüsselte Form) für Funktionssysteme in Gleichungs-, Tabellen- oder Grafenform, das zur Erkennung der Codierung in ***runde Klammern*** gefasst wird. Dies gilt auch für wirtschaftliches Rechnen, wo die benötigten Daten oft in Tabellen vorliegen. Die einfachste Erklärung ist das „Element“ ***Zahl***, die ja bekanntlich die Funktion von 10 Ziffern ist, sie ist eine *Ziffernmatrix*. Allgemein für alle Anwendungen wird jedoch konkreter von der ***Koeffizientenmatrix*** gesprochen, denn nur die Koeffizienten vor den Variablen (hier die Stellenwerte / Zehnerpotenzen) werden herausgeschrieben:

Zahl (Zifferncode): $345 = 3\cdot 100 + 4\cdot 10 + 5\cdot 1$ $\quad (3\ 4\ 5)$ Zeilenmatrix
$a\cdot 10^2 + b\cdot 10^1 + c\cdot 10^0$ $\quad (a\ b\ c)$ (1 Zeile)

Gleichungssystem:
$$\begin{aligned} y_1 &= a_1\cdot x_1 + a_2\cdot x_2 + a_3\cdot x_3 \\ y_2 &= b_1\cdot x_1 + b_2\cdot x_2 + b_3\cdot x_3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
Spaltenmatrix (Ergebnismatrix) (1 Spalte)

Vektorzerlegung :
$$\begin{aligned} \vec{V_1} &= a_1\vec{x} + a_2\vec{y} + a_3\vec{z} \\ \vec{V_2} &= b_1\vec{x} + b_2\vec{y} + b_3\vec{z} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Bilanzierung/Optimierung (Aufwand-Nutzen → Wirtschaftsmathematik) :
$$\begin{aligned} W_1 &= w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 \\ W_2 &= w_{21}y_1 + w_{22}y_2 + w_{23}y_3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Maximum}$$

$W_1$ Gesamtwert der Produktionslinie 1 mit Bruttowerten $w_n$ der Einzelprodukte $x_n$
$W_2$ Gesamtwert der Produktionslinie 2 mit Bruttowerten $w_{kn}$ der Einzelprodukte $y_{kn}$
Die gesamte Warenproduktion $W_1 + W_2$ muss ein Maximum werden.
Größtenteils liegt lineare Optimierung vor. Wird jedoch z.B. die menschliche Leistung in die Berechnungen einbezogen, die ja weder über den Tag konstant ist, noch linear abnimmt, liegen nichtlineare Funktionen (Produktionsfaktoren) vor. In bestimmten Sonderfällen kann aber ein nichtlineares Funktionssystem in ein lineares umgeformt und über Matrizen gelöst werden, wenn durch das Summenverfahren die nichtlinearen Glieder wegfallen.

***Zeilenmatrix***: Die Matrix einer Gleichung, Zahl (345) oder eines Vektors hat nur <u>eine Zeile</u>
***Spaltenmatrix***: Die Matrix <u>einer einzigen Spalte</u>, z.B. Ergebnismatrix oder ein Vektor

***Determinante***: Ist der ausgerechnete <u>Gesamtwert einer Matrix</u> (des Koeffizientenschemas), der in die vorgegebenen Berechnungsformeln für die einzelnen Variablen eingesetzt wird → siehe „*Cramersche Regel*“, welche dem Einsetzungsverfahren entspricht → Der Gesamt„wert“ (rechte Seite) einer explizit gegebenen Variablen wird in der nächsten Funktion für diese eingesetzt. Schreibformen sind **|A|** oder **det (A)** der Matrix A

**Linearkombination**
Entspricht der Normalform einer linearen Gleichung / Funktionsgleichung:
Bei Vektoren die Vektorensumme/~Differenz bzw. ein aus seinen Koordinatenkomponenten zusammengesetzter Vektor: Elementarvektor 48 = Linearkombination aus $4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

**Linearfaktoren**
Die Zahl als Code bzw. Ergebnis ist gleichbedeutend mit der decodierten (aufgeschlüsselten) Produktform (Primfaktoren): $48 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$
Die „Primfaktoren“ einer Funktionsgleichung heißen *Linearfaktoren* und sind oft in Klammern zu setzende Binompotenzen 1. Grades (linear).
Z.B. besteht das Ergebnis einer Polynomdivision aus Linearfaktoren

$y = f(x) = (x - n_1)^1 \cdot (x - n_2)^1$ → quadratische Gleichung aus Linearfaktoren

$\{ = x^2 - (n_1+n_2)\, x + n_1 n_2 \}$ → Normalform ($n_1$, $n_2$ - Nullstellen)

