5. ANALYTISCHE ALGEBRA (Analysis) (Kl. 8 - 10) 64

Zielstellung:

1. Beherrschen der 2. Rechenstufe bzw. Zahlendarstellung Potenz und Wurzel
2. Verstehen des Prinzips der Exponentialform und ihrer Umkehr Logarithmus sowie Begreifen der besonderen Bedeutung der Logarithmenrechnung für die Mathematik
3. Die „natürliche“ Zahl der Grundstufe ist keine echte Zahlenart! Die Exponentialform der Eulerzahl e^x bzw ihr Logarithmus ln x wird „natürlicher“ genannt, weil er alle natürlichen Vorgänge widerspiegelt.

5.2 Der 2. Rechen-Spezialfall : Potenz und ihre Exponentialform
Wurzel und Logarithmus (als Gegenrechnung)

5.2.1 Potenzieren

Aus der Grundstufe wissen wir, dass es nur die „reine“ Grundrechnung Summe (+) und Differenz (–) gibt. Das kleine „1 mal 1“, also das Multiplizieren (Vervielfachen) ergibt sich aus der Spezialsumme gleicher Zahlen, den Zahlenreihen, zur nächsthöheren Kurzfassung Produkt:

$$4+4+4 = 3 \text{ mal (die) } 4\text{(addiert)} = 3 \cdot 4 \quad \text{(Anzahl mal Basis)}$$

Die Anzahl der Zahlen wird also als Vervielfacher (Multiplikator) „Faktor“ vor die zu verrechnende gleiche Zahl (Basis 4, nun gleichfalls „Faktor“) geschrieben.

Beim ***Spezialprodukt gleicher Faktoren***, also beim gleich vielem Vielfachen einer Zahl muss sich logischerweise eine weitere Kurzfassung, die ***Potenz*** ergeben:

	1. mal (4· 4)	2. mal	3. mal	4. mal (4· 4)	
	(4+4+4+4) +	(4+4+4+4) +	(4+4+4+4) +	(4+4+4+4)	= 64
=	(4 · 4) ·	4			= 64
=	4^3				= 64

+	Grundrechnung
·	1. höhere Stufe
x^n	2. höhere Stufe

Die Anzahl gleicher Faktoren des Spezialproduktes 4·4·4 kann wegen der Unterscheidung zur 4er - Spezialsumme nicht wieder davor geschrieben werden. Man schreibt die Anzahl an eine exponierte Stelle (extra Lage), als Hochzahl „***Exponent***“ und nennt diese Kodierungsform, Zahlenschreibform oder auch Rechenform kurz die ***Potenz***.
Die Zahl 4, um die es im Grunde aus der Grundrechnung geht, wird auch so benannt, die Grundzahl oder die „***Basis***“.

Wichtig für das Verrechnen von Potenzen („Potenzgesetze“) ist einzig die Erkenntnis, dass der Exponent aus der darunter liegenden Rechenstufe (Multiplikation) entstanden ist!

Potenzen werden über ihre Exponenten verrechnet. Die Rechnung geschieht eine Stufe tiefer.

Die Rechenregel 2 (Rechenreihenfolge höhere zu niedere Rechenart) wird hier mit Regel 3 (doppelte Negierung) etwas zugeschnitten. Die Rechnung wird aus der normalen Lage in die Hochebene (***Exponentenebene***) verlegt, dafür muss (darf) aber eine Rechenstufe tiefer und damit ***leichter verrechnet*** werden!
Regel 1 „nur Gleichartiges verrechnen“ muss natürlich vorliegen, d. h., nur Potenzen mit gleicher Grundzahl (Basis) können verrechnet werden, die Ausnahme ist wieder die Klammer.

$3^4 + 3^2$ nicht möglich, da es keine tiefere Rechenstufe als die Summe gibt!
$3^4 \cdot 4^3$ ebenfalls nicht möglich, da nicht gleichartig, keine gleiche Basis vorliegt!

$3^4 \cdot 4^4 = (3\cdot4)^4 = 12^4$ Sonderfall des Ausklammerns bei gleichen Exponenten (4) ist keine Exponentenverrechnung, nur eine Kurzschreibform.

