5. ANALYTISCHE ALGEBRA - Analysis / Funktionstheorie (8. – 10. Kl.)

Zielstellung:

4. Eine Gleichung / Funktion bzw. eine Ungleichung hat 2 Darstellungsformen:
   Normalform: Die Terme (Glieder) sind in der Strichrechnung (+, –) verbunden
   Produktform: Die Terme sind in der Punktrechnung (1. und 2.Stufe) verbunden
5. Funktions- und Bestimmungsgleichungen bilden eine Einheit. Die Bestimmungsgleichung ist die konkrete wertmäßige Lösung der Funktionsgleichung!
6. Es gibt 2 große Funktionsgruppen: Die Potenzfunktionen (<u>alle</u>, auch die Wurzel und der Bruch ist eine Potenz) und die Winkelfunktionen (lat. trigonometrische- / goniometrische)
7. Die Art des Potenzexponenten erzeugt alle algebraischen (Potenz-)Funktionen
8. Die Gegenfunktion ist immer die „Spiegelung“ an der Geraden y = x , das heißt, die Funktion in der y-Ebene (x-Achse) wird in die x-Ebene (y-Achse) abgebildet (um 90° gedreht, transformiert), vergleichbar mit dem Kehrwert $n \rightarrow {}^{1}/_{n}$; $f \rightarrow {}^{1}/_{f} = f^{-1}$
9. Die Gegen-Winkelfunktion wird mit arc (Arcus, Bogen) bezeichnet, da der Winkel vom Zentrum her im Grad- oder vom Umkreis (Gegenstück) her im Bogenmaß angegeben wird.
10. Die umfangreichsten Vorgänge sind Termumformungen, um gleichartige Größen in die gleiche Form zum Verrechnen zu bringen bzw. Funktionsbetrachtungen zum Erkennen von Verhaltensweisen, Charakteristik und Vergleich von Funktionen.
11. In der Grundrechnung gibt es außer der konkreten Summe (+) und Differenz (–) noch die allgemeine Summe (Σ, Sigma) und allg. Differenz (Δ, Delta). Davon abgeleitet wird in der Abiturstufe die Flächensumme Integral- und die Differenzialrechnung.
12. Summenpotenzen, speziell ein Binom mit Exponent 2 sind die „Binomischen Formeln“
13. Teilen von Summen (Polynomdivision) speziell das Teilen mit dem Binom $(x - x_0)$

Entfällt:

1. Potenz- und Wurzel„<u>gesetze</u>“ - werden durch Sachverständnis ersetzt
2. reelle, ganzrationale, gebrochenrationale, nichtrationale, transzendente Funktionen (unsinnige, verwirrende Vielfalt; Potenz- und Winkel-Funktionen genügen als Oberbegriff!)
3. Gleichsetzungsverfahren, da es das Prinzip des Einsetzungsverfahrens ist

5.1 Analysis - Übersicht

Mathematik : **Geometrie** → Projektionen (Abbilder) konstruieren
Algebra → ***Gezählte Ziffern vergleichen u. Unbekannte bestimmen***
+ – **0 1** **= ≠** **x = a (Wert)**

Ziffern, Zahlen, Buchstaben:
Ziffer = Zi (0, 1) = $a_1 + d$ Einserreihe, arithmetische Folge mit $a_1 = 0$ und $d = 1$
Zahl = Z (0..9) = $ax^n + ax^{n-1} .. + ax^{n-k}$ *Normalform* oder Polynomform der Gleichung
mit a ¡ Q und n, k ¡ N sowie x = 10 für Dezimalzahl
Z = a·b·c·d ... *Produktform* der Gleichung (Primfaktorenzerlegung)
Die Dezimalzahl ist nur die Verschlüsselung (Code, Schablone, Matrix) der Summe von Rechengliedern (Termen) mit Zehnerpotenzen oder des Produktes von Primfaktoren!
Matrix(Schablonen)formen (unzerlegte Zahl): Kommazahl, gemischter u. gemeiner Bruch

Zählen, Rechnen, Umformen:

$16 - 4 - 4 - 4 - 4 = 0 = 16 + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = 0$ – +

$\frac{16}{4} = 4$; $16 : (4 \cdot 4) = 1 = 16 \cdot \frac{1}{4 \cdot 4} = 1$ $16 \cdot \frac{1}{4} = 4$; : ÷ ·

$\sqrt[2]{16} = 4$; $\sqrt[2]{16} : 4 = 1 = 16^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4} = 1$ $16^{\frac{1}{2}} = (4 \cdot 4)^{½} = 4$; $\sqrt[n]{x}$ x^n

Vergleichen: Gleichung (= ; Werte) ⇔ Ungleichung (≠ ; < >; Mengen)
+ Bestimmen:
3 Verfahren
Bestimmungsgleichung ← - - - Funktionsgleichung (Unmenge Lösungen)
(einzelne, konkrete Lösungen)
nach Termen nach Grafik (Kurvencharakter)
(algebraische) Potenz -Fkt'n Winkel -Fkt'n (geometr., trigonometr.)
ganze Exp. gebroch. Exp. **Wurzel** (Gegenf) Bogen- **Arc** (Gegenf.) Winkelmaß **Sin**, **cos** (zur Hypotenuse) **tan**, **cot** (zur Kathede)
pos. neg. Exp. **Hyperbel** pos. reelle neg. Radikant komplexe Lösg.

1. Grades **Lineare** (Gerade) n.ten Grades **nichtlineare Fkt.** (krummlinig)

(Abiturstufe)

monoton (keine Gegenfkt.) **monoton** **umkehrbar** **nicht monoton** (nicht umkehrbar) **beschränkt** → **umkehrbar**

oben genannte Funktionen alle **stetig**

(Potenz.Fkt.) **gerade/ungerade** **periodisch** (Winkel-Fkt.)
(Symmetrie oder keine Symmetrie)

mit Funktionsfehlstellen oder Grenzwerten:
konvergent oder **divergent**

Im Gegensatz zum konkreten Zahlenrechnen (***Arithmetik***) werden ab 8. Klasse nach dem Begreifen der 2. Kurzschreibform von Summe und Differenz → der Potenz und der Wurzel bzw. dem Logarithmus, vorwiegend allgemeine Berechnungen mit Buchstaben als Zahlsymbole durchgeführt.

Die ***Funktionsgleichung*** (Gleichung mit mehreren Unbekannten/Variablen) ist dafür die Basis. Der Begriff sagt bereits aus, dass Gleichungen tiefergehend untersucht (analysiert) werden, wie sie funktionieren. Mit mehreren Unbekannten ist auch nicht gleich eine konkrete, sondern nur eine allgemeine Lösung mittels eines Grafen (ein Kurvenbild) möglich. An diesem können allerdings konkrete Lösungen abgelesen werden oder rechenmäßig wird über ***3 mögliche Verfahren aus Funktionen eine Berechnungsgleichung*** mit einer Unbekannten gemacht (Bestimmungsgleichung), die dann konkret zahlenmäßig gelöst (bestimmt) werden kann. Diese Vorgehensweise ist das grundlegende Wesen der Mathematik zur Lösung jeder Aufgabenstellung!

Das eigentliche Rechnen zum Umformen, Zusammenfassen und Umstellen der Glieder einer Gleichung haben wir in der ***Zahlenlehre*** mit den Rechenarten und den verschiedenen Schreibformen der ganzen bzw. gebrochenen Zahl allumfassend kennen gelernt und wenden es hier nur ***wiederholend auf die Buchstaben*** als gegebene Werte (Konstanten, Koeffizienten) und gesuchte Werte (Variable/Unbekannte) an.
Beim ***Bruch*** mit Zähler und Nenner ist aber meist nicht mehr das Ergebnis gefragt, sondern das ***Verhältnis beider Werte*** wird wie bei der Prozentrechnung tiefergehend betrachtet:
So wird z.B. beim rechtwinkligen Dreiecks das ***Verhältnis zweier Seiten*** (ein Bruch) mit einem symbolischen Begriff bezeichnet, den ***Winkelfunktionen*** Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens. Die ***Bruchfunktion***, die das Seitenverhältnis bzw. den Öffnungs- bzw. Steigungswinkel des Dreiecks beschreibt, wird also in eine ***ganze Funktion***, die Winkelfunktion umgeformt!
Damit gibt es 2 große Hauptgruppen von Funktionen, die Potenzfunktionen (algebraische) und die Winkelfunktionen (geometrische, spezieller trigonometrische).

Die ***Wahrscheinlichkeitstheorie*** ist eine direkt aus der Praxis und für die Praxis zugeschnittene Lehre, die mit ihren empirisch (experimentell) gewonnenen Funktionen eine Sonderstellung hat. Die Kombinatorik (Theorie der Zusammenstellmöglichkeiten von Werten bzw. Elementen) auf der einen Seite und die Erfassung von konstanten Werten (Statistik) sowie veränderlicher Werte oder Prozesse (Stochastik) auf der anderen Seite bilden dazu die Basis. Mathematisch verarbeitet werden alle 3 in der Wahrscheinlichkeitslehre zur Planung in der Wirtschaftspraxis.

Praxis:
Erkenntnisse aus Natur, Forschung, Entwicklung für Lösung technischer Probleme anwenden
1. Über Messreihen (Kennlinien, Funktionskurven) und Erkennen von Proportionalitäten mathematische *Funktionen* (Gleichungen, Formeln) aufstellen
2. Prozesse und Zeitabläufe analysieren und mathematisch formulieren → Gleichungssysteme
3. Wertevergleich vorhandener Größen (Funktionen, Ungleichungen, Mengenlehre)

Theorie:
Textaufgabe (Schule): Jede Rechenaufgabe hat den gleichen Rechenablauf (Algorithmus)
1. Aufstellen von Gleichungen mit mindestens einer Variablen (nur 1 Variable = Unbekannte)
   a) Lineare Gleichungen (=) und Ungleichungen (< >) mit Gliedern (Termen) $\mathbf{ax^1}$
   b) Nichtlineare Gleichungen und Ungleichungen (≠) mit Gliedern $\mathbf{ax^n}$ oder **sin x**
2. Lösen der Gleichungen und Ungleichungen mittels Rechenarten und Rechenregeln
   → Glieder (Produkte, Quotienten, Funktionen) vereinfachen, ordnen, gleichartige zusammenfassen, gesuchte Größe eliminieren (explizite Form herstellen: Formel oder Funktion)
3. Zahlenwerte der gegebenen Größen einsetzen und Zahlenwertrechnung sowie Einheitenverrechnung vornehmen

5.3 Ungleichungen

Bis zur 7. Klasse wurde nur die gesuchte Zahl mit x bezeichnet. Ab 8. Klasse werden vorrangig alle Zahlen durch Buchstaben symbolisiert und logischerweise rechnerisch genau so behandelt. Physikalische Formeln sind z.B. solche Buchstabengleichungen, richtiger Größengleichungen, in denen erst am Ende die gegebenen Zahlenwerte und ihre Einheiten eingesetzt werden.
Ungleichungen sind das Gegenteil von Gleichungen, bei denen auf beiden Seiten der gleiche Wert steht (=). Das Symbol der Ungleichung ist allgemein „@“ (ungleich).
Konkret werden Zahlenmengen x_n, mathematisch die ***Lösungsmenge*** ¸ $\{x_1, x_2, x_3 \ldots x_n\}$ ermittelt bzw. verglichen, die

kleiner als eine bestimmte Zahl a	$x_n < a$	
kleiner bis gleich der Zahl a	$x_n \leq a$	
größer als eine bestimmte Zahl a	$x_n > a$	
größer bis gleich der Zahl a	$x_n \geq a$	
zwischen zwei Zahlen a, b	$a < x_n < b$	(größer a, aber kleiner b)
sowie einschließlich dieser 2	$a \leq x_n \leq b$	(größer-gleich a , kleiner-gleich b) liegen.