**Lineare Operatoren**
Ein Operator symbolisiert mathemat. Operationen wie bei der Summe das „+“ oder „Σ“, logische Operatoren wie UND (□) und ODER (□), geometrische Operatoren wie „Verschiebung“ und „Drehung“ (***Abbildungen***). In der Funktionstheorie bezeichnet man eine festgelegte ***Zuordnungsvorschrift***, also eine Funktion selber als Operator, wenn sie Werte oder Größen aus verschiedenen Bereichen („Räumen“) in dieser Funktion (gemeinsamen „Raum“) ***abbildet***.
Ein <u>linearer</u> Operator (1. Grades) macht das ***verzerrungsfrei*** : $F(A,B) = \mathbf{A}^{\mathbf{1}}(x)\, x + \mathbf{B}^{\mathbf{1}}(y)\, y$

**Gesamtlösung eines Funktionssystems**:

Wie aus 5.4 bekannt, werden Funktionssysteme über das **Summenverfahren** oder das **Einsetzungsverfahren** zur Bestimmungsgleichung und damit konkreten Werteberechnung gebracht.
Das Nullstellenverfahren ist ja die konkrete Lösung <u>einer</u> Funktion, also nicht des Systems. Durch Reduzierung der Variablen über beide Verfahren (zusammengefasste, „erweiterte“ Gleichungen) ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für <u>eine</u> Variable. Diese wird mit ihrem errechneten Wert zurückgehend in die letzte Funktion eingesetzt und damit konkret die 2. Variable bestimmt, diese wieder in die davor liegende Gleichung und bestimmt die nächste Variable usw.

**7.6.2. „Gaußsches Verfahren“** (Summenverfahren mit einer Matrix)

$$\begin{array}{rrcl} & y_1 & = & a_1x_1 + a_2x_2 \\ + - & \cancel{y_2} & \cancel{=} & \cancel{a_1x_1 + b_2x_2} \quad E(-1) \\ \hline & y_1 - y_2 & = & 0 \;+ (a_2 - b_2)\, x_2 \end{array}$$

In 5.4 lagen zur Anwendung dieses Verfahrens bereits 2 gleichgroße gleichartige Glieder (gleiche Spalte, hier $a_1x_1$) vor, so dass die Summe oder Differenz beider Gleichungen zur Reduzierung einer Variablen führte. Um im Beispiel mit der Summe zu rechnen, muss man nur eine Gleichung mit –1 multiplizieren, was für das zu eliminierende Glied $a_1x_1 + (- a_1x_1)$ das Gleiche bedeutet. Solange Rechenregel 3 (beide Gleichungsseiten!) beachtet wird, erweitert man nur die Gleichung. Genauso wird das System nur erweitert, wenn wie oben zwei Gleichungen durch Summe eine dritte ergeben (Linearkombination), in der ja beide enthalten sind (Prinzip des Summenverfahrens). Eine davon kann dafür gestrichen werden!

Diese 2 Rechenvorgänge hintereinander mehrmals angewendet, durch Hinein***multiplizieren*** einer Zahl ein gleichgroßes Glied zu schaffen und dieses durch ***Differenz*** /***Summe***) mit einer 2. Gleichung zu eliminieren (1Variable weniger), führt zur Lösung auch jeden größeren Systems.

**Die normale Lösung des LGS wird zur Matrix-Umformung**

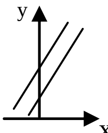
Auf die Matrix umgesetzt, stehen also an den Stellen der herausgefallenen Variablen überall Nullen. Vor dem Gesamtaufwand einer Lösung untersucht man mit diesem Prinzip das System auf Lösbarkeit.

**Kriterium** für die **Lösbarkeit** eines linearen Funktionssystem:
2 Probleme werden dabei näher untersucht: Existiert überhaupt eine Lösung und wenn ja, kann das verwendete Verfahren diese Lösung liefern?
Ein System ist nur lösbar, wenn durch die 2 Rechenvorgänge eine Zeile mit Nullen entsteht, d.h. eine ***Zeilennullmatrix*** mit dem Ergebnis 0 auf der anderen Seite. → ( 0 0 0 ) = ( 0 )

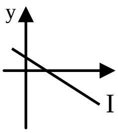
$$\begin{array}{rl} & y_1 = 3x^1 + 4(x^0) \\ - & \underline{y_2 = 3x^1 + 5(x^0)} \\ & \quad 0 \qquad 0 \quad -1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

In Spalte 2 liegt ein gleicher Wert (3) vor. Differenz ergibt 0
In Spalte 3 ist die Differenz 4 –5 = –1 , aber keine 0
→ keine Lösung des Systems möglich.

Grafisch erklärt: ***Parallelität***



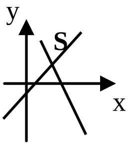

Aus der linearen Funktion y = mx + n wissen wir, dass bei gleicher Steilheit (m=3) hier 2 parallele Geraden vorliegen, die bei 4 bzw. 5 die y-Achse schneiden.
Bei Parallelität kann es keinen Schnittpunkt/ ***keine gemeinsame Lösung*** geben!
Man spricht von ***Unvereinbarkeit*** oder ***widersprüchlichen*** Funktionen.




$$\begin{array}{lrl} \text{I} & x + 2y = 2 & | \cdot 3 \\ \text{II} \; - & \underline{3x + 6y = 6} & \\ & (\,0 \quad\; 0\,) \;\; (0) & \end{array}$$

I und II → $\boxed{y = -0{,}2\,x + 1}$

***Idendität*** :
→ II ist ein Vielfaches von I (***linear abhängig***) und damit wertmäßig identisch mit I, analog wie ein Bruch durch Erweitern oder Kürzen seinen Wert nicht ändert. Die Differenz beider Gleichungen ergibt die Zeilennullmatrix → das „System“ ist lösbar! Die 2 Grafen sind kongruent, da es nur 1 <u>einzige</u> Funktion ist und „es“ hat ***unendlich viele gemeinsame Lösungen*** (gleiche Wertepaare).