$3^4 \cdot 3^2 = (3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot(3\cdot3) = 3^{4+2} = 3^6$ Summe liegt eine Stufe tiefer als das Produkt!
$3^4 : 3^2 = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3} = 3^{4-2} = 3^2$ Differenz liegt eine Stufe tiefer als der Bruch!
$(3^4)^2 = (3\cdot3\cdot3\cdot3)^2 = 3^{4\cdot2} = 3^8$ Produkt liegt eine Stufe tiefer als die Potenz!

Hat beim Teilen der Teiler (Nenner) die höhere Potenz, wird durch die Differenz der Exponenten ein negativer Exponent errechnet:

$$3^2 : 3^5 = 3^{2-5} = 3^{-3}$$

Ein Negativ-Zeichen deutet immer die Gegenseite an. Hier sind aber nicht die Gleichungsseiten, sondern die 2 Seiten der gebrochenen Zahl, der Zähler und der Nenner gemeint.

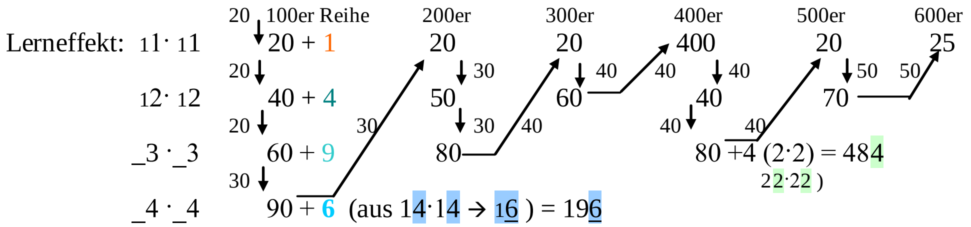
Die ganze Potenz 3^{-3} kann auch als Eintel (Bruch) dargestellt werden $\frac{3^{-3}}{1}$, wobei der Exponent mit „–“ im Zähler steht. Sie kann aber auch auf die Gegenseite Nenner mit der Gegenrechnung „+“ geschrieben werden (3. Rechenregel):

$$\frac{3^{-3}}{1} = \frac{1}{3^3} \quad \text{Bestätigung} \rightarrow \quad \frac{3^2}{3^5} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \quad \text{gekürzt} \quad \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$$

***Quadratzahlen von* 11 *bis* 25** (Kopfrechnen) :

Genau wie es beim Produkt von großem Vorteil ist, größere Zahlen in Verhältnisse zur 10 oder 100 zerlegen zu können (s. 1.3.1 Kopfrechnen), ist das Beherrschen der Quadratzahlen von 11 bis 25 genau so wichtig wie das kleine „Einmaleins“.

$11 \cdot 11 = 121$	$15^2 = 225$	$18^2 = 324$	$20^2 = 400$	$23^2 = 529$	$25^2 = 625$
$12 \cdot 12 = 144$	$16^2 = 256$	$19^2 = 361$	$21^2 = 441$	$24^2 = 576$	
$13 \cdot 13 = 169$	$17^2 = 289$		$22^2 = 484$		
$14 \cdot 14 = 196$					



Erst die 10er-Bereiche der 100er Reihen einprägen. Mit Ausnahme der 400 (20·20) beginnen alle bei 20. Aufsummiert werden ab 100 dreimal die 20, viermal die 30, sechsmal die 40 und zweimal die 50. Nun müssen in diesen 10er Bereichen nur noch die ***Einer*** des Produktes der Einer von den Quadratzahlen ***dazugezählt*** werden.