Der ***Wertebereich*** der Zahlen kann eingeschränkt sein, wenn z.B. nur ganze oder nur positive Zahlen gesucht sind. Im Allgemeinen geht der Wertebereich bis + ∞ (Unendlich) bzw. – ∞.
Die Rechenregeln sind die gleichen wie bei Gleichungen mit einer Ausnahme:
Werden beide Seiten negiert, das heißt durch den negativen Faktor geteilt bzw. mit dem negativen Kehrwert multipliziert, dann dreht sich auch das Vergleichszeichen um:

$$\begin{aligned} 3x + 5 &< 5x - 3 \\ 3x - 5x &< -3 - 5 \\ -2x &< -8 \qquad | : \boxed{-2}\ ; \ \cdot \boxed{-\tfrac{1}{2}} \ \text{(gleichbedeutend)} \\ x &\boxed{>} 4 \end{aligned}$$

5.4 Gleichungen , Funktionen und Systeme

5.4.1 Begriffsbestimmungen

Gleichung (allgemein mit Buchstaben auch Formel genannt):
Mehrere in einer mathematischen Beziehung stehende Zahlen oder Größen links und rechts des Gleichheitszeichen ergeben den *gleichen* Wert. Sind alle bekannt (gegeben), dann werden sie nur auf Gleichheit geprüft. Für eine sinnvolle Aufgabe ist aber mindestens eine Größe gesucht. Es gibt die unaufgelöste (***implizite***) und die nach x oder y aufgelöste (***explizite***) Form.
Es können die unterschiedlichsten Werte (Zahlen) und Größenarten wie gerichtete (vektorielle) oder ungerichtete (skalare) Größen, Mengen (Gruppen) und andere Größen auftreten. In einer Gleichung dürfen aber immer nur *gleichartige* Größen (***Parameter***) sein (Rechenregel 1)! Mathematiker bezeichnen in der Funktion jedoch erst ab der 3. Variablen die Größe als Parameter.

Bestimmungsgleichung (konkrete Berechnungsgleichung):
In der Gleichung ist nur eine gesuchte Größe (Unbekannte) x oder y enthalten. Die Berechnung (Umformung und Umstellung) erbringt eine konkrete wertmäßige (zahlenmäßige) Lösung z.B.:

$$\begin{array}{ccccc} a + b = x - c & & x = c + a + b & & \\ 3m + 6m = x - 4m & \rightarrow & x = 4m + 3m + 6m & \rightarrow & x = 13\,m. \end{array}$$

implizite Form — explizite Form (Unbekannte herausgestellt/eliminiert)

Die Unbekannte wird *bestimmt*. Dies war, abgesehen von einzelnen Termumformungen (Bruch-/Prozentrechnung), das Hauptziel der Zahlenrechnung (Arithmetik) von der 1. bis zur 7. Klasse.
Funktionsgleichung (kurz Funktion oder Zuordnungen):

Eine Funktion bezeichnet das miteinander Funktionieren zusammengehöriger Dinge, Elemente oder Größen, die von der Natur oder vom Menschen einander zugeordnet sind. So ist die deutsche Sprache, die aus Wortbegriffen besteht, eine Funktion aus 26 Buchstaben oder das Morsealphabet eine Funktion von Punkten und Strichen in unterschiedlicher Zuordnung.

In der Mathematik ist es die in einer Gleichung rechnerisch formulierte Abhängigkeit mindestens zweier veränderlicher (variabler) Größen, der ***Variablen*** x und y.
Zu jedem möglichen x-Wert (***Definitionsgröße***) kann demzufolge jeweils nur ein dazugehöriger y-Wert (***Funktionsgröße***) errechnet werden. Diese ***eindeutige Zuordnung*** kann als ***Zuordnungsvorschrift*** sprachlich formuliert, in einer ***Tabelle*** wertmäßig gegenübergestellt oder im Diagramm als ***Kurve*** gezeichnet bzw. als ***Rechenvorschrift*** eben in der Funktionsgleichung ausgedrückt sein (siehe 3.5).
Im allgemeinen Sprachgebrauch wird unter der Funktionsgleichung die implizite Form und unter der Funktion die explizite (nach y aufgelöste) Gleichungsform verstanden.

Liegt keine Eindeutigkeit vor, das heißt eine definierte (bestimmende) Größe x wird mehreren abhängigen Größen y zugeordnet oder sie ergeben sich aus dem Funktionsverlauf, dann kann daraus ***keine Funktionsgleichung*** bestimmt werden. Solche Stellen werden als ***Fehlstellen*** der Funktion (Lücken, Pole, Sprünge, s. auch 3.5.1) bezeichnet und über ***Grenzwertberechnungen*** annähernd bestimmt (11. Klasse).

Mit der gebrochenen Zahl ergeben sich unendlich viele einzelne Lösungen (Lösungsmenge), den x-y-Wertepaaren, die im x-y-Diagramm als Punkte **P(x; y)** hintereinandergereiht die ***Kurve*** ergeben. Ist der Charakter einer Funktion bekannt, genügen jedoch wenige Punkte (Ergebnispaare in einer Wertetabelle) zum Zeichnen (grafischen Darstellen) der Funktion.

Im Wesentlichen kann aber auch ohne vorherige Grafik durch das ***Nullstellenverfahren*** (s. 5.3.2) die Funktionsgleichung zur Bestimmungsgleichung umgeformt und eine konkrete Lösung, sprich Wertepaar bzw. Kurvenpunkt P(x; 0) errechnet werden:

$\boxed{y = 3x - 6}$ y als 0 annehmen (y=0 setzen) → $0 = 3x - 6$ → $x = {}^{6}/_{3} = 2$

Lösung: P(2; 0)
P (x; y)

Im Allgemeinen wird sie jedoch erst im x-y-Diagramm (dem Grafen) als Kurve zeichnerisch abgebildet und daraus verschiedene Charaktereigenschaften und Lösungen bestimmt.

Jede **polynome** (mehrgliedrige) Funktion ist bereits eine aus (eingliedrigen) ***Grundfunktionen zusammengesetzte*** (summierte) Funktion:
$\boxed{y = 3x - 6}$ → $\boxed{y = y_1 + y_2}$ mit $y_1 = 3x$ und $y_2 = -6$ (s. 5.4.2. farbige Zusammenfassung)

Funktionen werden in **2** (+1) große ***Hauptgruppen*** eingeteilt

Potenz-Funktionen (algebr.) **$y = x^n$** (lineare-, quadratische-, kubische- Wurzel-, Hyperbel-)
Winkel-Funktionen (geometr.) **y = sin x** (**cos x**, **tan x**, **cot x**; auch trigonometrische genannt).
(***Summen-Funktionen*** → Wahrscheinlichkeitslehre und 11. Klasse: Folgen und Reihen))

Deren Unterteilungen tragen entsprechende charaktertypische Bezeichnungen. Da die Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten darstellbar ist, ist auch die Wurzelfunktion eine Potenzfunktion analog der Differenz, die als Summe mit einer negativen Zahl gerechnet werden kann. Die Winkelfunktionen werden im Punkt 6 (Geometrie 3) behandelt. Der Winkel selber wird bei Winkelfunktionen und bei gerichteten Größen (Vektoren / 12.Klasse, z.B. Kraft oder gerichtete Strecke) als ***Argument*** zusätzlich zum ***Betrag*** und der ***Einheit*** bezeichnet (siehe 3.5).
Empirische Funktionen (aus praktischer Erfahrung heraus)

nehmen eine Sonderstellung ein. Sie sind direkt aus der Praxis ermittelte und für die Praxis zugeschnittene Funktionen in Form von Kennlinien aus Messwerten, die durch Reihen und Folgen (s. 7.3) in theoretisch bekannte Funktionen überführt werden oder sie sind Daten (Werte) aus Massenvorgängen und Erscheinungen (Statistik/Stochastik), deren vielfach überprüfter Verlauf theoretisiert als Funktion bzw. Bestimmungsgleichung beschrieben oder als Baumdiagramm bzw. Verteilungskurve grafisch dargestellt ist → ***Wahrscheinlichkeitslehre***.

Funktionssystem:
Treten mehr als die 2 Variablen x und y in einer Funktionsgleichung auf oder ist die Nullstellenlösung nicht möglich, dann muss zur konkreten Lösung (Bestimmungsgleichung) eine weitere Funktionsgleichung mit gleichartigen Größen aufgestellt werden. Die Gleichungen müssen also vom gleichen System (gleicher Größenart) sein! Dabei muss die Anzahl der Funktionen <u>mindestens</u> der Anzahl der Variablen entsprechen! Miteinander verrechnet (siehe Einsetzungs- oder Summenverfahren) ergeben sie wieder die Bestimmungsgleichung (s. 5.3.2).

Transzendente Gleichung (Gymnasium)
Diese Einteilung ist in der heutigen Zeit unsinnig. Transzendent bedeutet „über den Verstand hinausgehend“ bzw. für die Mathematik „nicht mit normalen rechnerischen Mitteln“. Damit ist gemeint, dass die Lösung nicht direkt über die Umstellung der Gleichung gefunden wird, sondern bestimmte Zwischenlösungen als Werte aus Tabellen/Tafeln des Tafelwerkes abgelesen werden müssen. Dies betrifft besonders Winkelfunktionswerte und die Logarithmen. Diese sind aber auch einmal unter immensen Aufwand errechnet worden und sind feststehende Werte. Außerdem ist die Arbeit mit dem Tafelwerk bzw. dem Taschenrechner ganz normale mathematische Lösungsfindung!

Bisher wurden Gleichungen speziell nur mit Zahlen gerechnet (Arithmetik oder Zahlenlehre). In der Praxis sind die Aufgabenstellungen jedoch viel umfangreicher und komplizierter, so dass man erst einmal ohne Zahlenwerte eine allgemeine Lösung, sprich Lösungsformel sucht. Die verschiedenen Zahlen werden also nur durch ***Buchstaben*** ersetzt und diese genauso nach den gleichen Rechenregeln verrechnet. Wir kennen ja die Formeln der Physik, die mit Buchstaben bestimmte Größen oder Elemente bzw. ihre Werte symbolisieren. Alle gegebenen Größen werden erst in der allgemeinen Endformel mit ihrem Zahlenwert und ihrer Einheit eingesetzt und das konkrete Ergebnis ausgerechnet. Diese konkrete Zahlenrechnung ist aber nur der kleinste und unwesentlichste Teil der Aufgabenlösung, weil dies später meist der Rechner übernimmt.

Die wesentlichsten Hauptaufgaben sind:

1. Für eine Aufgabe benötigte Gleichungen (Funktionen / Formeln) zusammenstellen und gegebenenfalls zu einer allgemeinen Endformel (Bestimmungsgleichung) verrechnen.
2. Spezielle Betrachtungen zu Funktionsgleichungen an Hand einer Grafik (x-y-Diagramm) und Erkennen von unterschiedlichen Charakterzügen und Zusammenhängen in einer Funktion (Untersuchung - analytische Algebra)
3. Aus experimentellen Aufgaben Messreihen für zu vergleichende Größen aufnehmen (empirische Funktionen) und diese Werte grafisch darstellen (Kennlinien) sowie mathematische Beziehungen (Funktionskurven und ~gleichungen) daraus ableiten.