***Normalfall***:
Alle anderen Funktionssysteme zwischen den 2 vorgenannten Extremen ergeben ***genau eine Lösung***, den Schnittpunkt aller Geraden **S**(x, y).
Die Funktionen müssen dafür aber ***unabhängig*** und ***widerspruchsfrei*** sein!

$$\begin{array}{rl} \text{Beispiel:} \quad \text{I} & 2x + 1y + 3z = 20 \\ \text{II} & 1x + 2y + 1z = 11 \\ \text{III} & \underline{\;x - \;\; y + 2z = \;\,9} \\ \text{I} - \text{II} - \text{III} & \;0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \\ 0 \end{array}$$

gemeinsame Lösung für x = 3
y = 2
z = 4

Das Lösungskriterium ist zwar erfüllt, allerdings ist Gleichung I die Linearkombination von II + III und damit bereits eine Erweiterung des Ausgangssystems mit nur 2 <u>unabhängigen</u> Funktionen aber 3 Variablen

$$\begin{array}{lrrrr} \text{II} & 1 & 2 & 1 & 11 \\ \text{III} & 1 & -1 & 2 & 9 \end{array}$$

und damit ***rechnerisch nicht lösbar***.
Es müssen mindestens gleichviel Gleichungen vorliegen, wie es Variable gibt! Die mögliche grafische Lösung mit Raumkoordinaten dürfte zeichnerisch sehr schwierig sein!

**Matrixrechnung** → Die Matrix wird in die ***Zeilenstufenform*** (Dreiecksmatrix) gebracht:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & 3x + y + 2z = 13 \\ \mathrm{II} & x + 2y + 3z = 10 \\ \mathrm{III} & 4x - 2y + 4z = 12 \end{array}$$

Von links oben werden diagonal nach rechts unten „***führende Einsen***“ geschaffen und ***darunter Nullen***. Zur Vereinfachung oder Abkürzung können Zeilen (Gleichungen) vertauscht werden (hier II mit I). Nicht mehr benötigte Zeilen werden mit den erweiterten überschrieben!

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&2&3\\3&1&2\\4&-2&4\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}10\\13\\12\end{matrix}\quad\begin{matrix}|\cdot 3\\ |\ \mathrm{I}-\mathrm{II}\\ \phantom{x}\end{matrix}$$

Ziel: **0** in Zeile II / Sp.1 → Z. I wird gedanklich mit 3 erweitert und Zeile II von I abgezogen (I – II → 0). Z. II wird mit dieser neuen Linearkombination (Gleichungsdifferenz) überschrieben! Zeile I ( nur für Rechnung erweitert) bleibt mit **1** erhalten!

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&2&3\\\mathbf{0}&5&7\\4&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\17\\12\end{pmatrix}\begin{matrix}\phantom{x}\\ |:5\\ |:4 \text{ und } \mathrm{I}-\mathrm{III}\end{matrix}$$

Entweder I · 4 und I – III oder siehe Zeile III : 4
2 Schritte: 1. In Z.II /Sp. 2 (Zahl 5) führende **1** schaffen
2. An 1. Stelle (4) eine **0** schaffen, alte III überschreiben

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&2&3\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&7/5\\\mathbf{0}&5/2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\17/5\\7\end{pmatrix}\begin{matrix}\phantom{x}\\ |\cdot 5/2 \text{ und}\\ |\quad \mathrm{II}-\mathrm{III}\end{matrix}$$

Z II gedanklich mit dem Faktor unter der 1 ($^5/_2$) erweitern, um darunter (Z III / Sp.2) eine **0** zu schaffen

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&2&3\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&7/5\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\17/5\\3/2\end{pmatrix}\begin{matrix}\phantom{x}\\ \phantom{x}\\ |\cdot 2/3\end{matrix}$$

In Z. III /Sp. 3 mit Kehrwert die letzte **1** schaffen

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&2&3\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&7/5\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\17/5\\1\end{pmatrix}\rightarrow$$

1. ***Rücktransformation*** nach führenden Variablen :

$x + 2y + 3z = 10$ $\qquad \underline{x} = 10 - 4 - 3 \underline{= 3}$

$y + {}^7/_5\, z = {}^{17}/_5$ $\qquad \underline{y} = {}^{17}/_5 - {}^7/_5 \underline{= 2}$ (einsetzen)

$z = 1$ (einsetzen)

2. ***Reduzierte Zeilenstufenform*** (Einheitsmatrix):

→ Auch oberhalb der führenden „Einsen“ Nullen schaffen, so dass direkt die Größe der Variablen aus der Ergebnismatrix abgelesen werden kann!