Auch die durch ein Komma veränderten Quadratzahlen haben die gleiche Ziffernfolge, jedoch muss für das Setzen des Kommas ein Überschlag gemacht werden:

$11^2 = 121 \rightarrow 1{,}1^2 = 1{,}21 \rightarrow 0{,}11^2 = 0{,}0121$ (Ü: $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0{,}01$) usw.

oder 2 Kommastellen hoch 2 gleich 4 Kommastellen

5.2.2 Wurzel ziehen (Radizieren):

Bei der Differenz (Minus) entsteht durch eine vielfach abzuziehende gleiche (Grund)-Zahl, deren Anzahl als Teiler (Nenner) auftritt, die 1. höhere Rechenstufe Teilen bzw. der Bruch:

$12 - 4 - 4 - 4 \;\rightarrow\; 12 : 3 = 4$ oder $\frac{12}{3} = 4$ (die Basis 4 ist 3fach abzuziehen).

Beim speziellen Bruch, das heißt der Nenner und das Bruchergebnis (Teilergröße/Basis) haben den gleichen Wert, ist die Ausgangszahl ein vielfach Vielfaches dieser gleichen Zahl:

			Anzahl = 4 und Basis = 4	
Produkt		Bruch	$16 - 4 - 4 - 4 - 4 = 0$	– Grundrechnung
$16 = 4 \cdot 4$	$\Leftrightarrow$	$16:4 = \frac{16}{4} = 4$	oder $16 : (4 \cdot 4) = 1$	: ÷ 1. höhere Stufe
Potenz		(Quadrat-)Wurzel		
$16 = 4^2$	$\Leftrightarrow$	$(4^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16} = 4$	oder $\sqrt[2]{4^2} : 4 = 1$	$\sqrt[n]{a^n}$ 2. höhere Stufe

Die Wurzel ist also eine kürzere Schreibform bzw. die nächsthöhere Rechenform für den Spezialbruch, wenn Teiler 4 und Teilergröße (Basis 4) übereinstimmen. Deutlich wird hier auch wieder der ***Zählanfang* 0** für die Strichrechnung und ***Zählanfang* 1** für die Punktrechnung!

Weitere Sichten des Zusammenhangs:
Für den Wurzelwert soll eine Zahl gefunden werden, die mit sich selbst vervielfacht ($4 \cdot 4 = 4^2$) diesen Wurzelwert ergibt. Lösung mit Rechenregel 3 „auf beiden Seiten das Gleiche tun“:

$4^2 = 16 \;\rightarrow\; \sqrt[2]{4^2} = \sqrt[2]{16} \;\rightarrow\; 4 = \sqrt[2]{16}$ formal: Ergebnis rechts $\sqrt[2]{16} = 4$

linke Seite hebt sich gleiche Wurzel und Potenz (2) als Gegenrechnung auf

oder rückwärts beide Seiten potenzieren: $(\sqrt[2]{16})^2 = 4^2 \;\rightarrow\; 16^{2/2} = 16^1 = 4^2$

Zahlen*(form)*gegenwerte (analog zu Gegenrechnung)

Grundrechnung: $+5 \Leftrightarrow -5$ (Gegenwert) Die Summe $5 + (-5) = 0$ führt zum Zählanfang 0.

1. Stufe Punktr.: $(1\cdot)\,5 \Leftrightarrow \frac{1}{5}$ (Kehrwert) Das Produkt $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$ führt zum Zählanfang 1.

2. Stufe Punktr.: $5^2 \Leftrightarrow (5^2)^{½} = \sqrt[2]{5^2}$ Produkt der Exponenten führt zur Basis: $5^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 5$

(Ausgangs**wert** Basis 5) (Ausgangs**gegenwert** Potenz(ergebnis) mit Kehrwert des Exponenten)

In der Potenzrechnung geht es um die Verrechnung der Exponenten, also ist dessen Kehrwert (über der Potenz) bzw. generell ein gebrochener Exponent gleichbedeutend mit der Wurzel. Jede Wurzel ist damit in die Potenz umformbar, ohne die Gleichung wertmäßig zu ändern. Der Nenner des Potenzexponenten stellt dabei den Wurzelexponenten dar ($^1/_2 \rightarrow$ 2. Wurzel), der Zähler ist der Exponent des Wurzelwertes (Radikant für Gymnasium).
3. Regel: Gegenrechnung und Kehrwert oder 2 mal negiert:

Für die Strichrechnung: $5 + 3 = 8$ aber auch $5 - (-3) = 8$ oder

für die Punktrechnung der 1. Ebene: $5 \cdot 3 = 15$ aber auch $5 : {}^1/_3 = 3 : {}^1/_5 = 15$

der 2. Ebene: $5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$ aber auch $\sqrt[2]{5^4} = (5^4)^{½} = 5^2 = 25$

oder $5^{-\frac{2}{4}} = \frac{1}{5^{+\frac{2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5^2}}$ oder gekürzt $\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{5}} = \frac{1}{2{,}236} = 0{,}447$

Sogenannte „Wurzelgesetze“ extra zu lernen ist also nicht nötig, wenn die Wurzel einfach in die gleichbedeutende Potenzform mit gebrochenem Exponenten umgeformt wird und die 3 Verrechnungsmöglichkeiten der Potenzexponenten (Mal, Plus, Minus) bzw. das Ausklammern gleicher Exponenten angewendet werden!

Fazit: ***Jede Rechnung kann in ihre Gegenrechnung und in ihre niedrigere Stufe umgewandelt werden, aus der sie entstanden ist. Eine Potenz oder Wurzel kann also in alle anderen 5 Rechenarten umgeformt werden!*** (siehe 5.1 Übersicht)

Einige Beispiele:

$$\sqrt[3]{24x^4} = \left(24x^4\right)^{\frac{1}{3}} = 24^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{24} \cdot x^{\frac{3}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x} = 2x \cdot \sqrt[3]{3x}$$

Günstig ist also alles in Potenzfaktoren zu zerlegen, die mit dem Wurzelexponenten übereinstimmen. Damit ist für diesen Wurzelwert die Wurzel gezogen. Das Ausklammern gleicher Exponenten bei Potenzen ist das Zusammenschreiben gleicher Wurzeln!

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{da} \quad a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} \quad \text{ist, desgleichen} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Summen sind erst auszurechnen. Brüche sind gleichnamig zu machen!

$$\sqrt[2]{\left(2+\frac{14}{25}\right)\frac{a^4}{b^2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{50}{25}+\frac{14}{25}\right)\frac{a^4}{b^2}} = \sqrt[2]{\frac{64}{25}\frac{a^4}{b^2}} = \frac{8}{5}\frac{a^2}{b} \quad ; \quad 4^{\frac{3}{2}} \cdot 4^{\frac{4}{3}} = 4^{\frac{9}{6}+\frac{8}{6}} = 4^{\frac{17}{6}} = \sqrt[6]{4^{17}}$$

Potenzen von Wurzeln können auch an den Wurzelwert geschrieben werden.

$$\left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 16^{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{1}} = \sqrt[4]{\left(2^4\right)^3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \quad \text{oder} \quad \sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[2]{32}} = \left[\left(2^5\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{5}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}} = 2^{\frac{5}{10}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2} \quad \text{beste Lösung, aber auch} \quad \sqrt[10]{32}$$

Achtung, wenn keine reine Wurzel aus einer anderen Wurzel gezogen wird:

$$\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3}}} = \left[3\left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} = 3^{\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}} = 3^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{3^7}$$

$$\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[2]{a^3} = a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}} = a^{\frac{4}{6}-\frac{9}{6}} = a^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$$

Rationalmachen des Nenners:

Wurzeln sind meist irrationale Zahlen (unendliche Kommastellen), deshalb vermeidet man sie im Nenner. Durch das Produkt mit der „Ergänzungswurzel“ zu $\sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x$ verschwindet die Wurzel: $\sqrt[5]{x^2} \cdot \boxed{\sqrt[5]{x^3}} = x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}} = x^1$

Der Exponent des Wurzelwertes muss also zum Wurzelexponenten ergänzt werden.

Der Nenner eines Bruches wird rational, indem der Bruch mit der Ergänzungswurzel erweitert wird (Nenner und Zähler).