5.4.2 Die lineare Funktionsgleichung (ersten Grades: x^1, y^1, z^1)

Allg.: $\boxed{a + bx + cy + dz = e}$ Konkret: $3 + 5x + 2y + 7z = 78$

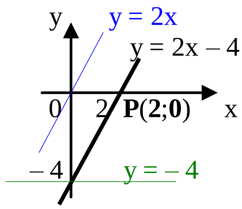
a bis e	(Anfangsbuchstaben) sind gegebene Werte (Zahlen oder Größenwerte)
x, y, z	(Endbuchstaben) sind ***Variable***/Veränderliche (mit z Raumkoordinate)
a, b· x	Glieder/***Terme*** oder Summanden (das „E“ wird weggelassen!)
a, e	konstante Terme (Unveränderliche/***Konstante***)
bx, cy, dz	Variablenterme; b, c, d ***Koeffizienten*** (Ko-Faktoren zur Variablen)

Eine konkrete rechnerische Lösung in Form der Bestimmungsgleichung (1Variable/Unbekannte) entsteht immer nur als eine mögliche Lösung einer oder mehrerer dieser Funktionen. Jedes mögliche Ergebnis in Form eines Punktes **P(x, y)**, ***Dupel*** genannt, aneinandergereiht ist der Linienzug der Kurve im x-y-Flächendiagramm. Auch eine Gerade wird im Diagramm (dem Grafen) mit dem Oberbegriff Kurve bezeichnet. Kommt eine dritte Variable z dazu, ist der Graf eine räumliche Darstellung und das mögliche Ergebnis, der Punkt P(x, y, z) ein sogenannter *Tripel*

Bei linearen Funktionen stehen alle Variablen in der ***ersten Potenz*** (Exponent =1) und die Kurve ist eine ***Gerade***. Diese Funktionen und ihre Bestimmungsgleichungen werden deshalb Gleichungen **1. *Grades*** genannt.
Es gibt auch die elementare „Funktion“ **0 *ten Grades***: $y = nx^0 = n \cdot 1 \rightarrow \boxed{y = n}$
Sie ist eine Konstante, die grafisch eine parallele Gerade zur x-Achse darstellt und bildhaft die Zerlegung in ***Grundfunktionen*** (eingliedrige ~) erklärt (s. Abb. $y = -4$ und $y = 2x$)

Die spezielle Flächensumme unter der Kurve führt zu höheren Funktionsgraden (x^2, x^3, x^4..), ein spezieller Differenzenbruch (Steigungsdreieck $\Delta y : \Delta x$) wieder zu niedrigeren Funktionsgraden (x^3, x^2, x^1). Dies wird in der 11. Klasse als Integral- und Differentialrechnung näher betrachtet.

Lösungsablauf : Um aus einer Funktion bzw. einem Funktionssystem (mehrere Funktionen) eine Bestimmungsgleichung zu bekommen, gibt es 3 Lösungsverfahren:



Von einer Funktion ausgehend:

1. ***Nullstellenverfahren***: $y = 2x - 4$ (Funktionsgleichung)
(y = 0 setzen) $0 = 2x - 4$ (Bestimmungsgleichung)
$\underline{x = 2}$

P(x; y)
Lösung : **P (2; 0)** , der ***Schnittpunkt*** der Funktion mit der ***x-Achse*** (überall y = 0)

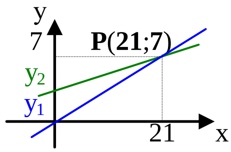
$y = 2x - 4$ ist bereits die Summe der beiden Grundfunktionen $y = 2x$ und $y = -4$!
$y = 2x$ wird hier über den gesamten Definitionsbereich x um $y = -4$ nach unten gezogen.

Aus dem Funktionssystem heraus:

2. ***Einsetzungsverfahren*** : (bzw. „Gleichsetzungsverfahren“)

(Schnittpunkt	I	$x = \boxed{3y}$		$\boxed{x} = 3y$	$y_1 = \frac{1}{3}x$
2er Funktionen)	II	$\boxed{x} + 4 = 5y - 10$		$\boxed{x} = 5y - 10 - 4$	$y_2 = \frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$
	I in II eingesetzt	$\boxed{3y + 4 = 5y - 10}$	$\longleftrightarrow$	$3y = 5y - 10 - 4$	
		$-2y = -14$		$\underline{y = 7}$	
		$\underline{y = 7}$	$\rightarrow$ $\uparrow$	$x = 3 \cdot 7$	

Lösung : P(x; y) $\rightarrow$ **P (21 ; 7)** (in I eingesetzt) $\underline{x = 21}$



Das „Gleichsetzungsverfahren“ ist das Einsetzungsverfahren! Für x in der 2. Funktion wird der gleichwertige Ausdruck 3y vom x der 1. Funktion eingesetzt und damit diese Variable eliminiert. Die jetzige Bestimmungsgleichung für y wird nach den bekannten Rechenregeln gelöst und der ausgerechnete Wert in der 1. Funktion eingesetzt (nun auch Bestimmungsgleichung) und damit die 2. Variable berechnet. Diese konkrete Lösung, das Wertepaar P(x; y) ist grafisch der ***Schnittpunkt der beiden Funktionen***.

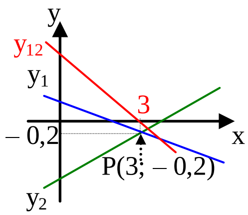
3. ***Summenverfahren*** :
(2 gleiche Terme)
(Summe oder Differenz)

$$\begin{aligned} 2x + 5 &= \boxed{-5y} + 10 \\ +\quad 3x - 3 &= \boxed{5y} + 7 \\ \hline 5x + 2 &= 0 \quad + 17 \\ 5x &= 15 \\ \underline{x = 3} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ $y_1 = -0{,}4x + 1$
$\rightarrow$ $-\;\; y_2 = 0{,}6x - 2$
$y_{12} = -1x + 3$
$0 = -1x + 3$
$x = 3$

$x = 3 \leftarrow y = -0{,}4 \cdot 3 + 1 \rightarrow x = 3$
$\underline{y = -0{,}2}$

Lösung : P (3 ; – 0,2)



Liegt in beiden Funktionen ein gleicher Variablenterm vor, so kann durch deren Summe (ungleiches Vorzeichen) oder Differenz die sich durch Wegfall dieser Variablen ergebende Bestimmungsgleichung gelöst werden. Die berechnete Variable wird in einer der Ausgangsfunktionen eingesetzt und die 2. Variable berechnet. Es ergibt sich wieder die Schnittpunktlösung (Verfahren 2, P(3; – 0,2)) oder über die direkte Summe/Differenz der Funktionen eine Gesamtfunktion y_{12} mit der Nullstellenlösung 3.

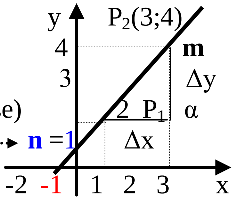
Zusammenfassung:

Sowohl für die Durchführung der drei Lösungsverfahren von den Funktionen bis zum Vorliegen einer Bestimmungsgleichung, als auch beim Lösen dieser von der unaufgelösten (impliziten) zur aufgelösten Form (explizite, x oder y herausgestellt), müssen die 3 Rechenregeln (s. Algebra 1), die 6 Rechenarten und ihre Umformungen ineinander vollständig beherrscht werden:

1. ***Klammern*** (höchste Priorität/Vorrang) zuerst behandeln:
   a) Ausmultiplizieren (Klammer auflösen, „Normalform“ herstellen): $a \cdot (b + c) = ab + ac$
   b) Ausklammern (Faktorisieren, besonders zum Kürzen in Brüchen → „Produktform“)
   $ab + ac = a(b + c)$ → in Termen gleiche Faktoren vor die Klammer
2. ***Punktrechnung*** (2. Stufe: Potenz, Wurzel und 1. Stufe: Produkt, Bruch):
   Terme umformen und vereinfachen:
   a) Potenzen und Wurzeln (2. Stufe) verrechnen: Wurzeln in Potenzen umwandeln
   $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$ und Exponenten mit einer Rechenstufe tiefer verrechnen, als ihre Potenzen verknüpft sind (s. 5.1.1) z.B. $\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}} = x^{\frac{9}{3}} = x^3$
   b) Produkt von Summen und Differenzen: Jedes Glied der ersten mit jedem Glied der zweiten Klammer malnehmen (Rechen- bzw. Vorzeichen beachten!)
   $(a + b) \cdot (c - d) = ac - ad + bc - bd$; Spezialfall: Binomische Formeln $(a \cdot b)^2$
   c) Teilen, Brüche: Erweitern (kgV ; gleichnamig machen) und Kürzen (ggT; Übersichtlichkeit)
3. ***Strichrechnung*** (Basis: Summe und Differenz):
   a) Terme ordnen: Gleichung: x-Glieder links, Konstante / gegebene Werte rechts
   Funktion : y-Glieder links, x-Glieder und Konstante rechts
   b) Therme zusammenfassen (1. Regel).
4. Nochmals ***Punktrechnung***:
   Koeffizient (Faktor vor gesuchter Größe) nach Regel 3 auf rechte Seite bringen (beide Seiten mit Kehrwert multiplizieren): $-2 \cdot y = 4x - 8 \quad | : (-2)$ oder $\cdot (-½)$ → $y = -2x + 4$

Ergebnis:

1. Lineare ***Funktion*** $\boxed{\mathbf{f\,(x) = y = mx + \underline{n}}}$ (Lösungsmenge) Funktionsgraf:
   z.B. y = 1x + 1



Wertetabelle: $P_n\,(x_n\,;\,y_n)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	Definitionsmenge
y	-2	-1	0	1	2	3	4	Wertemenge

y = n = 1 (Schnittpunkt mit y-Achse)

(Steigungsdreieck): Anstieg $\mathbf{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = tan Ñ
(Geo: Winkel-Fkt. tan Gegen- zu Ankathede)

durch Nullstellenverfahren (y = 0 setzen)

2. Lineare ***Bestimmungs-Gleichung***: $\boxed{\mathbf{0 = mx + n}}$ (1 Lösung)

Lösungsformel: → $\boxed{\mathbf{x} = -\frac{n}{m}}$ → *Lösung*: P(–1; 0)
(Schnittpunkt mit x-Achse, „Nullstellenlösung“)

Folgendes ist aus einer Funktionsgleichung ablesbar:

Das ***lineare Glied*** $\mathbf{m \cdot \underline{x}^1}$ hat die Variable x in der 1. Potenz. Alle abhängigen Funktionswerte y, die hintereinandergereiht die Kurvenform bilden (die abgebildete Funktion), verändern sich proportional. Gleiche Proportionen bedeuten aber eine ***Gerade***! Deshalb wird auch lineares Glied gesagt und nach diesem lineare Gleichung oder Gleichung ersten Grades.
Das x-Glied bzw. allgemein das höchste x-Glied (Potenz) kennzeichnet die ***äußere Kurvenform***.

Der ***Koeffizient*** **m** (Faktor vor Variabler) zeigt den ***Anstieg*** (Steilheit) der Kurve an. Er ist das Bruch-Verhältnis der Differenzen von Δy zu Δx zweier Funktionsergebnisse (Punkte) und bildet geometrisch das ***Anstiegsdreieck***. Dieses Seitenverhältnis ist die Winkelfunktion Tangens (siehe 6.3.3), genau wie ein Straßenanstieg von Höhenunterschied zu Grundlinie. Damit ist ein Anstieg also mit einem Bruch, einer Verhältniszahl (Kommazahl), einem Prozentausdruck oder einem Winkel (über tan Ñ) veranschaulicht. Ist m negativ, liegt eine fallende Gerade vor.

