KUCHAŘKA NA HLEDÁNÍ EXTRÉMŮ FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Na základě poznámek ze cvičení zpracoval

Honza „Irigi“ Olšina

Algoritmy, které popíši fungují pro obecně n neznámých - ve všech textech ale budu psát pouze dvě souřadnice, i když napíšu, jak by se postupovalo pro souřadnic více.

Totální diferenciál
Totální diferenciál definuje limita

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y)-df(\vec{x},y)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \qquad (\hat{\heartsuit})$$

Nutnou podmínkou pro existenci totálního diferenciálu je **existence prvních parciálních derivací**, pokud neexistují, zjevně neexistuje ani $(\hat{\heartsuit})$. Pokud **existují první parciální derivace**, potom jedinou přípustnou hodnotou $\vec{df}(x,y)\cdot(h_1,h_2)$ je

$$\vec{df}(x,y)\cdot(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2$$

Postačující podmínkou je buďto **spojitost prvních parciálních derivací**, nebo existence $(\hat{\heartsuit})$.

Příklad: Zjistěte zda a kde má funkce $(xy)^{1/3}$ totální diferenciál.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^{-2/3}y^{1/3}}{3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^{-2/3}x^{1/3}}{3}$$

Je vidět, že derivace jsou mimo osy spojité, tudíž mimo osy existuje totální diferenciál. Na osách je funkční hodnota $(xy)^{1/3}=0$, ale první parciální derivace zde nejsou definovány (jsou v limitě nekonečné), proto na osách totální diferenciál není.
V počátku soustavy souřadnic jsou první parciální derivace nulové, protože

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

a obdobně pro derivaci podle y.
Proto pokud totální diferenciál existuje, pak má hodnotu $\vec{df}(x,y)\cdot(h_1,h_2)=0$. Ověříme jeho existenci dosazením do $(\hat{\heartsuit})$. Přejdeme k polárním souřadnicím:

$$h_1 = r\sin(\phi)$$
$$h_2 = r\cos(\phi)$$

Tedy dosadím do $(\hat{\heartsuit})$:

$$\lim_{r\to 0}\frac{(h_1h_2)^{1/3}-0-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{(r\sin(\phi)r\cos(\phi))^{1/3}}{r}$$

Tato limita neexistuje (resp. závisí na úhlu ϕ), totální diferenciál tedy v počátku neexistuje.

Hledám-li extrém funkcí více proměnných $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, prohledávám jednak „kandidáty“ na extrém a jednak hledám extrém na okraji, což je extrém s vazbou.

Lokální extrémy
1. Nutná podmínka pro to, aby funkce měla v bodě extrém je, aby první parciální derivace byly nulové:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

2. V těchto bodech může nastat jedna ze tří možností - je zde **minimum**, **maximum** nebo **sedlový bod**. Označíme si členy v Jacobiho matici:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Podle Taylorova rozvoje do druhého řádu (první derivace jsou nulové) nám zbývá plocha určená jako:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 = A\mathrm{d}x^2 + 2B\mathrm{d}x\mathrm{d}y + C\mathrm{d}y^2 = K$$

Pro více proměnných se rozšiřuje kvadriku ve smyslu Taylorova rozvoje. **V diskusi nezapomeňte, že funkce musí být ve zkoumaných bodech spojitá, aby byly smíšené derivace záměnné!**

- Je-li pro každé $(x, y) \neq (0, 0)$ $K > 0$, pak má funkce v tomto bodě **lokální minimum** (plocha je pozitivně definitní)
- Je-li pro každé $(x, y) \neq (0, 0)$ $K \geq 0$, pak **nadále nevíme** (plocha je pozitivně semidefinitní)
- Je-li pro každé $(x, y) \neq (0, 0)$ $K < 0$, pak má funkce v tomto bodě **lokální maximum** (plocha je negativní definitní)
- Je-li pro každé $(x, y) \neq (0, 0)$ $K \leq 0$, pak **nadále nevíme** (plocha je negativně semidefinitní)
- Střídá-li pro každé $(x, y) \neq (0, 0)$ K znaménko pak jde o **sedlový bod** (plocha je indefinitní)