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array}\begin{pmatrix}1&\mathbf{2}&3\\0&1&\mathbf{7/5}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\17/5\\1\end{pmatrix}\begin{matrix}\phantom{x}\\ |\cdot(\mathbf{-2}) \text{ und } \mathrm{II}+\mathrm{I}\\ |\cdot(-\mathbf{7/5}) \text{ und } \mathrm{III}+\mathrm{II}\end{matrix}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array}\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}&\mathbf{1/5}\\0&1&\mathbf{0}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16/5\\2\\1\end{pmatrix}\begin{matrix}\phantom{x}\\ \phantom{x}\\ |\cdot(-\mathbf{1/5}) \text{ und } \mathrm{III}+\mathrm{I}\end{matrix}\rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}}_{\text{(Einheitsmatrx)}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}\underline{x = 3}\\\underline{y = 2}\\\underline{z = 1}\end{matrix}$$

***Lösungsaufgabe***: Hat das System der 3 Zahlen 123, 492 und 246 eine gemeinsame Lösung?

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array}\begin{bmatrix}8\\2\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{array}{c}\begin{matrix}\mathrm{H}&\mathrm{Z}&\mathrm{E}\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&2&3\\4&\underline{8}&\underline{1}2\\2&4&6\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}=\\=\\=\end{matrix}\begin{pmatrix}123\\492\\246\end{pmatrix}\ \begin{matrix}|\cdot 8\\ \cdot 2\\ \cdot 4\end{matrix}\ \rightarrow\begin{pmatrix}8&16&24\\8&16&24\\8&16&24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}984\\984\\984\end{pmatrix}\rightarrow\begin{matrix}\mathrm{I}-\mathrm{II}&0&0&0\\\mathrm{II}-\mathrm{III}&0&0&0\\\mathrm{III}-\mathrm{I}&0&0&0\end{matrix}$$

Die gemeinsame Lösung ist das gemeinsame Vielfache 984! Durch Erweitern jeder Zahl (Gleichung) mit einem Zahlenfaktor wurde für jeden Stellenwert (jedes Glied) ein gleichgroßer Wert geschaffen, der durch die Differenz mit je einer anderen Zeile (Gleichung) verschwindet (zu 0 wird). Im Zahlenbeispiel ist die gesamte Matrix Null, da in jeder Zeile das gleiche Ergebnis steht. Bei 3 Funktionsgleichungen können für die Variablen $x_1$, $x_2$, $x_3$ oder für das geometrische Verständnis x, y, z (Raumkoordinaten eines Punktes) unterschiedliche Werte stehen. Ein Raum-(Schnitt-)Punkt (oder Tripel) ist ja die gemeinsame Lösung der 3 Funktionsgleichungen.

**7.6.3 Cramersche Regel** (Einsetzungsverfahren mit Matrixwerten / Determinanten)

Im Gegensatz zum Summenverfahren, wo über gleichgroße Glieder die Variablen reduziert werden, wird beim Einsetzungsverfahren der ***gesamte Wert einer Variablen*** ($x_1$) für diese in der anderen Gleichung ***eingesetzt*** (linke Seite):

konkret:

I $\quad 2x_1 + 4x_2 = 10 \quad \rightarrow \quad x_1 = -2x_2 + 5$

II $\quad 3x_1 + 5x_2 = 12 \qquad 3(-2x_2 + 5) + 5x_2 = 12$

$$-6x_2 + 15 + 5x_2 = 12$$

$$-x_2 = 12 - 15$$

$$\underline{x_2 = 3}$$

allgemein

I $\quad a_1x_1 + a_2x_2 = c_1$

II $\quad b_1x_1 + b_2x_2 = c_2$

$$\triangleq \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$x_2$ in I eingesetzt $\quad 2x_1 + 4 \cdot 3 = 10$

$$\underline{x_1 = -1}$$

Matrixrechnung:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3$$

$$\underline{\mathbf{D} = -2}$$

$$\boxed{x_2 = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E} \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = -½\,(24 - 30)}$$

$$\underline{x_2 = 3}$$

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E} \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = -½\,(50 - 48)$$

$$\underline{x_1 = -1}$$

I: Nach $x_1$ umgestellt wird hier der ***Koeffizient*** von $\mathbf{x_2}$ und der ***Ergebnis-***Wert halbiert (rot). Die Matrixrechnung (rechts) behält die Werte bei, überschreibt dafür aber die $\mathbf{x_2}$ ***- Spalte*** mit der ***Ergebnis-***Spalte. Im linken LGS wird für die Lösung der Koeffizient vor $x_2$ geteilt. In Ihm sind ***alle Koeffizienten*** (die Matrixwerte) verrechnet. Rechts wird gleichfalls dieser Gesamtwert der ***Koeffizientenmatrix***, die Determinante D = – 2 geteilt bzw. der ***Kehrwert*** eingesetzt.

Determinieren heißt eineindeutig definieren (exakt bestimmen).