Die ***Konstante*** **n**, ist die Verschiebung der Geraden aus dem Ursprung in y-Richtung, hier n =1, also um +1 in y-Richtung verschoben. Ist n = 0, dann geht die Gerade durch den Koordinatenursprung → **y = mx**, die Grund- oder ***Elementarfunktion*** (1 Glied).

Die ***grafische Lösung*** wird über einzeln errechnete Lösungen (die Wertepaare in der Wertetabelle) realisiert. Da y nach x kommt, wird y als die abhängige Variable betrachtet. Für x werden nun x-beliebige (daher der Name) Zahlen eingesetzt (x wird *definiert* zu 3) . Der für x = 3 dazugehörige y-Wert ist im Beispiel y = 4.
Bei der Gleichung mit 2 Variablen, der Funktion, ist also y die gesuchte Größe und wird deshalb ***Funktionswert*** **y** genannt, der zu definierende x-Wert ***Definitionswert*** **x**.
Für das Zeichnen der Funktion (Geraden) genügen normalerweise die beiden herauslesbaren Punkte (Ergebnisse) für y = 0 (Nullstelle) und x = 0 (n; Schnittpunkt mit der y-Achse). Liegen beide wie im Beispiel jedoch zu eng zusammen, sollte zumindest ein drittes, etwas weiter gelegenes Wertepaar berechnet werden, um die Gerade exakt zu zeichnen.
In der ***Wertetabelle*** wird die benötigte Lösungsmenge in Form von Wertepaaren des Definitionswertes x und seinem zugehörigen Ergebnis, dem Funktionswert y eingetragen.

Auch die in der **Geometrie** angestellten Betrachtungen werden in der **Algebra** formelmäßig als Funktion oder Berechnungsgleichung abgehandelt, je nach dem, ob alle Größen der Formel bekannt (gegeben) sind oder verschiedene Formeln (Funktionen) erst zu einer Berechnungsformel zusammengesetzt werden müssen (entspricht dem Einsetzungsverfahren).

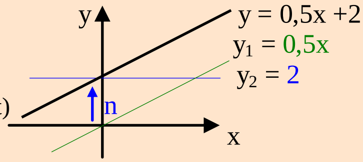
Alle bekannten Rechenweisen mit Zahlen bzw. ihren Darstellungsformen werden jetzt nur mit Buchstaben wiederholt.
Dafür sollen uns folgende Überlegungen noch einmal bewusst werden:

Mit **3** ***Lösungsverfahren*** werden in der Reihenfolge Funktionssystem, Funktionsgleichung die Variablen bis auf eine reduziert, die dann als Unbekannte mit der ***Bestimmungsgleichung*** konkret zahlenmäßig bestimmt werden kann.
Die so berechnete 1. Variable in der 2. Funktion eingesetzt macht die 2. Variable bestimmbar, diese wiederum die 3. Variable usw. Dies ist der grundsätzlichen Sachzusammenhang der Algebra und der immer wieder gleiche Lösungsablauf.

Jedes Element oder Glied einer Gleichung ist ***mehrfach zerlegbar*** bzw. ***umformbar***, genau wie es verschiedenste Zahlendarstellungsformen gibt. Ein Element (ein Ergebnis) kann z.B. in eine x-beliebige Rechenaufgabe zurück geführt bzw. „zerlegt“ werden: 23 → in $3 \cdot 7 + 2$ (ein Binom)

Eine ***Funktionsgleichung*** ist ***Summe*** von ***elementaren*** (Grund-)***Funktionen*** (nur 1 Glied), genau wie alle Zahlen eine Summe von Ziffern mal Stellenwert sind.

$\mathbf{y = y_1 + y_2}$ z.B. $y = 0{,}5x + 2$
aus $y_1 = 0{,}5x$ und $y_2 = 2 = n$
(in Abiturstufe auch Linearkombination genannt)
d.h., $y_1 = 0{,}5x$ wird um $y_2 = 2$ in y-Richtung angehoben!



Diese ***Normalform*** oder auch ***Polynomform*** (Polynom - mehrere Glieder) der Gleichung drückt die in der ***Grundrechnung*** stehenden Glieder aus.

Die ***Produktform*** ist die zweite Möglichkeit, wenn Summen und Differenzen miteinander multipliziert werden z.B. die 3. binomische Formel $y = (x + n)E(x - n)$ (Funktion 2. Grades)
Nach dem Ausmultiplizieren liegt wieder die Normalform vor: $y = x^2 - xn + xn - n^2 = x^2 - n^2$

Bei der ***Bruchform***, der ***Binomdivision*** (Gymnasium) wird die Produktform aus der Normalform durch Teilen mit einer Nullstellenlösung gewonnen: $(x^2 - 2xx_0 + x_0^2) : (x - x_0) = x - x_0$
Wird der Teiler $(x - x_0)$ auf die rechte Seite geschrieben, erkennt man das Produkt $(x - x_0)E(x - x_0)$ [2. Binomische Formel].

Die **3** grundlegenden ***Rechenregeln***:
1. Nur Gleichartiges kann miteinander verglichen und verrechnet werden.
2. Die Rechenreihenfolge geht von der 2. über die 1. höhere zur Grundrechenstufe. Klammern müssen jedoch zuerst gelöst werden.
3. Beim Umformen und Umstellen (auf die Gegenseite) muss doppelt negiert werden bzw. beidseitig das Gleiche verrechnen.

Die **4** ***Darstellungsformen*** der ***gebrochenen Zahl***:
Kommazahl, gemischter Bruch, gemeiner Bruch und Prozentausdruck ($\frac{1}{100}$ -Bruch)

Die **3** ***Rechenstufen***:
Summe - Differenz → Produkt - Bruch → Potenz - Wurzel/Logarithmus

Beispiel: $2x + \frac{x+1}{3} = \frac{3x-2}{2} + 3$ zuerst in „Normalform“ (einzelne Glieder), Brüche

$2x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}x - 1 + 3$ in je 2 Einzelbrüche mit gleichem Hauptnenner zerlegt

$2\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}x = 2 - \frac{1}{3}$ Glieder ordnen und Gleichartiges zusammenfassen

$2\frac{2}{6}x - \frac{9}{6}x = 1\frac{2}{3}$ x-Terme auf gleichen HN bringen

$\frac{5}{6}x = \frac{5}{3}$ gesamte Gleichung mit Kehrwert $\frac{6}{5}$ Malnehmen,

$\underline{x = 2}$ 5en wegkürzen sowie 6 : 3 = 2

Weitere Betrachtungsmöglichkeiten:
Rechte und linke Seite einer linearen Gleichung jeweils als verschiedene Funktionen, aber mit gleichem Funktionswert y ansehen (obiges Beispiel, 2.Zeile). Die Gleichung wird rückgeführt <u>vor</u> das Einsetzungsverfahren mit 2 Funktionen bzw. ist aus diesen 2 Funktionen entstanden:

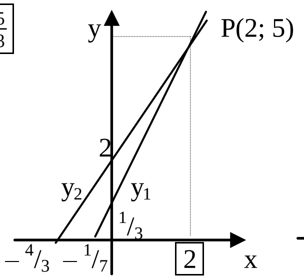
$2\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}x + 2 \rightarrow 0 = \boxed{y = -\frac{5}{6}x + \frac{5}{3}}$

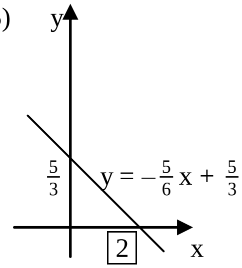
$y_1 = 2\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

x	$-\frac{1}{7}$	0
y	0	$\frac{1}{3}$

$y_2 = \frac{3}{2}x - 1 + 3$

x	$-\frac{4}{3}$	0
y	0	2



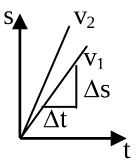


Der ***x-Wert des Schnittpunktes*** beider Funktionen y_1 und y_2 ist gleich der Lösung der linearen Funktion, die nach dem Einsetzungsverfahren entsteht (Graf 2; Nullstelle x = 2). Die Lösungspunkte von y_1 und y_2 (Tabellen) interessieren nur zum Zeichnen des 1. Grafen.

Die lineare Funktion hat einen konstanten Anstieg. Seine Berechnung $\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$ (***Differenzenquotient***) aus dem Steigungsdreieck heraus, ergibt immer den gleichen Wert. Auch bei allen anderen (nichtlinearen) Funktionen wird der (veränderliche) Anstieg für die Kurvencharakteristik bestimmt. Dies ist in der einfachsten Form die ***Differentialrechnung*** der 11. Klasse, in der Funktionsbetrachtung eine Stufe tiefer zu kommen, die Funktion etwas genauer zu untersuchen, differenziert zu betrachten, zu charakterisieren, auseinander zu nehmen.

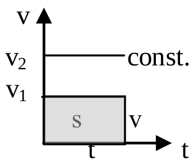
Am Beispiel der gleichförmigen Bewegungsfunktion wird es uns klar:

$\boxed{s = v \cdot t^1}$



$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ = const. → ***Differenzieren***, eine Stufe tiefer

v hat für jede Kurve nur <u>einen</u> konkreten (const.) Wert (rechts) und wird als Parameter der Variablen t an die übergeordnete Kurve (links) geschrieben.



Die Wegfunktion s 1.Grades beinhaltet die Geschw.-Funktion v des 0.Grades (eine Konstante).

-eine Stufe höher durch Flächensumme bilden /***Integrieren*** (Zusammensetzen) ← $\boxed{s = v \cdot t}$
Die Fläche unter einer Kurve ist immer die darüber liegende, um ein Grad höhere Funktion!

Differenzieren ist das Berechnen des Kurvenanstieges, der „Steilheit“, geometrisch das Steigungsdreieck, winkelmäßig der Tangens. Die Funktion wird analysiert. Es entsteht eine Unterfunktion.

Integrieren ist das Berechnen der Fläche unter der Kurve einer Unterfunktion. Damit wird wieder die Ausgangs(Stamm-)Funktion bestimmt (Gymnasium 11.Klasse).

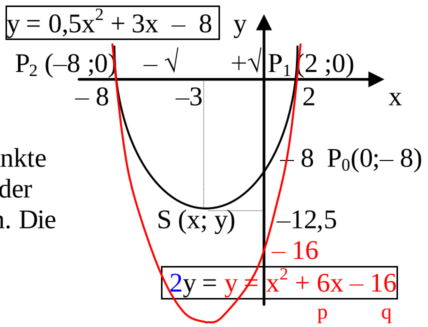
Versinnbildlicht ist das Integrieren das Zusammenbauen einzelner Baugruppen (Einzelfunktionen) zur Gesamt(Stamm-)Funktion eines Gerätes, die vorher zum besseren Begreifen durch Auseinandernehmen (Differenzieren) genauer betrachtet wurden.

5.4.3 Die quadratische Funktionsgleichung (x^2)

Allg.: $\boxed{\mathbf{ax^2 + bx + c = d + ey}}$ konkret: $2x^2 + 12x + 8 = 40 + 4y$ (implizite Form)

Die quadratische Funktionsgleichung ist eine ***Gleichung 2. Grades***, da ihre bestimmende Variable (Definitionsgröße x) als höchste Potenz den Exponenten 2 hat. Die ***Gradbezeichnung*** wird für <u>alle</u> Gleichungen nach der ***höchsten vorkommenden Potenz*** vorgenommen. Dabei können, aber müssen nicht immer alle darunter liegenden Grade vorliegen!
Sie hat sowohl das quadratische (ax^2) als auch das lineare Glied (bx^1) und Konstanten (c und d). Die Auflösung zur expliziten Funktionsform (y herausgestellt) sowie der Berechnungsgleichung (Nullstellenlösung) geschieht wie im letzten Abschnitt am Beispiel der linearen Funktion beschrieben und für alle Funktionen gleichermaßen im immer wieder gleichen Lösungsablauf.