Hinweis: Bei quadratischen Gliedern in einer Gleichung kann rechnerisch manchmal ein negativer Wurzelwert stehen. Er ist aber unrealistisch, da negative Zahlen quadriert immer nur positive Potenzwerte ergeben. Man zerlegt ihn in die „+“-Zahl mal (–1) . Aus der Zahl wird die Wurzel gezogen, die verbleibende $\sqrt[2]{-1}$ ist unrealistisch, also nicht reell und wird als Gegenpol zur reellen Zahl, genauer als *imaginäre* Zahl j bezeichnet. (Für Abitur)

5.2.3 Die Exponentialform der Potenz und ihre Umkehrung Logarithmus

Während die übliche Form der Potenz zu einem ausgerechneten Zahlenergebnis führen soll (z.B. $5^7 = x$), liegt bei ihrer Exponentialform der Rechenvorgang genau entgegengesetzt:

X-beliebige Zahlen werden als Potenz mit noch unbekanntem Exponenten ausgedrückt *(umgeformt)* ***und über ihren Logarithmus*** *(Exponenten)* ***berechnet***: $23 = 2^x \rightarrow x = \log_2 23$

Dies klingt im ersten Moment unsinnig, vorliegende Zahlen vor dem Verrechnen erst komplizierter darzustellen. Es dient jedoch zum Grundverständnis für die Bedeutung der Exponentialform a^x und insbesondere ihre Verrechnung über die Umkehrung Logarithmus.

Die große Bedeutung der Logarithmen für die Mathematik wurde oft Verglichen mit der Bedeutung der Mathematik für die anderen Wissenschaftsgebiete!

Ab 8. Klasse wird die Algebra vorrangig über Buchstaben realisiert. Für allgemeine Funktionswerte und komplizierte Terme hat die Exponentenverrechnung (hier die Logarithmen) bekanntlich den großen Vorteil, mit der um eine Stufe tieferen Rechenart ***einfacher rechnen*** zu können!

Der Logarithmus ist die Gegen- oder Umkehrrechnung zur Exponentialform, gleichfalls wie die Wurzel die Gegenrechnung zur Potenz ist, ***aber über deren Exponenten verrechnet wird***.

Da es aber unendliche Potenzdarstellungen ergäbe, verwendet man als Grundzahl (***Basis***) nur die in der Praxis benötigten Grundwerte **10** der ***Dezimalzahl***,
die **2** der ***Binärzahl*** bzw. *Dual*zahl
und die **2,718**... der ***Eulerzahl e*** (nach ihrem Erfinder) bzw. ihr Exponent wird *natürlicher Logarithmus* genannt, weil diese Potenz fast alle natürlichen Vorgänge widerspiegelt (nur Gymnasium).

Beispiel der Exponentialform mit der Basis 10:

Die einzelnen Stellenwerte der Dezimalzahl sind Zehnerpotenzen.
$10 = 10^1$; $100 = 10^2$; $65 = 10^{1,\dots}$ $\rightarrow$ alle Zahlen zwischen 10 und 100 lassen sich dann logischerweise als gebrochener Exponent zwischen 1 und 2 (1, ...) zur Basis 10 darstellen.
Gesucht ist also der Exponent x zur Basis 10 für eine bestimmte Zahl n (lat. Numerus): $\boxed{n = 10^x}$

Zur Unterscheidung gegenüber der normalen Potenz mit bekanntem Exponenten wird hier der ***gesuchte Exponent* x** als ***Logarithmus* x** bezeichnet.

x = (ist gleich der) Logarithmus (log) zur Basis 10 ($\log_{10}$) der vorgegebenen Zahl n
oder in Kurzform:
Exponentenbezeichnung: $\boxed{x = \log_{10} n}$ $\rightarrow$ vollständige Potenz: $\boxed{n = 10^{\lg n}}$ ($\lg = \log_{10}$)

Logarithmenbe- und verrechnung:

(3. Rechenregel „doppelte Negierung“ oder „Gegenform - Gegenseite“).