Gegenüber der Matrix, die nur eine schematische Zusammenfassung der Koeffizienten ist, bedeutet die Determinante immer eine bestimmte Zahl/Wert. Zur Unterscheidung schreibt man sie als quadratisches Schema in ***einfachen senkrechten Strichen***. Die quadratische Form ergibt sich aus der Notwendigkeit, dass gleichviel Gleichungen existieren müssen, wie es Variable gibt:

1. Die Determinante der Variabelenmatrix bestimmen über die Differenz der „***Kreuzprodukte***"
   (Näheres siehe Vektorprodukt unter 8.3.2 und unten folgende Determinantenberechnung)

   $$D = \begin{vmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{vmatrix} = a_1\,b_2 - a_2\,b_1$$ Die Determinante wird in der 1. Zeile von <u>links</u> her bestimmt!

2. Diese Determinante wird in die Bestimmungsgleichung einer Variablen als <u>Kehrwert</u> eingesetzt und mit der Determinante aus den Koeffizienten der anderen Variablen (Spalte) und der Ergebnisspalte multipliziert (wieder Differenz der Kreuzprodukte).

$$\boxed{\mathbf{x_1} = \frac{1}{D}\,\mathrm{E} \begin{vmatrix} c1 & a2 \\ c2 & b2 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\,\mathrm{E}(c_1b_2 - a_2c_2)}$$

$$(x_1) \quad x_2$$

$$\boxed{\mathbf{x_2} = \frac{1}{D}\,\mathrm{E} \begin{vmatrix} a1 & c1 \\ b1 & c2 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\,\mathrm{E}\,(a_1c_2 - c_1b_1)}$$

$$x_1 \quad (x_2)$$

***Beachte***! Die Ergebnisspalte ($c_1c_2$) ***überschreibt*** die Koeffizienten der <u>gesuchten</u> Variablen (x)!

Das kreuzweise Multiplizieren der Elemente gilt auch für größere Determinanten, wobei sich verschiedene Handlungsweisen herausgebildet haben, die jedoch im Grunde identisch sind:

**Cramersche Regel**: Eine Determinante wird bestimmt durch die Summe aller möglichen Elementarprodukte, wobei deren ***Faktoren aus unterschiedlichen Zeilen und Spalten*** (verschiedenen Koordinaten) stammen müssen.

Dieser Charakter des Vektor-(Kreuz-)-Produktes wird durch ***diagonale Produktbildung*** erreicht.
Die Permutation n! (s. 5.6.2) ergibt die Anzahl der Elementarprodukte einer n x n - Matrix.

$$\boxed{D = \Sigma\,(-1)^k\, a_{1\,\mathbf{j}}\, a_{2\,\mathbf{j}}\, a_{3\,\mathbf{j}} \,.\,.\, a_{ij} \,\,.\,.\, a_{nn}} \quad \text{mit } k = i + j$$

Die Zeilenindizes i bilden die natürliche Zählfolge (im Beispiel die Diagonale nach unten).
Die Spaltenindizes **j** sind alle verschieden und bilden eine Permutation der n Faktoren.

$$\begin{array}{c|ccc|cc}
 & + & + & +\;- & - & - \\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
 & - & - & -\;\;+ & + & +
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{D} = & +\; a_{11}\mathrm{E}a_{22}\,a_{33} & +\; a_{12}\mathrm{E}a_{23}\,a_{31} & +\; a_{13}\mathrm{E}a_{21}\,a_{32} \\
 & -\; a_{11}\mathrm{E}a_{23}\,a_{32} & -\; a_{12}\mathrm{E}a_{21}\,a_{33} & -\; a_{13}\mathrm{E}a_{22}\,a_{31} \\
 & \quad (A_{11}) & \quad (A_{12}) & \quad (A_{13})
\end{array}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) \;-\; a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}) \;+\; a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31})$$

Diese 3-reihige Determinante hat also 3! = 6 Produkte mit je 3 Faktoren, deren 3 Spaltenindizes die 6 Permutationen bilden. Jedes Produkt enthält nur je ein Element (Faktor) aus jeder Zeile und jeder Spalte.

1. Betrachtung:
Determinante ohne letzte Spalte kopieren, so dass alle diagonal nach ***rechts*** unten gerichteten ***positiven*** Elementarprodukte (rechts 1. Zeile) bzw. alle diagonal nach ***links*** unten gerichteten ***negativen*** Elementarprodukte (rechts 2. Zeile) herausgeschrieben werden können.

2. Betrachtung: ***Unterdeterminanten***

Die oben rechts in der **3. *Zeile*** ausgeklammerten Faktoren, die Elemente der 1. Determinantenzeile, ergeben eine andere Sicht- und Handlungsweise.
Mit $a_{11}$ dürfen ihre nächsten 2 Faktoren nicht mehr aus der 1. Zeile und 1. Spalte sein! Beide werden gedanklich gestrichen und es ergibt sich zugehörig die gelbe Unterdeterminante $A_{11} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}$ mit nur noch $(n-1) = 2$ Faktoren, in der das rechtsgerichtete Produkt $a_{22}\,a_{33}$ ebenfalls „+" und das linksgerichtete $a_{23}\,a_{32}$ „–" ist.