$2x^2 + 12x + 8 - 40 = 4y \rightarrow y = \frac{2}{4}x^2 + \frac{12}{4}x - \frac{32}{4}$



1. Funktion: $\boxed{\mathbf{y = ax^2 + bx + c}}$

Für das Zeichnen der Kurve sind hier mindestens 3 Punkte (Lösungen, Wertepaare) nötig. Für x = 0 ist wiederum der Schnittpunkt P_0 mit der y-Achse (y = c = – 8) gefunden. Die 2 Schnittpunkte P_1, P_2 mit der x-Achse sind die Nullstellenlösungen: (y = 0)

2. Bestimmungsgleichung: $0 = ax^2 + bx + c$ | :a → in die „***Normalform***“ $0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$

$$\boxed{\mathbf{0 = x^2 + p\,x + q}}$$

(höchstes x-Glied ***ohne*** Koeffizienten !)

Lösungsgleichung: $\boxed{\mathbf{x_{1,2}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt[2]{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$ <u>Achtung</u>: $\frac{p}{2}$ und q negativ zur Normalform

$-{}^{p}/_{2}$ ist der x-Scheitelwert G ergibt die Nullstellen. aus $0 = 0{,}5\,x^2 + 3x - 8$ | : 0,5 oder ·2

Nullstellen: $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt[2]{9+16}$ wird $\boxed{0 = x^2 + 6x - 16}$ (steilere Kurve, aber gleiche Nullstellen!)

$x_{1,2} = -3 \pm 5$

$x_1 = 2$ $P_1(2;0)$; $x_2 = -8$ $P_2(-8;0)$

Ein weiteres Wertepaar, den Scheitel- oder Extrempunkt S(x; y) findet man auf folgende Weise: Die <u>Funktion</u> in die „Normalform“ bringen (wie oben, x^2 ohne Koeffizient):

$\frac{1}{a}y = \boxed{x^2} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ durch a und ersetzt : $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$

$\boxed{\frac{1}{a}y = x^2 + p\,x + q}$ → ***Scheitelpunkt*** (Extrempunkt) $\mathbf{S}\left(-\frac{p}{2}\ ;\ \mathbf{a}\cdot\left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right)$

x entspricht 1. Glied der Lösungsgleichung
y ist die <u>umgedrehte</u> Differenz des Wurzelwertes. Zu beachten ist jedoch, dass y einen Koeffizienten hat, mit deren Kehrwert noch multipliziert werden muss.

$2y = x^2 + 6x - 16 \rightarrow$ S (– 3; ½ (– 16 – 9)) = S (–3; – 12,5) aber für y: S (–3 ; –25) <u>ohne a</u> !

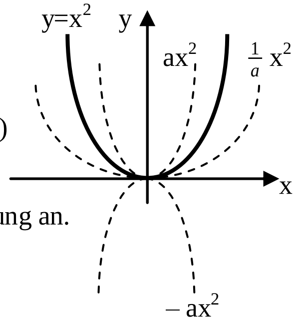
Damit sind 4 aussagekräftige Lösungspunkte gefunden, die in der Wertetabelle eingetragen werden und die ***Parabel*** (Formbezeichnung) wird mit der Kurvenschablone gezeichnet.

Scheitelpunkt → ← y-Schnittpunkt

x	– 8	– 3	0	2
y	0	– 12,5	– 8	0

Nullstellen ↑ ↑ x-Schnittpunkte

Die Grundfunktion: $\boxed{y = x^2}$ (Die ***Normalparabel***)



x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

(Achsensymmetrie)

Erweiterung ***Steilheit*** (Anstieg): $\mathbf{y = \boxed{a}\, x^2}$ (a « m)

Das quadratische Glied zeigt die Kurvenform im Koordinatenursprung an.

Bei a =1 (Grundfunktion, s. Tabelle) ist es die Normalparabel.

a >1 die Parabel wird steiler (Parabel„äste“ enger)

0 < a <1 die Parabel wird flacher (breiter; a ist Bruchanteil „$^1/_a$“)

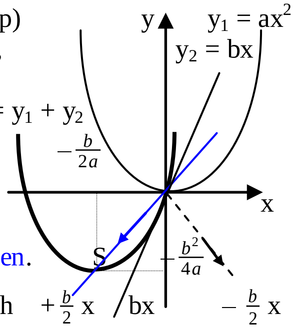
a < 0 = – a die Parabel wird ins Negative geklappt

Erweiterung ***lineares Glied***: $\mathbf{y = a\, x^2 + \boxed{b\, x}}$ (Lösung $x_1 = 0$; $x_2 = –p$)

Beide Glieder sind Grundfunktionen durch den Koordinatenursprung, die Parabel $y_1 = ax^2$ und die Gerade $y_2 = bx$ werden aufsummiert zur Gesamtfunktion $y = y_1 + y_2$. Die Ursprungparabel mit S(0; 0) verschiebt sich dabei an der Geraden $y = {}^b/_2\, x$ zum neuen

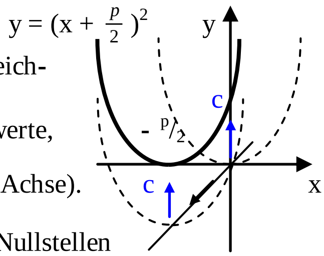
Scheitelwert S(x; y): $S\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ -\frac{b^2}{4a}\right)$; $m = -\frac{b^2}{4a} : -\frac{b}{2a} = \frac{b}{2}$

ist die Steilheit der ***Verschiebungsgeraden*** aus den Scheitelkoordinaten.



Anstelle des Scheitelpunktes geht nun ein Ast (Nullstelle $x_1 = 0$) durch den Ursprung. Bei $– {}^b/_2\, x$ (fallend) wird die Parabel nach rechts unten verschoben.

Erweiterung ***Konstante***: $\mathbf{y = a\, x^2 + b\, x + \boxed{c}}$



Die Konstante c (≙q) ist die Verschiebung in y-Richtung und gleichzeitig Schnittpunkt mit der y-Achse (≙ n der linearen Funktion).

Ist c negativ (nach unten), bekommt man <u>immer</u> 2 Berechnungswerte,

die Nullstellenlösungen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ (Schnittpunkte x-Achse).

Im Fall $q = \frac{p^2}{4}$ ist der Wurzelwert 0 → $x_{1,2} = -\frac{p}{2}$, d.h., beide Nullstellen decken sich und die Parabel ***berührt*** mit **S($-\frac{p}{2}$; 0)** die x-Achse. Es ist die **1. *binomische Formel***

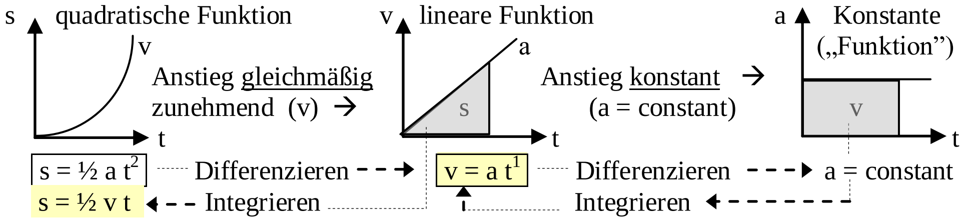
$y = x^2 + 2\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}$ bzw. $\mathbf{y = (x + \frac{p}{2})^2}$. Wird x zu $-\frac{p}{2}$, dann ist die Doppelnullstelle gefunden!

Ab $q > \frac{p^2}{4}$ ist die Parabel über der x-Achse und es gibt keine reellen Lösungen mehr.

Der Wurzelwert ist negativ. Man spricht von ***imaginären*** Lösungen. Sie werden in der Abiturstufe als imaginärer Zahlenanteil $j = \sqrt{-1}$ der komplexen Zahl gelöst. Wo die einzelnen Lösungen liegen und ob sie reell oder imaginär sind, hängt also eindeutig vom Wurzelwert ab, auch ***Radikant*** und bezüglich der Lösungsart ***Diskriminante* D** = $({}^p/_2)^2$ – q genannt.

D > 0: 2 reelle Lösungen D = 0: 1reelle Doppellösung D < 0: 2 imaginäre Lösungen

Beispiel (Physik): Gleichmäßig beschleunigte Bewegung



Betrachten wir ein Auto mit der innersten Funktion der Motorleistung, wirksam werdend mit dem Beschleunigungswert a. Wird der Gashebel gleichmäßig durchgetreten (a = const. 3. Bild), so steigt auch die Geschwindigkeit v des Autos gleichmäßig an (ansteigende Gerade 2. Bild). In der „darüber liegenden" Umwelt legt das Auto einen immer größer werdenden (potenzierten, hier quadratischen) Weg s zurück (1. Bild)! Die Zusammengesetzte Haupt-(Stamm-)Funktion Weg s ist abhängig vom Parameter v, der selber wieder eine Funktion des weiteren Parameters a ist. Beide für sich sind auch Funktionsgrößen der Definitionsgröße (Variablen) t.

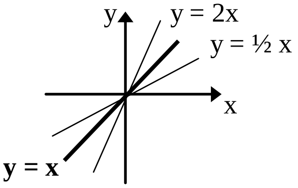
5.4.4 Die Quadratwurzel - Funktion $\left(\sqrt[2]{x}\right)$ (Potenzfunktion mit gebrochenem Exponenten)

Erinnern wir uns, dass die Gegenrechnung oder die Gegenfunktion (inverse Funktion) in der Punktrechnung (1. und 2. höhere Rechenstufe) immer mit dem ***Kehrwert*** (reziproken Wert) zu tun hat

z.B. $y = 2\,x$ → Umrechnung $x = ½\,y$ und Vertauschung $y = ½\,x$

Da man bei einer Funktion als Abhängige stets y verwendet, werden x und y vertauscht.
Beide Gegensätze sind eine lineare Funktion. Nur der Koeffizient wurde umgekehrt, aber nicht die Variablen. Bei Funktionen sind jedoch die Variablen die Entscheidungsgrößen, genauer der Grad der Variablen-Potenz, also der ***Exponent***.
Das bedeutet, dass die lineare Funktion keine Gegenfunktion hat. Die Geradensymmetrie an der ***Symmetrieachse*** **y = x** bleibt aber. An dieser werden alle noch folgenden Funktionen durch Variablentausch von der y-Achse auf die x-Achse als Gegenfunktion gespiegelt werden.