Die gewohnte Exponentenverrechnung der Potenz in der Hochebene wird bei der Exponentialform über deren Gegenform Logarithmus in die normale Schreibebene verlagert
Da der Logarithmus nur der unbekannte Exponent einer Potenz ist, hat die Logarithmenrechnung logischerweise die gleichen Verrechnungsregeln wie die Exponenten der Potenz (Vergleiche auch Umformung der Wurzel in die Potenz mit gebrochenem Exponenten):

geg.: $m = 10^x$ ges.: $z = 10^x \mathrm{E} 10^y$; $z = 10^x : 10^y$; $z = \left(10^x\right)^n$ (Der Exponent / Logarithmus n wird nicht erneut als Potenz dargestellt, sondern normal als Kommazahl n gerechnet!)

$n = 10^y$

$z = m \mathrm{E} n$ →	$\log (m \mathrm{E} n) = \overset{x}{\log m} + \overset{y}{\log n}$	→ z	(aus Produkt wird Exponentensumme)
$z = m : n$ →	$\log ({}^m/_n) = \log m - \log n$	→ z	(aus Teilen/Bruch wird Exponentendifferenz)
$z = m^n$ →	$\log (m^n) = \log m \cdot n$	→ z	(aus Potenz wird Exponentenmultiplikation)

($z = m^{\frac{2}{n}} = \sqrt[n]{m^2}$ $= \log m^{\frac{2}{n}} = \log m \mathrm{E} \frac{2}{n}$) n bzw. $\frac{2}{n}$ ist Exponent und wird nicht logarithmiert)

Die letzte Form $m^{\frac{2}{n}}$ zur Deutung der Rechenart wird jedoch nie verwendet, sondern nur m^n mit n = ganz oder gebrochen (Kommazahl!), so dass äußerlich sowohl die Rechenart als auch die 3. Rechenregel „Gegenrechnung - Gegenwert“ nicht gleich erkennbar ist (s. unten Gegenformen)! Der ganze Logarithmus ist aber selten, z.B. für 32 in Binärdarstellung 2^n → n = 5 → $2^5 = 32$. Zeile 4 zeigt noch einmal, dass die Exponentialform der Potenz eben nur über deren Gegenrechnung Logarithmus und nicht über eine (unbekannte) Wurzel lösbar ist!

Gegenwerte:

in der Grundrechnung	**+ 5**	⇔	**– 5**
der 1. Punktrechnung	**5**	⇔	$^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{5}}$
der 2. Punktrechnung	$\mathbf{a^5}$	⇔	$\left(a^5\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a^5}$
(Exponentialform)	$n = (a^x)$ (x = ganze Zahl)	⇔	$(a^x) = \mathbf{n} = \mathbf{\log_a n}$ (x = gebrochen)

Gegenformen:

Bei ***Wurzeln*** haben wir keine unnützen Wurzelgesetze aufgestellt, weil wir die Exponentenverrechnung der Potenz kennen. Beim Produkt und Bruch von Potenzen mussten die gebrochenen Exponenten für die Grundrechnung noch zusätzlich gleichnamig gemacht werden. Das Ergebnis in Potenzform wird dann nur wieder zurückgewandelt in die Wurzelform.

Bei der ***Logarithmenrechnung*** ist der Lösungsablauf ähnlich.
Zahlen n (n lat. numerus, ihre Potenzdarstellungen sind nur angedacht!) werden in eine der drei möglichen Logarithmenarten umgeformt, miteinander eine Rechenstufe tiefer verrechnet (durch Kommazahl entfällt Gleichnamigmachung von Brüchen) und wieder in ein Zahlenergebnis zurückgeführt.

Wurzel	→	Potenz mit Exponentenrechnung	→	Wurzel
Zahl (Exponentialform)	→	Logarithmusrechnung	→	Zahl

Die Umkehrungen werden auch grafisch im Kapitel 5.4.8 mit der Exponential- und der Logarithmus-Funktion ersichtlich.