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array} \quad A_{11}$$

Für $a_{12}$ gilt analog durch Streichung von Z.1 und Sp.2 die blaue Unterdeterminante $A_{12} = a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}$, wobei jetzt für die ***Richtigkeit*** des 3faktorigen $a_{12}$-Binoms (oben Mitte) $A_{12}$ oder $a_{12}$ ***negativ*** werden muss!

$$\begin{array}{ccc}
a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array} \; - A_{12}$$

Der letzte Koeffizient $a_{13}$ hat die Unterdeterminante $A_{13} = a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}$
Hier stimmt das Vorzeichen wieder überein mit dem Gesamtprodukt nach der 1. Betrachtung.

$$A_{13} \; \begin{array}{ccc}
a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}$$

Unterdeterminanten $A_{ij}$ heißen auch noch ***Adjunkten*** (Gehilfen) oder ***Komplemente*** (Gegenstücke) der Elemente $a_{ij}$.

Im vorliegendem Fall spricht man von der ***Entwicklung der Determinante nach der 1. Zeile***:

$$\boxed{D = +\; a_{11}\cdot A_{11} \;-\; a_{12}\cdot A_{12} \;+\; a_{13}\cdot A_{13}} \;=\; \boxed{D = \Sigma\,(-1)^{i+j}\, a_{ij}\mathrm{E}A_{ij}}$$

Determinanten können aber auch nach ***jeder beliebigen Zeile oder Spalte entwickelt*** werden.
Vorteil ist dabei, große Zahlen aus zu klammern, mit denen sonst in den Adjunkten mehrfach gerechnet werden muss.
Wird die Determinante z.B. nach der 2. Zeile entwickelt, gilt für das richtige Zusammenzählen:

$$D = -\; a_{21}\cdot A_{21} \;+\; a_{22}\cdot A_{22} \;-\; a_{23}\cdot A_{23}$$

Damit die Vorzeichen für $A_{ij}$ bzw. $a_{ij}$ mit dem Zeilenindex i und dem Spaltenindex j richtig gewählt werden, gilt folgende ***Regel***:
Das erste Produkt mit $a_{11}$ (links oben) ist immer positiv.
Zeilenweise bzw. Spaltenweise wechselt jeweils das Vorzeichen.

$$\begin{array}{cccc}
+ & - & + & - \\
- & + & - & + \\
+ & - & + & - \\
- & + & - & +
\end{array}$$

Oder man geht von der Formel aus: $\boxed{D = \Sigma\,(-1)^{i+j}\, a_{ij}\text{E}A_{ij}}$,
das heißt., ***negativ*** sind alle Elemente oder Adjunkten, deren
Summe von Zeilen- und Spaltenindex ***ungerade*** ist (Exponent, ungerade Anzahl von „–“)!

Eine ältere Erklärung geht von der ungeraden Anzahl von ***Inversionen*** (Umkehrungen) der ***Spaltenindizes j*** aus, d.h., wie oft der Spaltenindex rückwärts (entgegen Zählrichtung) auftritt:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 2 3 | 0 Inversionen | 2 3 1 | 2 Inv. | 3 1 2 | 2 Inv. | 0 und 2 gerade | → positiv + |
| 1 3 2 | 1 Inversion | 2 1 3 | 1 Inv. | 3 2 1 | 3 Inv. | 1 und 3 ungerade | → negativ – |

<u>Jede weitere Unterdeterminante</u> n – (1.. 2.. 3) aber mit n >2, die wieder über die Elemente einer Zeile entwickelt wird, hat das <u>gleiche Vorzeichenschema</u> mit „+“ beginnend, da sie wiederum als Determinante mit mehreren Adjunkten angesehen werden muss!

***Eigenschaften*** von Determinanten:

1. Ein ***gemeinsamer Faktor*** in allen Elementen <u>einer Zeile</u> kann als Faktor vor die Determinante gezogen werden, da er ja auch in allen Kreuzprodukten gemeinsam auftreten würde.
2. Beim Vertauschen zweier Zeilen ändert die Determinante ihr ***Vorzeichen***. Die Elemente wechseln in den Kreuzprodukten und damit ihre Ausrichtung.
3. Durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten (Transponieren) ändert sich der ***Determinantenwert*** nicht, symbolisiert wird sie mit $A^T$ als transponierte Matrix. Bildlich wird die Matrix an der rechtsgeneigten Diagonale (pos. Kreuzproduktachse) gespiegelt
4. **D = 0** , wenn eine Zeile die Linearkombination einer anderen Zeile ist ( siehe Matrix). Das Summenverfahren ergibt dabei eine Zeile aus Nullen. Das System ist nicht lösbar!
5. Eine Determinante lässt sich nach einer beliebigen Zeile oder Spalte ***entwickeln***.
6. Eine Determinante kann vorher mit ***teilweisem Summenverfahren*** vereinfacht werden. Durch die entstehenden Nullen entfallen mehrfach Kreuzprodukte und auch die Chance auf einen gemeinsamen Faktor (Punkt 1) erhöht sich.