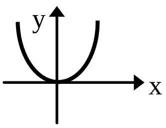
Lineare Funktion $y = x^1$ → $x = y^1$ keine Umkehrung (Kehrwert von 1 bleibt 1, erste Wurzel gibt es nicht!) (Funktion ist selber Umkehr-/Symmetrieachse, als Gerade mit 45° Anstieg)



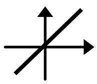
Die Umkehrung der quadratischen in die Quadratwurzel-Funktion ist folgenderweise betrachtet:
$y = x^2$ → Variablentausch $x = y^2$ und Gegenrechnung für beide Seiten $\sqrt{x} = \sqrt{y^2}$
Potenz und Wurzel bei y heben sich als Gegenteile auf $y = \sqrt{x} = x^{½}$ (Exponenten-Kehrwert)

Quadratische Funktion — Umkehrung — **Quadratwurzel-Funktion**

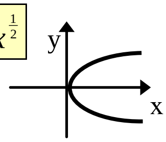
$y = x^2$



$x = y^2$ Auflösen → $\boxed{y = \pm\sqrt[2]{x^1} = x^{\frac{1}{2}}}$

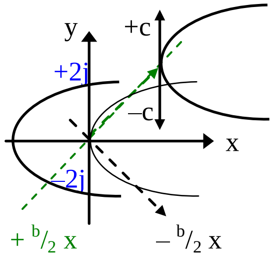


grafisch an y = x „spiegeln"



Alle Grundfunktionen mit ***geraden Potenz-*** bzw. ***Wurzelexponenten*** werden auch noch als ***gerade Funktionen*** bezeichnet. Sie liegen symmetrisch zur y- bzw. x-Achse (***Achsensymmetrie***) und verlaufen mit höheren Exponenten immer steiler, aber immer in diesen beiden benachbarten Quadranten.

Ist **x *negativ***, wird an die Wurzellösung der Imaginär-Faktor j angehängt: $y = \sqrt[2]{-4} = \sqrt[2]{(+4)\cdot(-1)} = 2\cdot\sqrt[2]{-1} = \pm 2\,j$
Die Parabel wird um x ins Negative verschoben und die y-Schnittpunkte sind die Imaginärlösungen +aj und –aj.
Bei $y = \sqrt{x} + bx + c$ muss die Verschiebungsgerade $^{b}/_{2}\,x$ für reelle Lösungen dann logischerweise positiv orientiert sein!
Bei – bx liegt wieder die fallende Verschiebungsgerade – $^{b}/_{2}$ x vor.
Die Konstante c ist wie bei allen Funktionen die y-Verschiebung.

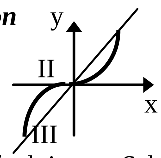


5.4.5 Die kubische Funktion (x^3) und Kubikwurzel-Funktion $\left(\sqrt[3]{x}\right)$

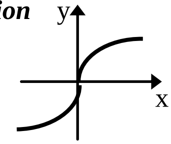
Spiegelachse

Kubische Funktion *Umkehrung* ***Dritte Wurzel-Funktion***

$\boxed{y = x^3}$



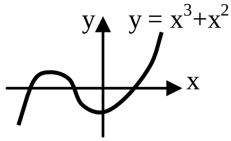
$x = y^3$ Auflösen → $\boxed{y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}}$



(ungerade Grundfunktionen: Schräg gegenüberliegende Quadranten → ***Punktsymmetrie***)

Alle weiteren ***ungeraden Potenzfunktionen*** (x^5, x^7...) haben die ***gleiche Funktionskurve***, nur verlaufen sie entsprechend steiler (a >1) oder flacher (a <1). Durch das Dreifachprodukt (x^3) oder allgemeiner die ungerade Anzahl bei negativen Faktoren (– x) ergibt sich dann auch immer ein negativer Funktionswert y. Dies ist grafisch ersichtlich im Abklappen des linken Parabelastes der geraden (quadratischen) Funktion aus dem II. Quadranten in den III. Quadranten.
Eine ungerade ***Wurzel*** aus einem negativen Wurzelwert ist demzufolge auch lösbar!

Tritt weiterhin ein quadratisches Glied x^2 auf, dann ist innerhalb des kubischen Kurvenverlaufs eine Parabel erkennbar. Ein lineares Glied mx bringt wie bei der quadratischen Funktion die lineare Verschiebung aus dem Koordinatenursprung und eine Konstante die y-Verschiebung.



Die Lösung der Gleichung 3. Grades ist nur möglich, wenn keine Konstante enthalten ist:

$0 = x^3 + 4x^2 + 3x$ → Man klammert 1mal x aus und formt damit die Normalform in die Produktform um. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn 1 Faktor „0“ ist:

x_1E$(x^2 + 4x + 3) = 0$ → $x_1 = 0$

$(x^2 + 4x + 3) = 0$ → $x_{2,3} = -2$ G$\sqrt{4-3}$

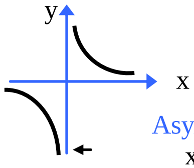
$x_2 = -1$

$x_3 = -3$

5.4.6 Die Hyperbel-Funktion und ihre Asymptoten

Hyperbel-Funktion

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^{+n}}$$



Direkte Bruchfunktion - negativer Exponent

Asymptoten (Tangenten im Unendlichen);
x = 0 ist Polstelle (Fkt's -Fehlstelle)

Regel 3: „–“ ist Gegenseite Nenner mit „+“ ,aber auch $x^{+n} \cdot y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{x^{+n}}$ (Gleichungsgegenseite und Rechenart)! Ein negativer Exponent im Zähler bedeutet also das Gleiche wie diese Potenz im Nenner mit positivem Exponenten (3. Rechenregel, s. Dezimalen der Zahl)!
Der gebrochene Kurvenverlauf links und rechts der y-Achse (Fehlstelle, da durch x = 0 nicht teilbar) nähert sich im Unendlichen der y-Achse an. Solche Geraden, denen sich eine (nichtlineare) Funktionskurve linear annähert (Tangente und Kurve werden im Unendlichen eine Gerade), werden als ***Asymptoten*** bezeichnet. Für x=∞ wird y=0 → auch die x-Achse zur Asymptote.

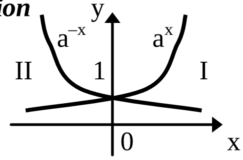
Die Winkelfunktionen Tangens und Kotangens haben z.B. gleiche asymptotische Verläufe.
Die Unterbrechungen (Fehlstellen) im Kurvenverlauf dieser Art werden ***Polstellen*** genannt.
Die Logarithmus.-Funktion beginnt ab x>0, also keine Polstelle, aber y-Achse ist Asymptote.

5.4.7 Die Exponentialfunktion (a^x) und Logarithmusfunktion ($\log_a y$)

Exponential-Funktion

$$y = a^x$$

$$y = a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

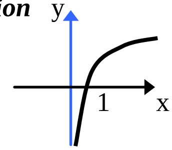


Umkehrung

$x = a^y$ Auflösen →

Logarithmus-Funktion

$$y = \log_a x$$



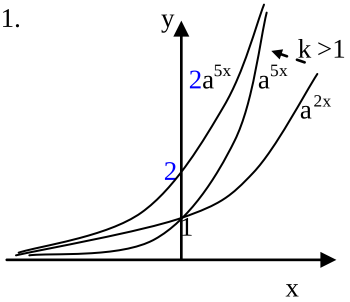
a = 10 (y =Dezimalzahl) positive x = Parabelast ← lg = dekadischer Log.
a = 2 (y =Binär-/Dualzahl) negative x = Hyperbelast lb = binärer Logarithmus
a = e (natürliche, Euler-Zahl) (a^{-x}: negat. x → –(–x) ln = natürlicher Logarithmus

Die Funktion der Dezimal- und der Dualzahl sind im Abschnitt 3.1 beschrieben. Die einzelnen Stellenwerte ergeben sich durch die ganzzahlige Abfolge des Exponenten x von 0 (1. Stelle), 1 (2. Stelle), 2 (3. Stelle) ...usw.
Mit der ***Eulerzahl* e** als Basis, die so benannte **e-*Funktion***, werden fast alle Wachstums- oder Zerfallsprozesse in der Natur (der Mensch ist auch Natur!) und auch viele wirtschaftliche und ökonomische Abläufe beschrieben. Denken wir nur an die Zinseszinsrechnung mit der Jahresanzahl als Exponent, an Börsenkurse bei Konjunktur (Marktbelebung) oder Rezession (Rückgang), an Alkoholabbau im Blut, Vermehrung von Bakterienkulturen (Biologie) oder den radioaktiven Zerfall (Atomphysik).

Im Gegensatz zur normalen Potenz-Funktion, bei der die Variable x die Basis bildet und bei $-x^2$ die Parabel bzw. x^3 nur der negative Parabelast nach unten abgeklappt wird (s. 5.3.5), ist **x** hier der ***Exponent*** bei $a^{\mathbf{x}}$!
Im **I**. ***Quadranten*** (+x) liegt also wie für alle Potenz-Funktionen (ausgenommen lineare Fktn.) die ***Parabel*** vor und im **II**. Quadranten (–x) die ***Hyperbel***-(Bruch-)Funktion (wie $10^{-2} = \frac{1}{100}$).

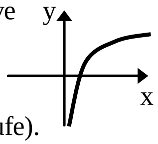
Ist die Funktion aber bereits $y = a^{-(\mathbf{x})}$, so ist mit +x die ***Hyperbel*** (–(+x)) im **I**. und mit –x die ***Parabel*** (–(–x)) im **II**. Quadranten, also symmetrisch zur y-Achse. Solche ***Symmetrie***verhältnisse und auch die ***Monotonie***, das heisst, ob eine Funktion nur in einer Richtung (nur steigend oder fallend) verläuft, spielen in der Abiturstufe noch eine große Rolle.

Die Exponential-Funktion in der ***Grundform*** (ohne Faktor) schneidet die Ordinate immer bei **y = 1**, denn <u>jede</u> Zahl mit dem Exponenten x = 0 ist die Zahl 1.
Ist ein zusätzlicher Faktor k vorhanden, bedeutet dies wiederum die Veränderung des Kurvenanstieges (Steilheit), wie bereits bei der Quadratischen Funktion kennen gelernt.
Bei $y = a^{kx}$ bleibt der Schnittpunkt y = 1 aber erhalten, denn Bei x = 0 ist der Gesamtexponent auch 0 und die Potenz 1.



Bei $y = k \cdot a^x$ ergibt sich k als Schnittpunkt (y = k), denn
$y = k \cdot a^0 = k \cdot 1 = k$ → $2a^{5x}$ Schnittpunkt 2.
Die Exponentialform gibt es nur für positive Zahlen y (Erklärung siehe inverse Funktion, Begriff: In-Version / Gegen-Sicht, aber auch avers von anti-vers → Rückseite einer Münze)

Bei der Gegen-Funktion (***inversen Funktion***) Logarithmus ist zu beachten, dass x und y vertauscht sind. Y ist jetzt nicht mehr die Ergebniszahl (Numerus), sondern der Exponent (Logarithmus) und x nicht mehr der Exponent, sondern der Numerus!
Im Bereich der reellen Zahlen ist der Logarithmus für die Zahl 0 und für negative Zahlen (–x) nicht definiert. Die 0 ist Grenzfall für den Ausdruck $x^{-\infty} = \frac{1}{x^{\infty}}$.
Die $-x = -x^y$ ist für gebrochene Exponenten y das Gleiche wie eine negative Wurzel! Es gibt dann nur imaginäre Lösungen einer Komplexen Zahl (Abiturstufe).