Abychom zjistili, do které z těchto skupin kvadrika patří, použijeme Silvesterovo kritérium: vybereme z J subdeterminanty (zleva zhora) o velikostech $1, 2, \ldots, n$. Pro případ dvou proměnných tedy $D_1 = A$, $D_2 = AC - B^2$. Pak:

- Jsou-li všechny D_i kladné ($A > 0, AC - B^2 > 0$), pak je kvadrika pozitivně definitivní (**lokální minimum**).
- Jsou-li D_i střídavě záporné a kladné ($A < 0, AC - B^2 > 0$), pak je kvadrika negativně definitivní (**lokální maximum**).
- Ve všech ostatních případech **nevíme**.

Příklad: Hledejme extrémy $f = x^2 + y^3 x$. Z podmínky o nulových prvních derivací:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^3 = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 x = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$$

Nyní určíme z Taylorova rozvoje koeficienty A,B takto:

$$A = 2, B = 3y^2 = 0, C = 6yx = 0 \Rightarrow K = 2\mathrm{d}x^2$$

Silvesterovo kritérium říká, že nevíme: $A > 1, AC - B^2 = 0$. Z kvadriky je vidět, že kvadrika je pozitivně semidefinitní (nikde není záporná a pro hodnoty $(0, y)$ je nulová), proto nejsme schopni touto metodou extrém ověřit. (numericky: je to sedlo.)

Extrémy s vazbou

Máme hledat extrémy funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde zůstáváme na vazbách $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $h < n$. Můžeme použít dvě zásadní metody:

A. Vyjádříme co nejvíce proměnných z podmínek $g_i(\ldots)$

B. Na zbylé podmínky použijeme **Lagrageovy multiplikátory**. Má-li funkce v bodě extrém s vazbou (pokud jsme vazbu ještě nevyloučili pomocí bodu **A.**), potom platí:

$$\nabla \left(f(\ldots) - \sum \lambda_i g_i(\ldots) \right) = 0 \qquad (\clubsuit)$$

Nyní potřebuji vyjádřit $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$, čehož dosáhnu:

! Vyjádřením $x, y, \ldots$ podle λ_i z ($\clubsuit$) a dosazením do $g_i(\ldots) = 0$.

Teď známe λ_i a $x, y, \ldots$, tedy máme všechny *kandidáty na extrém*. Nyní se chceme opět přesvědčit, jestli extrém je minimum, maximum, nebo není vůbec. To určíme tak, že rozepíšeme totální diferenciál druhého řádu funkce $F = f - \lambda_i g_i$

$$\mathrm{d}^2 F = \frac{\partial^2 (f - \sum \lambda_i g_i)}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 (f - \sum \lambda_i g_i)}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 (f - \sum \lambda_i g_i)}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

Do těchto vztahů dosadíme za λ_i a $x, y, \ldots$ (které známe). **Získáme tedy kvadratickou plochu, pro jejíž pozitivní/negativní definitnost použijeme výše zmíněné Silvesterovo kritérium**. Tím jsme problém vyřešili.

? Využitím diferenciálních vztahů pro $g_i(\ldots)$ snížím počet nutných diferenciálů ve výsledné kvadrice (to je nutné pro správnost výsledku! - kvadrika musí mít stejný počet diferenciálů jako je stupňů volnosti na kterých se s řešením pohybujeme!):

$$\mathrm{d}g_i = \frac{\partial g_i}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g_i}{\partial y}\mathrm{d}y + \ldots = 0$$

(Z těchto rovnic vyjádříme h diferenciálů, čímž zjednodušíme problém určení definitnosti kvadriky – toto je pouze zjednodušující trik, není pro zbytek postupu nutný)

Příklad: Podívejme se na naši známou fci $f = x^2 + y^3 x$ s jednou vazbou $g = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Použijeme podmínku ($\clubsuit$):

$$\bigtriangledown f(\ldots) = \lambda \bigtriangledown g(\ldots)$$
$$(2x + y^3, 3y^2 x) = \lambda(2x, 2y)$$