Zu 3.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} &3\cdot 9 + 8\cdot 4 + 6\cdot 2\cdot 5 \\ &- 2\cdot 9 - 6\cdot 4 - 3\cdot 8\cdot 5 \\ = \; &1\cdot 9 + 2\cdot 4 - 12\cdot 5 = \boxed{-43} \end{aligned} \qquad A^T = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} &3\cdot 9 + 2\cdot 5\cdot 6 + 4\cdot 8 \\ &- 2\cdot 9 - 4\cdot 6 - 3\cdot 5\cdot 8 \\ = \; &1\cdot 9 + 6\cdot 6 - 11\cdot 8 = \boxed{-43} \end{aligned}$$

Zu 6.

nach 3. Zeile entwickeln

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 6 & 12 \\ 2 & -1 & 8 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} :3(\text{auskl.}) \\ \\ 4. - 3.Z. \\ (\text{E}4) \end{array} = 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 21 & 21 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ :21 \\ \\ \end{array} = 3\text{E}21\text{E} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ \end{array}$$

Adjunkte für $a_{31}$ (0) und $a_{32}$ (0) entfallen!

$$= 63\cdot 1\cdot \left( \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \end{array} - 1\cdot \begin{array}{c} (+ \quad - \quad +) \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \end{array} \right) = 63 \left( \begin{array}{l} +1(-4-3\cdot 2) -3\,(2\cdot 4 - 3\cdot 1) +4\,(2\cdot 2 - (-1)\cdot 1) \\ -1\,(-6-8\cdot 2) +3\,(2\cdot 6 - 8\cdot 1) - 2\,(2\cdot 2 - (-1)\cdot 1) \end{array} \right)$$

beide nach 1. Zeile entwickelt $= 63\,(-10 - 15 + 20 + 96 + 12 - 10) = (-63)\cdot 93$
$= \underline{5\,859}$

### 7.6.4 Rechnen mit mehreren Matrizen

Bisher galt es, mit der Variablen- und der Ergebnismatrix ein Funktionsgleichungssystem zu lösen (Matrixumformung (Gauß) und Determinantenrechnung (Cramer)). In der ***praktischen Anwendung*** liegen aber vorwiegend Daten in Tabellenform vor. In der Produktion spricht man von ***Verflechtungsmatrizen***, z.B. die Produktion einzelner Zulieferer untereinander und mit dem Finalproduzenten abzustimmen. Die einzelnen Matrizen (Produktionsdaten) müssen also vorwiegend mit Summe, Differenz oder Multiplikation miteinander verknüpft werden.

Eine andere **Kurzform für Ansatz und Lösung** eines Linearen Systems ist folgende:

Lineares System $\boxed{A\cdot x \;= B}$ x Variable, A Variablenmatrix, B Ergebnis(spalten)matrix

Lösung allgemein $\boxed{x \;= A^{-1}\cdot B}$ → $x = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a22 & -a12 \\ -a12 & a11 \end{pmatrix}\cdot B$ ( Cramer: $x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b1 & a12 \\ b2 & a22 \end{vmatrix}$ )

$A^{-1}$ ist nur im übertragenem Sinn der „Kehrwert“. Sie wird als ***Inverse*** zur Matrix A bezeichnet und ist das <u>direkte</u> <u>Komplement</u>, das zur ***Einheitsmatrix*** führt $A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Einheitsmatrix)

Die transponierte Matrix $A^T$ (gleicher Wert) wird über die rechtsgeneigte Diagonale gespiegelt.
Die inverse Matrix $A^{-1}$ (Gegenwert) wird über die linksgeneigte Diagonale gespiegelt mit der „Minus“-Kennung daran: z.B. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ → $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ mit D = |A| = 2

Während die Cramer-Regel die Ergebnismatrix B in die Determinante einbezieht, wird hier B mit der Gegenmatrix $A^{-1}$ multipliziert, also eine ***Matrizen-Produkt*** durchgeführt:

**Summe und Differenz** von Matrizen

Rechenregel 1 sagt: Nur Gleichartiges kann verrechnet werden. In <u>einer</u> Matrix beim Summenverfahren waren es die gleichen <u>Spalten</u>-Elemente $a_{i\,\mathbf{j}}$. In <u>mehreren</u> Matrizen sind dies die Elemente an der <u>gleichen Stelle</u> $\mathbf{a_{ij}}$, wobei Index i die Zeile und j die Spalte angibt. Demzufolge können auch nur Matrizen gleicher Größe (Zeilen- und Spaltenzahl) verrechnet werden.