5.4.8 Funktionen - Übersicht:

Um aus Funktionen Berechnungs-(Bestimmungs-) Gleichungen zu machen, gibt es 3 Lösungsverfahren:

1. Nullstellenverfahren y = 0 setzen y = 5x + 10 → 0 = 5x + 10 → $x = -\,^{10}/_{5} = -2$
   (1 Funktion) (Kurvenschnittpunkt mit x-Achse)
2. Einsetzungsverfahren I $x = \boxed{3y}$ (Gleichsetzungsverfahren ist das Einsetzungsverfahren!)
   (allg. 2 Funktionen) II $\boxed{x} + 5 = 5y - 10$
   I in II $3y + 5 = 5y - 10$ (Schnittpunkt beider Funktionskurven)
3. Summenverfahren $2x + 5 = \boxed{-3y} + 10$
   (2 gleiche Terme) $+\ 3x - 3 = \boxed{3y} + 5$
   $5x + 2 = 0 + 15$ (Nullstelle der zusammengesetzten Funktion)

Lösung :

Befolgen der 3 Rechenregeln und beherrschen der 6 Rechenarten
1. Sind Klammern vorhanden (höchste Priorität), müssen diese aufgelöst werden
   a) Ausklammern (Faktorisieren, besonders zum Kürzen in Brüchen) $ab + ac = a(b + c)$
   b) Ausmultiplizieren (Klammer auflösen, Herstellen der „Normalform“) $a \cdot (b + c) = ab + ac$
2. Punktrechnung (Potenz, Wurzel und Produkt, Bruch) : Terme umformen, vereinfachen

   a) Potenzen und Wurzeln (2. Stufe) verrechnen: Wurzeln in Potenzen umwandeln $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$ und Exponenten mit einer Rechenstufe tiefer verrechnen, als ihre Potenzen verknüpft sind z.B.
$$x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{8}{5}} = x^{\frac{2}{5}+\frac{8}{5}} = x^{\frac{10}{5}} = x^2$$
   b) Produkt von Summen und Differenzen: Jedes Glied der ersten mit jedem Glied der zweiten Klammer malnehmen: (a + b) E(c – d) = ac – ad + bc – bd ; Spezialfall: <u>Binomische Formeln</u> $(a\ G\ b)^2$
   a) Teilen, Brüche (s. 3.6): Erweitern (gleichnamig machen) und Kürzen (Übersichtlichkeit)

3. Strichrechnung (Basis): Terme ordnen, zusammenfassen (1. Regel), Term mit gesuchter Größe auf linke Seite bringen und die Unbekannte/Variable daraus eliminieren (nochmals Punktrechnung, 3. Regel)

Ergebnis:

Lineare Gleichung bzw. lineare Funktion (System 1.Grades x^1, y^1, z^1)

Allgemein: $\boxed{a + bx + cy + dz = e}$ a bis e (Anfangsbuchstaben) sind Zahlenwerte
x, y, z (Endbuchstaben) sind Variable
b·x Glied (Produktterm)
c·y(x) (Funktionsterm z.B. 3Ecos Ñ)

Eine Gleichung mit 2 oder mehr Variablen ist eine Funktion, die nur grafisch als Kurve die gesamte Ergebnismenge darstellt. Eine konkrete rechnerische Lösung in Form der Lösungsgleichung (1Variable = Unbekannte) entsteht immer als eine mögliche Lösung einer oder mehrerer dieser Funktionen. Bei linearen Funktionen stehen die Variablen in der 1.ten Potenz)

1. ***Funktion*** $\boxed{f(x) = y = mx + \underline{n}}$ (Lösungsmenge)

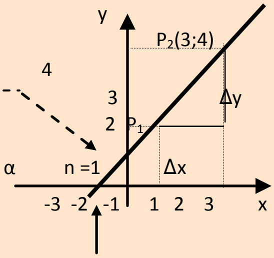
Wertetabelle: / $P_n (x_n ; y_n)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	Defin.menge
y	-2	-1	<u>0</u>	1	2	3	4	Wertemenge

y = n = 1 (Schnittpunkt mit y-Achse)

Funktionsgraf:

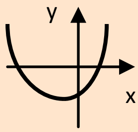
Anstieg $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = tan α



2. ***Lösungsformel*** (y = 0 setzen): $\boxed{0 = mx + n}$ → $\boxed{x = -\frac{n}{m}}$ (1 Lösung, Schnittpunkt mit x-Achse, Nullstelle)
(Bestimmungsgleichung)

Nichtlineare Gleichungen / Funktionen: (alle Potenzfunktionen mit Exponent ≠ 1 und Winkel-Funktionen.)
(Lösungsablauf wie oben beschrieben)

Potenz-Funktionen: z.B. ***Quadratische Funktion***: $x^2 + ax + b = y$ →
Bestimmungsgleichung $\mathbf{x^2 + a x + b = 0}$
2 Lösungen (Nullstellen)



Ergebnis: Berechnungs-***Formel*** $x_{1,2} = -{}^{a}/_{2} \pm \sqrt{(-{}^{a}/_{2})^2 - b}$

allgemeine Lösung $\mathbf{f(x^2) = y = m x^2 + a x + b}$

$\boxed{a + b x^n + c y = d}$

m: Anstieg der Kurve (Steilheit)
x^n : Kurvenform → Parabel (Fkt. 2. Grades)
ax : lineares Glied, Verschiebung in x-y-Richtung
b: Konstante, Verschiebung in y-Richtung

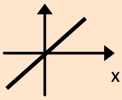
Wurzel-Fktn.: $y = a \sqrt{bx + c} + dx + e$
Exponential-Fktn.: $y = a \cdot 10^x + b \cdot 2^x + c \cdot e^x + d$
Logarithmus-Fktn.: $y = a \cdot \lg x + b \cdot \mathrm{lb}\, x + c \cdot \ln x + d$
Hyperbel-Fktn.: $y = a \cdot \frac{1}{x} + b \cdot \frac{c+x}{x^2}$

Winkel-Funktionen.: $\boxed{y = a \cdot \sin \alpha + b \cdot \cot \beta + c \cdot \arccos \gamma}$

Grundtypen : **Potenzfunktionen** (3. Rechenstufe)

Lineare Funktion

$y = x^1$

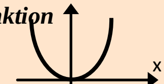


keine Umkehrung (Kehrwert von 1 bleibt 1, erste Wurzel gibt es nicht!)

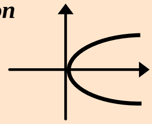
$x = y^1$ (Funktion ist selber Umkehr- / „Spiegel"achse, Gerade mit 45° Anstieg)

Quadratische Funktion *Umkehrung* ***Quadratwurzel-Funktion***

$y = x^2$



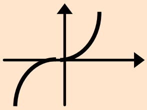
$x = y^2$ Auflösen → $y = \pm\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$



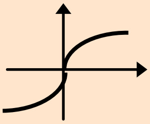
(gerade Funktion: benachbarte Quadranten → Achsensymmetrie)

Kubische Funktion ***Dritte Wurzel-Funktion***

$y = x^3$



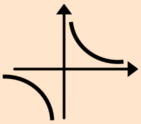
$x = y^3$ Auflösen → $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$



(ungerade Funktion: schräg gegenüberliegende Quadranten → Punktsymmetrie)

Hyperbel-Funktion

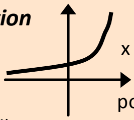
$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$



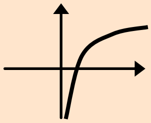
Direkte Bruchfunktion; negativer Exponent im Zähler bedeutet positiver Exponent im Nenner

Exponential-Funktion ***Logarithmus-Funktion***

$y = a^x$



$x = a^y$ Auflösen → $y = \log_a x$

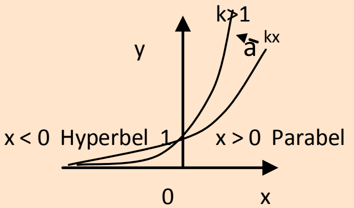


a = 10 (Dezimalzahl)
a = 2 (Binär-/Dualzahl)
a = e (natürliche, Eulersche Zahl)

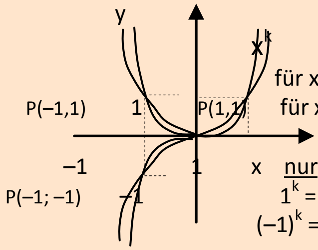
positive x = Parabelast
negative x = Hyperbelast

lg = dekadischer Log.
lb = binärer Logarithmus
ln = natürlicher Logarithmus

Exponential-Funktion im Vergleich ⟷ Potenzfunktionen mit positiven ganzen Exponenten



$a^0 = 1$ → P(0;1)

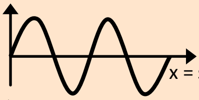


bei gleichem k:
für x > 1 aufsteilend
für x < 1> –1 flacher Verlauf (Bruchzahl)
<u>nur</u> für x = 1 bzw. –1
$1^k = 1$ → P(1; 1)
$(-1)^k = \pm 1$ → P(–1; 1) k gerade
P(–1; –1) k ungerade

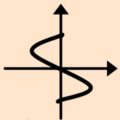
Winkelfunktionen (rechtwinkliges Dreieck und Kreis):

Sinus-Funktion ***Arkus***-(Bogenmaß-)***Funktionen***

y = sin x

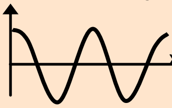


x = sin y Auflösen → y = arcsin x

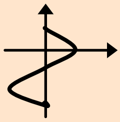


Kosinus-Funktion

y = cos x

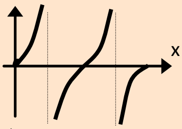


x = cos y Auflösen → y = arccos x

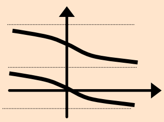


Tangens-Funktion

y = tan x

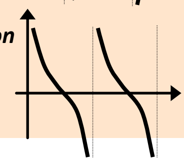


x = tan y Auflösen → y = arctan x

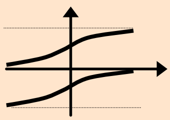


Kotangens-Funktion

y = cot x



x = cot y Auflösen → y = arccot x



5.5 Termumformungen („Termberechnungen“, Gleichungen vereinfachen)

Term„berechnungen“ sind nur Teilaufgaben (Übungen) zur Vereinfachung! Für die Lösung einer Aufgabe (Gleichung) werden einzelne Terme so umgeformt (und nicht berechnet), dass sie gleichartig miteinander verrechnet werden können (Termverrechnung!).
Die 2 Begriffe deuten unsinnigerweise auf 2 Handlungsweisen hin, die jedoch nur die eine Zielstellung Umformung haben. ***Termumformung*** ist die rechnerische Haupthandlung (ca. 80%). Die anderen Anteile sind das ***Verrechnen*** und die ***Umstellung*** zur Endlösung, der expliziten Gleichungsform. Da in der Regel die Anteile (Glieder) einer Gleichung in der Normalform /Polynomform (Strichrechnung, Summe) betrachtet werden, wird allgemein unter einem ***Term*** die in unterschiedlichster ***Punktrechnung zusammengefassten Größen und Werte*** verstanden:

$23ab \cdot \sqrt{bc - d} \quad + \quad c^3 d \quad + \quad [-(d-e)^2] \quad \rightarrow$ sind 3 Terme

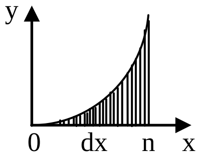
5.5.1 Allgemeine Summenbildung und Differenzverhältnisse

In der Grundstufe haben wir die Symbolik „+“ und „–“ für die Grundrechnung mit konkreten Zahlen kennen gelernt. Ab 8. Klasse wird allgemein mit Buchstabensymbolik gerechnet und man hat für die Übersichtlichkeit umfangreicherer Gleichungen eine allgemeine Symbolik der Summe und der Differenz eingeführt:

Zahlensumme: $\boxed{\sum_{n=1}^{k} a_n} = a_1 + a_2 + a_3 .... + a_k$ (Σ - Sigma, das griech. S für Summe)

Eine spezielle Form mit großem Anwendungsbereich in der Abiturstufe ist die Flächenbestimmung unter einer Funktionskurve zur Funktionssynthese (Aufbau) als Gegenteil zur Bestimmung der Kurvensteilheit, der Funktionsanalyse (Zerlegung/Untersuchung)
Ab der Funktion 2. Grades (nichtlinear, gekrümmt) gibt es keine geometrische Formel dafür.