Vyjádřit x, y jde - vyjde bod $(0,0)$ a čtyři body (z nichž 2 jsou komplexní a vyloučíme je) v zavislosti na λ.

$$\begin{aligned}
x &= 0, y = 0 \\
x &= \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}(\lambda^2 - \lambda)^{3/4}}{3^{3/4}(1-\lambda)}, y = \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt[4]{\lambda^2 - \lambda}}{\sqrt[4]{3}} \\
x &= \frac{\sqrt{2}(\lambda^2 - \lambda)^{3/4}}{3^{3/4}(1-\lambda)}, y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\lambda^2 - \lambda}}\sqrt[4]{3} \\
x &= \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}(\lambda^2 - \lambda)^{3/4}}{3^{3/4}(\lambda - 1)}, y = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}\sqrt[4]{\lambda^2 - \lambda}}{\sqrt[4]{3}} \\
x &= \frac{\sqrt{2}(\lambda^2 - \lambda)^{3/4}}{3^{3/4}(\lambda - 1)}, y = \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{\lambda^2 - \lambda}}{\sqrt[4]{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{8}\left(4 - \frac{13}{\sqrt[3]{62 - 3\sqrt{183}}} - \sqrt[3]{62 - 3\sqrt{183}}\right) \\
\lambda &= \frac{1}{2} + \frac{13\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)}{16\sqrt[3]{62 - 3\sqrt{183}}} + \frac{1}{16}\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{62 - 3\sqrt{183}} \\
\lambda &= \frac{1}{2} + \frac{13\left(1 - \sqrt{3}\right)}{16\sqrt[3]{62 - 3\sqrt{183}}} + \frac{1}{16}\left(1 + \sqrt{3}\right)\sqrt[3]{62 - 3\sqrt{183}}
\end{aligned}$$

Reálné řešení vyjde jen pro reálné (první) λ. Dva body řešení lze zapsat jako

$$(x, y) = (\mathrm{Root}(16x^6 - 24x^4 + 13x^2 - 1, 2), \pm\mathrm{Root}(16x^6 - 24x^4 + 13x^2 - 4, 2)) \approx (0.302339, \pm 0.953201),$$

kde funkce $\mathrm{Root}(P(x), n)$ dává n-tý kořen polynomu $P(x)$ pro reálné kořeny řazeny vzestupně.

Z numerického řešení už je vidět, který z těchto dvou bodů je minimum a který maximum, abych předvedl metodu, ukážu ještě určení z druhého diferenciálu pro řešení 2 – minimum.
Použijeme bodu **2.**

$$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \mathrm{d}y = -\frac{2x}{2y}\mathrm{d}x$$

Zároveň ze druhé složky rovnice z (♣) víme, že $3y^2x = 2y\lambda \Rightarrow y = \frac{2\lambda}{3x}$*. Tedy dosadíme do:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2F &= A\mathrm{d}x^2 + 2B\mathrm{d}x\mathrm{d}y + C\mathrm{d}y^2 \\
A &= \mathrm{Root}(16x^3 - 48x^2 + 9x - 8, 1) \approx +2.86457 \\
B/3 &= \mathrm{Root}(16x^3 - 24x^2 + 13x - 4, 1) \approx +0.908591 \\
C &= \mathrm{Root}(16x^3 - 48x^2 + 9x + 54, 1) \approx -0.864568
\end{aligned}$$

Aplikujeme-li převodní vztah pro diferenciál $\mathrm{d}y$*:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2F &= (A - 2\frac{x}{y}B + \frac{x^2}{y^2}C) \\
&= \mathrm{Root}(2x^3 + 3x^2 - 244, 1)\mathrm{d}x^2 \\
&\approx 4.50672 > 0
\end{aligned}$$

Jde tedy skutečně o minimum. Na tomto příkladě je vidět, že ve valné většině případů se při použití takovýchto komplikovaných metod snadno zasekáme :-).