$\boxed{A_{ij}\ \text{G}\ B_{ij} \;= a_{ij}\ \text{G}\ b_{ij}}$ → bei den Matrizen A und B wird nur von den jeweils <u>gleichstelligen</u> Elementen (Z./Sp., Index ij) die Summe bzw. Differenz gebildet wird.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix}$$

**Multiplikation** von Matrizen

Schulisch gehört sie eindeutig in die Koordinatengeometrie mit Vektoren, denn sie stellt das ***<u>Skalarprodukt</u> zweier Vektoren*** dar (siehe 8.3.2/3). Matrizen sind deshalb keine normalen „<u>Faktoren</u>“ und dürfen <u>nicht</u> vertauscht werden: AEB @ BEA

Beim ***Zahlenprodukt*** liegen alle Elemente auf <u>einer</u> Koordinate, der Zahlengeraden. Hier werden <u>alle</u> sich ergebenden Elementarprodukte („***Jedes mit Jedem***“) aufsummiert:

123E456 = (100+20+3)E(400+50+6) = 100E(400+50+6) + 20E(400+50+6) + 3E(400+50+6)

Dieses in die Summe von 9 Elementarprodukten aufgespaltete Zahlenprodukt entspricht im Koordinatensystem xyz aber nur ***einem einzigen Elementarprodukt*** z.B. nur **xEx** auf <u>einer</u> Koordinate (eine Richtung, hier x-Achse).
Beim ***Skalarprodukt*** mit 3 Koordinaten sind dies analog 3 Elementarprodukte, die aufsummiert werden müssen! Nur ***gleichliegende Elemente*** der ***gleichen Richtung*** bilden hier das Produkt!

(x y z)E(x y z) = $(x^2 + y^2 + z^2)$ → (1 2 3)E(4 5 6) = 1·4 + 2·5 + 3·6 = 4 + 10 + 18 = 32

3 Elementarprodukte entsprechend 3 Koordinaten → 1 Element der Ergebnismatrix

Die praktizierte Matrizenmultiplikation wird jedoch mit der ***Transponierten*** $A^T$ der 2. Matrix vorgenommen: ($A^T$ ist diagonal umgesetzte Matrix: Zeile wird Spalte) Jede Zeile mal Spalte ergibt jeweils 1 Element der Ergebnismatrix an der ***Kreuzungsstelle*** von Zeile und Spalte!

$$(x\ y\ z)\ \text{Ε} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x^2 + y^2 + z^2)$$

« 1 Element der Ergebnismatrix

Die buchstabenmäßige Zuordnung der Koeffizienten, z.B. a zu x oder b zu y wird im Interesse der Gleichbehandlung von Vektor-(Kreuz-)Produkt und Matrizen der Wirtschaftsrechnung theoretisch aufgehoben.

2. Zeile / 1. Spalte — 1. Zeile / 2. Spalte

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1d_1 + a_2e_1 + a_3f_1 & a_1d_2 + a_2e_2 + a_3f_2 & a_1d_3 + a_2e_3 + a_3f_3 \\ b_1d_1 + b_2e_1 + b_3f_1 & b_1d_2 + b_2e_2 + b_3f_2 & b_1d_3 + b_2e_3 + b_3f_3 \\ c_1d_1 + c_2e_1 + c_3f_1 & c_1d_2 + c_2e_2 + c_3f_2 & c_1d_3 + c_2e_3 + c_3f_3 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich als theoretisch festgelegte Rechenweise:

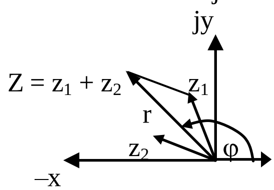
Matrizen werden multipliziert, indem die Summe aller Elementarprodukte aus gleichstelligen Elementen von ***Zeile mal Spalte*** gebildet wird.

## 7.7 Rechnen mit komplexen Zahlen

Bei der Lösung von Funktionsgleichungen geraden nten Grades (gerader Wurzelexponent) kann der Wurzelwert (Radikant) negativ sein, z.B. $\sqrt[2]{-4} = \sqrt[2]{4 \cdot (-1)} = 2 \cdot \sqrt[2]{-1} = 2 \cdot j = 2j$

Der negative Wert wird mit „–1" umgeformt, so dass aus dem positiven Faktor die Wurzel gezogen und $\sqrt{-1} = j$ als dessen ***imaginäre Einheit*** bezeichnet wird bzw. der Gesamtwert 2j als ***imaginäre Zahl***, bestehend aus reeller Zahl und Imaginäreinheit.

Eine komplette Funktion in Normalform $\boxed{z = x + jy}$ ist dann eine ***Komplexe Zahl*** **z**, bestehend aus reeller Zahl x und Imaginärzahl jy!




Das Verrechnen entspricht der Vektorrechnung (s. 8.3)

$Z = x + jy$ mit $x = r \cdot \cos \varphi$ und $y = r \cdot \sin \varphi$ → $Z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$

Ähnliche Beziehungen entstehen durch die Quadrate von Winkelfunktionen:

$\sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1 - x^2}$ → führt zur Eulerschen Formel $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$

oder auch die Kepplerschen Gravitationsgesetze: $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

Euler führte auch die Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen und den Exponentialfunktionen als Hyperbolische Winkelfunktionen, z.B. Sinushyperbolicus sinh x ein (→ Hochschule).

Beisp. aus der Physik: Scheinwiderstand $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ X - Blindwiderstand

Der Blindwiderstand kann durch die Phasenverschiebung cos φ negativ werden und dadurch auch die Wurzel.