Zur weiteren Vereinfachung wird der Logarithmus zur 10er-Basis **lg**, zur <u>b</u>inären 2er-Basis **lb** und zur <u>n</u>atürlichen e-Basis **ln** bezeichnet, also

$x = \lg n$ →	der Zehnerlogarithmus (zur Basis 10)	→	$n = 10^x$
$x = \mathrm{l}\mathbf{b}\, n$ →	der Zweier- oder **b**inäre Logarithmus (zur Basis 2)	→	$n = \mathbf{2}^x$
$x = \mathrm{l}\mathbf{n}\, n$ →	der **n**atürliche Logarithmus (zur Basis e)	→	$n = \mathbf{e}^x$

Logarithmus (Exponent) - - - - ► Umkehrrechnung ◄- - - - - Exponentialform (Potenz)
(gleichwertige)

Das Rechnen mit dekadischen Logarithmen:

Die einzelnen ***Stellenwert***e der Dezimalzahl sind 10er Potenzen und ergeben damit immer einen ganzen Logarithmus (Exponenten):

z.B. 2564,375	$= a \cdot 10^3$	$+ b \cdot 10^2$	$+ c \cdot 10^1$	$+ d \cdot 10^0$	,	$+ e \cdot 10^{-1}(\frac{1}{10})$	$+ f \cdot 10^{-2}$	$+ g \cdot 10^{-3}$
	$= \lg 10^3$	$\lg 10^2$	$\lg 10^1$	$\lg 10^0$	,	$\lg 10^{-1}$	$\lg 10^{-2}$	$\lg 10^{-3}$
Kennziffern →	= **3**	= **2**	= **1**	= **0**	,	= **–1**	= **–2**	= **–3**

Da die Kommastelle und damit die Größenordnung der Dezimalzahl durch ihre größte 10er Potenz gekennzeichnet ist, kommt es zur genauen Bestimmung nur noch auf die ***Ziffernfolge*** an! Eine gleiche Ziffernfolge abcdefg hat damit immer einen gleichen Logarithmuswert (***Mantisse***) und die Kommastelle wird nur noch als ***Kennziffer*** davor geschrieben:

345 $= 10^{\lg 345}$

↓ Umkehrung

345 → lg 345 = 5378

Ergebnis:

345 = $10^{2,5378}$

Zahl		Umrechnung	Logarithmus	
345,00	$10^2 \cdot 3{,}45$	$\lg 10^2 + \lg 3{,}45$	2 + 0.5378	**2. 5378**
34,50	$10^1 \cdot 3{,}45$	$\lg 10^1 + \lg 3{,}45$	1 + 0.5378	1. 5378
➔ 3,45	$10^0(1) \cdot 3{,}45$	$\lg 10^0 + \lg 3{,}45$	0 + 0.5378	$\boxed{0.\ 5378}$
0,345	$10^{-1} \cdot 3{,}45$	$\lg 10^{-1} + \lg 3{,}45$	0.5378 –1	– **0.** 4622
0,00345	$10^{-3} \cdot 3{,}45$	$\lg 10^{-3} + \lg 3{,}45$	0.5378 –3	–**2.** 4622

Der vollständige Logarithmus ist also immer (Kennziffer) (Mantisse) → ***Kennziffer . Mantisse***

Zur Unterscheidung und leichterem Erkennen gegenüber der Ausgangszahl wird der Logarithmus mit Punkt geschrieben, um die Rückumformung in die Ergebniszahl nicht zu vergessen!
Achtung: Die verrechnete Kennziffer bei Zahlen < 1 wird z.B. in Tabellen nicht verwendet!

Zahlenreihen haben für die Berechenbarkeit von technischen, technologischen (Planungs-) und auch natürlichen Prozessen eine große Bedeutung. Eine spezielle Reihenfolge (s. 7.3) führt zur natürlichen Zahl **e** (***Eulerzahl***). Neben den Zehnerlogarithmen entstehen also auch die ***natürlichen Logarithmen***. Diese haben in der Funktionsanalyse den großen Vorteil der einfacheren Handhabung und werden vorrangig angewendet! Wie bei ungleichnamigen Brüchen darf zum Verrechnen aber nur eine Art vorliegen. Es muss umgeformt werden.