Flächensumme: Die Fläche ist eine Summe unendlich vieler aneinandergereihter dünner Striche der Breite dx (Strichstärke) mal der jeweiligen Höhe y (ergibt die Strichfläche).
Für diese spezielle Summe wird das ***Integral***zeichen verwendet und genau wie beim normalen Summensymbol Σ die untere und obere Begrenzung daran geschrieben:

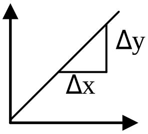


$\boxed{\int_{x=0}^{n} y \cdot dx} = y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + y_3 dx_3 \;...\; + y_n dx_n \rightarrow$ Funktionsreihe

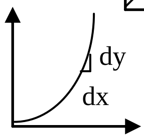
Die Gesamtfläche ist die Summe aller Striche zwischen 0 und n.
Die Strichstärke **d**x geht gegen 0 und wird **d**ifferenziell klein benannt.

Differenzverhältnisse:
Die allgemeine Symbolik der ***Differenz*** ist bereits mehrfach genannt worden:
$\boxed{\Delta y} = y_2 - y_1$ (Δ - Delta, das griech. D für Differenz) oder $\boxed{\Delta x} = x_2 - x_1$

Wird für die Funktionsuntersuchung der Kurven***anstieg*** berechnet, ergibt sich für die *lineare Funktion* der ***Differenzenquotient*** (Bruch) $m = \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$



für alle anderen Funktionen der ***Differentialquotient*** (Bruch) $\boxed{\frac{dy}{dx}}$,
da das Steigungsdreieck zu einem „Punkt“ an der Kurve wird.
(Abiturstufe)



5.5.2 Summenprodukte und Summenpotenzen (speziell *binomische Formel*)

Die Klammerrechnung unterbricht die normale Rechenreihenfolge. Zwei Lösungswege sind dabei möglich. In der Zahlentheorie werden meist die eingeklammerten Summen zuerst errechnet und ihre Ergebnisse miteinander multipliziert:

$$(4 + 12)\cdot(10 + 3) \;=\; 16 \cdot 13 \;=\; 208$$

Mit der Buchstabensymbolik ist das nicht möglich. Hier wird sprichwörtlich ***ausmultipliziert***, das heißt jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer:

$$(a + b)\cdot(c - d) \quad \text{oder auch} \quad (a + b)\cdot(c + (-d)) \;=\; ac - ad + bc - bd$$

Zweigliedrige Ausdrücke sind ***Binome*** (bi-2), mehr als 2 sind ***Polynome*** (Poly-viel). Die linke Seite der Gleichung ist die ***Produktform***, es werden nur Faktoren (die Klammern) multipliziert! Die rechte Seite heißt ***Normal-*** oder ***Polynomform***. Alle Glieder (>2) sind nur in der Grundrechenart verbunden.
Sind 2 oder mehr Klammern in der Produktform gleich, können sie als Potenz geschrieben werden. Generell bei 2 Gliedern in der Klammer, also Binomen, ergeben sich die sehr vielseitig angewandten ***Binompotenzen***, deren Ergebnisse in Kurzform im sogenannten ***Pascalschen Dreieck*** aufgezeigt sind. Die 3 „Binomischen Formeln“ sind ein Spezialfall davon:

$$(a + b)\cdot(a + b) = \boxed{(a + b)^2} = a^2 + ab + ab + b^2 = \boxed{a^2 + 2ab + b^2}$$
$$(a - b)\cdot(a - b) = \boxed{(a - b)^2} = a^2 - ab - ab + b^2 = \boxed{a^2 - 2ab + b^2}$$
$$\boxed{(a + b)\cdot(a - b)} = a^2 - ab + ab - b^2 = \boxed{a^2 - b^2}$$

Für Termumformungen ist das Beherrschen dieser eingerahmten Kurzfassungen von großem Vorteil. Ihr Wesen begreift man am besten beim Betrachten aller Binompotenzen. Im folgenden sind diese und ihre ausgerechneten Zusammenfassungen geschrieben:

$(a + b)^0 = 1$ (jeder Wert mit Exponent 0 ist 1!)
$(a + b)^1 = a + b$ (Die Basis, die Klammer ist nur 1mal da)
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (siehe „Binomische Formel“)
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b^1 + 3a^1 b^2 + b^3$
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3 b^1 + 6a^2 b^2 + 4a^1 b^3 + b^4$

(Pascalsches Dreieck)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

In der Binompotenzreihenfolge (linke Seite) sind in der ausgerechneten Normalform (rechte Seite) zwei systematische ***Wesenszüge*** erkennbar:
Die zwei Variablen a und b müssen als Potenzergebnis logischerweise immer wieder den jeweiligen ***Potenzgrad*** der linken Seite ergeben. Beim Exponent 4 sind a und b alleine oder gemischt immer 4 Faktoren. Die Systematik zeigt, dass a jeweils um Exponent 1 abnimmt (a^4, a^3, a^2…), während b um Exponent 1 zunimmt (b^0, b^1, b^2…). Richtig wäre auch $a^4 b^0$ oder $a^0 b^4$. Da b^0 bzw. a^0 aber den Faktor 1 bedeutet, wird er weggelassen.
Der 2. Wesenszug ist die Bestimmung des ***Koeffizienten*** vor den Variablen a und b. Steht die Variable in ihrer höchsten Potenz allein, so fehlt nur der Faktor 1 der anderen Variablen Nullten Grades bzw. in der Binompotenzabfolge die 1 aus $(a+b)^0$.
Die nächstfolgenden Koeffizienten ergeben sich aus der Summe der darüber liegenden 2 Koeffizienten der um 1 niedrigeren Binompotenz:

$$\mathbf{4}\,a^3b \;\text{ aus }\; \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b \;;\quad \mathbf{6}a^2b^2 \;\text{ aus }\; \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 \;,\quad \mathbf{4}\,ab^3 \;\text{ aus }\; \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3$$

Diese ***Binominalkoeffizienten*** werden zur besseren Übersicht in einer ***Matrix*** (Schablone ohne Variable) herausgeschrieben (***Pascalsches Dreieck***). Später werden auch Gleichungssysteme und Vektoren (12.Klasse) in einer Matrix vereinfacht dargestellt und berechnet. Binominalkoeffizienten spielen in der Kombinatorik und in der Wahrscheinlichkeitslehre eine große Rolle.

Die **Quadratische Ergänzung**

ist eine sehr häufig gebrauchte Möglichkeit der Termumformung in eine übersichtlichere Form und oft eine bessere Erkennbarkeit der Zusammenfassung von Termen. Dies beruht darauf, die Normalform einer quadratischen Gleichung durch Erweitern so zu ändern, dass eine der drei ***binomischen Formen*** (in Produktform) herauskommt: $(a + b)^2$, $(a – b)^2$ oder $(a + b)\cdot(a – b)$

$x^2 + 6x \overset{(6=2b)}{\;} \;(+0)\; – 16 = 0$	$4x^2 – 20x \;(+0)\; + 75 = 0$	$4x^2 – 8 \;(+0)\; = 0$
$x^2 + 6x \boxed{+ 9 – 9} – 16 = 0$	$(2x)^2 – 2\cdot 2x\cdot 5 \boxed{+25 – 25} + 75 = 0$	$(2x)^2 – 8 \boxed{– 1 + 1} = 0$
$(x + 3)^2 – 25 = 0$	$(2x – 5)^2 + 50 = 0$	$(2x)^2 – 3^2 + 1 = 0$
		$(2x + 3)\cdot(2x – 3)+ 1 = 0$

Da das Mittelglied allgemein 2ab ist, so ist logischerweise b der <u>halbe</u> Koeffizient vor a (a=x), also ½·2b = b . Dies gilt jedoch nur für die Normalform, in der vor a^2 (x^2) kein Faktor steht, wie im 1. Beispiel: $b = ½\cdot 6 = 3$ und $b^2 = 3^2 = 9$.
Im 2. Beispiel ist a = 2x. Bleibt 10 als Koeffizient vor a oder 10 = 2b → b = 5 und $b^2 = 25$!
Das 3. Beispiel wird zur 3. binomische Formel $a^2 – b^2$ ergänzt. Sobald man in a^2 eine <u>einfache Quadratzahl</u> erkennt, nur dann wird das 2. Glied zu b^2 ergänzt und das Binomprodukt geschrieben z.B. $2{,}25x^2 = (1{,}5x)^2$ da $225 = 15^2$. Irrationale Zahlen gängen auch, sind aber zu aufwändig!

Generell könnte jedes quadratische Glied mit dem Wurzelwert umgeformt werden. Dies ist jedoch nur sinnvoll, wenn gleiche Wurzeln in der Gleichung sind und eine Zusammenfassung oder Kürzen möglich ist:

$$\frac{(bx^2+2\sqrt{b}\cdot xc+c^2)\cdot\sqrt{b}\cdot x}{\sqrt{b}\cdot x+c} = \frac{\left(\sqrt{b}\cdot x+c\right)^2\cdot\sqrt{b}\cdot x}{\sqrt{b}\cdot x+c} = (\sqrt{b}\,x + c)\cdot\sqrt{b}\,x = bx^2 + \sqrt{b}\,cx$$

5.5.3 Das Teilen von Summen - die Polynomdivision

Diese Rechenweise wird angewandt, um aus einer Gleichung höheren Grades eine um ***einen Grad niedrigere Gleichung*** zu erhalten. Zugleich wird aus der ***Normalform*** die ***Produktform***, wenn der Teiler auf die andere Seite als Faktor geschrieben wird. Soll die Rechnung aufgehen, muss das Teilerbinom eine Nullstellenlösung x_0 enthalten.

$y = 4x^3 + 6x^2 – 5x + 39 \qquad (x_0 = –3)$

$(4x^3 + 6x^2 – 5x + 39) : (x + 3) = 4x^2 – 6x + 13$ oder $\frac{4x^3+6x^2-5x+39}{x+3} = 4x^2 – 6x + 13$

$\underline{4x^3 + 12x^2} \qquad (x – x_0)$

$\quad – 6x^2 – 5x$ oder $4x^3 + 6x^2 – 5x + 39 = (x + 3)\,(4x^2 – 6x + 13)$

$\quad \underline{– 6x^2 – 18x}$ Normalform Produktform

$\qquad 13x + 39$

$\qquad 13x + 39 \qquad\qquad y = 0 = (x + 3)\,(4x^2 – 6x + 13)$

Die Rechnung entspricht einer Teileraufgabe der Grundstufe, nur dass mit 2 Gliedern gleichzeitig gerechnet wird, der ***Teiler*** also ein ***Binom*** ist. Alle Ergebnisterme sind jeweils 1 Grad niedriger. In der Produktform ist am Binom (x + 3) am einfachsten ersichtlich, dass die Gleichung bzw. ihr Funktionswert y an der Stelle x = – 3 zu Null wird, wenn dieser Binomfaktor Null ist. Die anderen 2 Nullstellen sind jetzt einfach mit der quadratischen Bestimmungsgleichung lösbar

$4x^2 – 6x + 13 = 0 \;\rightarrow\; x^2 – {}^6/_4x + {}^{13}/_4 = 0$ (hier 2 imaginäre Lösungen, <u>negative</u> Wurzel)

$x_{1,2} = 0{,}75 \pm 1{,}64\,j$