Umformung von Logarithmenarten

Dazu werden die beiden Logarithmenarten für die gleiche Zahl n ins Verhältnis gesetzt:

Speziell: $\frac{\lg 10}{\ln 10} = \frac{\lg e}{\ln e} \rightarrow \frac{1}{2.3026} = \frac{0.4343}{1} \rightarrow c = 0.4343$ Allgemein: $\frac{\lg n}{\ln n} = \frac{\lg e}{1}$

Umrechnung natürlicher in dekadischen Logarithmus: $\boxed{\lg n = \lg e \cdot \ln n}$
Als gesuchte Exponenten betrachtet: $y = c \cdot x$ bei $10^y \leftarrow n = e^x$

Der dekadische Logarithmus von e (lg e, lg 2,71828...) ist die Umrechnungskonstante c = 0.4343 des natürlichen in den dekadischen Logarithmus einer Zahl!
Noch allgemeiner wird theoretisiert, dass die Umrechnungskonstante in die gesuchte Logarithmenart deren Logarithmus, aber zur Zahl der anderen Basis ist: $\boxed{\log_a n = \log_a b \cdot \log_b n}$

Weiterhin dient der Logarithmus in der höheren Mathematik als „Arbeitsmittel“, um z.B. lineare und exponentiell verlaufende Vorgänge (Funktionen) in Verhältnisgleichungen

(Proportionalitäten) berechnen und grafisch auf dem Logarithmuspapier sichtbar machen zu können!

Umformung zum Erkennen des Logarithmus:

$4 = 2^x$; $x = \log_2 4 = \mathrm{lb}\ 2^2 = 2$

$81 = 3^x$; $x = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

$\sqrt[2]{4} = 4^x$; $x = \log_4 \sqrt[2]{4} = 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

<u>Rechenbeispiele</u>:

$x = 0{,}002934 : (-0{,}00008998) \rightarrow x = (29{,}34\mathrm{E}10^{-4}) : (-8{,}998\mathrm{E}10^{-5})$

$\lg x\ (\underline{n}) = (1.\,4675 - 4) - (0.\,9541 - 5)\ (\underline{n})$

$\lg x\ (\underline{n}) = 0.5134 + 1 = 1.\,5134\ (n)$

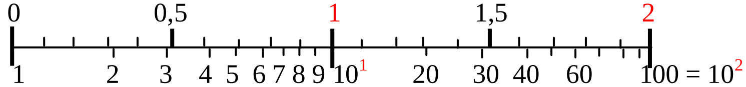
Rückwandlung $x = \underline{-32{,}62}$

<u>Wichtig</u>: Es gibt im Reellen ***keine Logarithmen von negativen Zahlen***! Durch einen Vermerk in Klammern am Ergebnislogarithmus oder bei größeren Rechnungen an den einzelnen wird bei der Rückwandlung in die Ergebniszahl dessen Vorzeichen nicht vergessen.

Zusammenfassung:

Ohne Logarithmen wäre die moderne höhere Mathematik nicht mehr zu bewältigen! Sie vereinfacht Funktionsberechnungen, indem sie Terme der 3. Rechenstufe in die 2. (Produkt, Bruch) und die Grundrechenstufe (Summe, Differenz) umwandelt. Besonders in der Differenzialrechnung (Steigungsdreieck, Bruchfunktion) und der Integralrechnung (Summenfunktion) werden aus komplizierten Termen einfachere Funktionen. Man spricht von der ***Linearisierung*** höherer Potenzfunktionen, was für die Entwicklung des früheren Rechenstabes Voraussetzung war. Auf der Zahlen*geraden* (Skale) waren die Logarithmen der Zahlen abgetragen. Es gibt auch das Logarithmenpapier, auf dem die Parabel einer höheren Potenzfunktion annähernd zu einer Geraden wird. Die Funktionsgleichung einer Geraden lässt sich wiederum im linearen Gleichungssystem einfacher behandeln (ausführlich in der Abiturstufe).

normale (dekadische) Skale



logarithmische Skale

(entspricht dem Exponenten der Zahlen, also ihrem Logarithmus)

$\log(a\mathrm{E}b) = \log a + \log b$ log a + log b = log (aEb) an Stelle aEb b als Fläche

Summe statt Produkt a

log (a : b)

$\log(a : b) = \log a - \log b$ log a – log b – log b Differenz statt Bruchrechnung

log a

$\log a - \log b$ « $a : b = c$

Rückwandlung